



РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>124 Системний аналіз</i>
Освітня програма	<i>Системний аналіз і управління</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна(ПО 26)</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)/дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>3 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>3,5 кредити ЕКТС</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен</i>
Розклад занять	<i>Rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: <i>д.ф.-м.н., професор, Бондаренко Віктор Григорович</i> Практичні: <i>д.ф.-м.н., професор, Бондаренко Віктор Григорович</i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вона включає:

- основні положення стосовно моделей фізичних процесів у вигляді рівнянь з частинними похідними, класифікацію таких рівнянь на еліптичні, параболічні, гіперболічні, постановку задач для рівнянь кожного типу, побудову розв'язку в явному вигляді задачі Коші для модельних одновимірних рівнянь
- означення еволюційного оператора абстрактного диференціального рівняння, приклади його побудови для систем звичайних диференціальних рівнянь та для рівнянь математичної фізики, побудова розв'язку неоднорідних рівнянь;
- основні положення теорії еліптичних рівнянь—формула оператора Лапласа в криволінійних координатах, побудова розв'язку задач Діріхле і Неймана в кругових областях, властивості гармонічних функцій—формули Гріна, визначення і методи побудови функції Гріна та застосування функції Гріна для розв'язування крайових задач;
- основні положення і факти стосовно еволюційних—параболічних і гіперболічних рівнянь—розв'язок задачі Коші, дослідження і розв'язування крайових одновимірних задач на півосі і на відрізьку;
- основні означення стосовно інтегральних рівнянь, класифікацію таких рівнянь та їх властивості, застосування інтегральних рівнянь в задачах математичної фізики—зокрема, побудову розв'язку задачі Коші для збуреного рівняння дифузії, метод параметриксу, метод поверхневих потенціалів;
- основні положення теорії узагальнених функцій, поняття узагальненого розв'язку диференціального рівняння, фундаментальний розв'язок—побудова і застосування; нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, поведінка розв'язків' диференціальні рівняння з похідними дробового порядку.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі програмні компетентності та результати навчання за Стандартом вищої освіти

Загальні компетентності

ЗК 01 Здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях

ЗК 03 Здатність абстрактно мислити, застосовувати методи аналізу і синтезу

ЗК 15 Здатність реалізовувати свої права та обов'язки як члена суспільства,

усвідомлювати цінності громадянського (вільного демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності

Фахові компетентності

ФК 03 Здатність будувати математично коректні моделі статичних та динамічних процесів і систем із зосередженими та розподіленими параметрами із врахуванням невизначеності зовнішніх та внутрішніх факторів

Програмні результати навчання

ПРН 04 Знати та вміти застосовувати базові методи якісного аналізу та інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і систем, диференціальних рівнянь в частинних похідних, в тому числі рівнянь математичної фізики

ПРН 16 Розуміти і реалізувати свої права і обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності вільного демократичного суспільства, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватись академічної доброчесності.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна передуює і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Основи системного аналізу» (ПО 17), «Теорія випадкових процесів». Вивчення курсу ґрунтується на широкому використанні основних результат дисциплін «Математичний аналіз» (ПО 1), «Алгебра та геометрія» (ПО 2), «Фізика» (ПО 4), «Диференціальні рівняння» (ПО 5), «Теорія ймовірностей» (ПО 6), «Гармонічний аналіз та операційне числення» (ПО 21), «Теорія стійкості та варіаційне числення» (ПО 22), «Функціональний аналіз» (ПО 8).

3. Зміст навчальної дисципліни

РОЗДІЛ 1 Математичні моделі фізичних процесів. Постановка задач для рівнянь математичної фізики

Тема 1.1. Приклади та класифікація рівнянь математичної фізики. Розв'язок модельних рівнянь. Фізичні явища і процеси, що описуються рівняннями з частинними похідними: розподіл електричного потенціалу, коливання струни і мембрани, розподіл температури, дифузія. Класифікація рівнянь математичної фізики. Метод Даламбера розв'язування задачі Коші для однорідного рівняння коливань струни, побудова розв'язку задачі Коші для однорідного одновимірного рівняння теплопровідності (дифузії) методом перетворення Фур'є. Означення та властивості еволюційного оператора абстрактного диференціального рівняння, побудова розв'язку задачі Коші для неоднорідних еволюційних рівнянь.

РОЗДІЛ 2 Еліптичні рівняння

Тема 2.1. Оператор Лапласа в криволінійних координатах та застосування до розв'язку задачі Діріхле.

Криволінійні координати та пов'язані з ними об'єкти—ортобазис і метричні характеристики (коефіцієнти Ламе). Обчислення в криволінійних координатах дивергенції векторного поля, градієнта скалярної функції, вираз для лапласіана в криволінійних координатах. Побудова розв'язку задач Діріхле і Неймана в кругових областях методом поділу змінних..

Тема 2.2. Загальні методи розв'язку крайових задач.

Загальні властивості гармонічних функцій— формули Гріна та наслідки з них, визначення функції Гріна задачі Діріхле, властивості функції Гріна та методи її побудови для деяких тривимірних областей методом електростатичних зображень; застосування методів функції комплексної змінної для побудови функції Гріна на площині. Розв'язок задачі Діріхле для неоднорідного еліптичного рівняння. Нерівність Харнака, теорема Ліувіля.

РОЗДІЛ 3 Еволюційні рівняння

Тема 3.1. Задача Коші для еволюційних рівнянь

Побудова розв'язку задачі Коші для однорідного параболічного рівняння із сталими коефіцієнтами в просторі довільної розмірності методом перетворення Фур'є. Розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння. Техніка обчислення розв'язків з використанням математичних сподівань функцій від гауссівських векторів. Розв'язок задачі Коші для тривимірного однорідного рівняння коливань методом осереднення. Перехід до двовимірного рівняння методом спуску. Розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння. Техніка обчислення розв'язків задачі Коші для поліноміальних початкових умов.

Тема 3.2. Крайові задачі для еволюційних рівнянь

Побудова розв'язку крайової задачі на півосі для одновимірних рівнянь—дифузії та коливань струни. Метод поділу змінних розв'язування крайової задачі на відрізок.

РОЗДІЛ 4 Інтегральні рівняння в задачах математичної фізики

Тема 4.1. Інтегральні рівняння: теорія та застосування

Визначення лінійного інтегрального рівняння, приклади: рівняння типу згортки, рівняння з виродженим ядром. Побудова розв'язку рівняння Вольтерра. Приклади застосування інтегральних рівнянь до розв'язування задач математичної фізики—побудова розв'язку збуреного параболічного рівняння, метод параметрику, метод поверхневих потенціалів.

РОЗДІЛ 5 Сучасні методи в теорії рівнянь математичної фізики. Короткий огляд.

Тема 5.1. Узагальнені функції в задачах математичної фізики

Визначення і властивості узагальнених функцій—алгебраїчні операції, збіжність, диференціювання. Регулярні і сингулярні узагальнені функції, приклади. Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь, фундаментальний розв'язок рівняння та методи його побудови. Обчислення фундаментального розв'язку оператора Даламбера. Узагальнена задача Коші для рівнянь математичної фізики.

Тема 5.2. Нелінійні задачі математичної фізики. Фрактальні моделі.

Недоліки лінійних рівнянь математичної фізики як моделей фізичних процесів. Нелінійне рівняння теплопровідності. Рівняння Колмогорова-Петровського-Піскунова-Фішера (КППФ) для щільності популяції, хвильовий характер розв'язку. Рівняння типу «реакція-дифузія». Похідна дробового порядку та відповідні їй диференціальні рівняння—фрактальні моделі.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова:

1. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики -К.:Либідь, 2006, -363с.
2. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики: навч. посібник. – Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2015.—358 с.
3. Tikhonov A.N. and Samarskiĭ A.A. Equations of mathematical physics. – Courier Corporation, 2013. – 800 p.
4. A. Friedman. Partial Differential Equations. Krieger, New York, 1976с.
5. Рівняння математичної фізики: [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «системний аналіз»/В.Г.Бондаренко ; КПП ім. Ігоря Сікорського—Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2018—100 с.

Допоміжна

6. Vladimirov, V. S. Methods of the theory of generalized functions. (English) Analytical Methods and Special Functions 6. London: Taylor & Francis (ISBN 0-415-27356-0/hbk). xiv, 311 p. (2002).
7. Smoller J., Shock Waves and Diffusion-Reaction Equations, Springer-Verlag, New York, 1983
8. Logan, D. J., Nonlinear Partial Differential Equations, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994
9. Galaktionov, V. A., Geometric Sturmian Theory of Nonlinear Parabolic Equations with Applications, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2004. P.356

10.S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type.*— Springer Basel AG, 2004.—386 P

11.Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Inc. Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San Diego – San Francisco – Singapore – Sydney – Tokio. 2006. 541 p.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Класифікація та приклади рівнянь математичної фізики. Постановка граничних задач для рівнянь математичної фізики. Рекомендована література: [1—С.49-63 ; 3—С7-19; 4—С. 11-22].
2	Розв'язок задачі Коші для модельних рівнянь математичної фізики . Рекомендована література [3—С.26-31; 4—С.23-27,180-185 ; 6—С.9-12].
3	Еволюційний оператор абстрактного диференціального рівняння. Приклади розв'язування задачі Коші для лінійних неоднорідних систем звичайних диференціальних рівнянь.[6— С. 13-18].
4	Еволюційний оператор абстрактного диференціального рівняння. Приклади розв'язування задачі Коші для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними [3—С.47-49; 6 — С. 13-18].
5	Криволінійні координати. Обчислення дивергенції.Рекомендована література:[4—С.279-287; 6 — С. 19-22].
6	Лапласіан в криволінійних координатах. Задача Діріхле в крузі. Рекомендована література: [3—С.202-203; 4 — С.309-318; 6—С.23-27].
7	Лапласіан в полярних і сферичних координатах. Задача Діріхле в кругових областях. Рекомендована література: [4 — С.309-318; 6—С.23-27].
8	Загальні властивості гармонічних функцій. Рекомендована література: [1 — С.296-308; 3— С.203-224;4 — С.287-305; 6—С.29-33].
9	Функція Гріна задачі Діріхле в тривимірному просторі. Рекомендована література:[1 — С.330—349; 3—С.228-240; 4 — С.318-329; 6—С.34-36].
10	Функція Гріна задачі Діріхле на площині. Рекомендована література:[1 — С.330—349; 4 — С.318-329; 6—С.37-39].
11	Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Нерівність Харнака. Теорема Ліувілля. Рекомендована література: [4 — С.329-343 ; 6—С.38-43] .
12	.Розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння в R^n із сталими коефіцієнтами. Рекомендована література:.[6—С.44-49].
13	. Ймовірнісна інтерпретація параболічного рівняння.Приклади обчислення розв'язку задачі Коші . Рекомендована література: [6—С.50-53].
14	Задача Коші для гіперболічного рівняння. Рекомендована література:[4 — С.403-412; 6— С.53—57]
15	Граничні задачі на півосі для одновимірних еволюційних рівнянь: побудова розв'язку рівняння дифузії. Рекомендована література [4 — С.64-70, 233-241; 6—С.58-68]
16	Граничні задачі на півосі для одновимірних еволюційних рівнянь: побудова розв'язку рівняння коливань.. Рекомендована література [4 — С.64-70, 233-241; 6—С.58-68]
17	Метод поділу змінних для граничних еволюційних задач. Рекомендована література: [4 — С.70-73, 200-205 ; 6—С.69-73]
18	Основні означення та приклади. Вироджені інтегральні рівняння. Рекомендована література:[[1—С.215-225 ; 6— С.74-78].
19	Рівняння Вольтерра. Інтегральні рівняння із симетричним ядром. Рекомендована література:[[1—С.215-225 ; 6— С.74-78].
20	Визначення і властивості. поверхневих потенціалів . Рекомендована література:[1—С.309-324;3—С.258-275; 6,С.—79-88].

21	<i>Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь. Рекомендована література: [1—С.324-334; 3—С.275-285-275; 6—С.79-88].</i>
22	<i>Інтегральні рівняння для збуреної дифузії. Метод параметриксу. Рекомендована література: [5—С.173-185; 6—С.80-83].</i>
23	<i>Узагальнені функції та дії над ними.. Рекомендована література [1 —С.73-105; 6—С.84-87; 12—С.81-105].</i>
24	<i>Узагальнений розв'язок звичайного диференціального рівняння. Рекомендована література [1 —С.73-105, 6—С.87-89; 12—С.81-105].</i>
25	<i>Узагальнені розв'язки рівнянь математичної фізики. Рекомендована література: [1 —С.150-168; 6—С.87-81].</i>
26	<i>Процеси, що моделюються квазілінійними рівняннями. Рекомендована література: [3 —С.287—299; 5 — С.255—265; 6—С.91-99; 11—С.18-23, 66-88].</i>
27	<i>Напівлінійні рівняння «реакція-дифузія» та хвильові ефекти їх розв'язків. Фрактальні моделі. Рекомендована література: [3 — С.287—299; 5 — С.255—265; 6—С.91-99; 11—С.18-23, 66-88].</i>

Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	<i>Класифікація рівнянь математичної фізики. Розв'язок задачі Коші для однорідних рівнянь коливань струни та дифузії.</i>
2	<i>Розв'язок задачі Коші для неоднорідних еволюційних рівнянь. Розв'язок задачі Діріхле в кругових областях.</i>
3	<i>Обчислення функції Гріна для ряду областей в три- та двовимірному просторах.</i>
4	<i>Методи побудови розв'язку задачі Діріхле.</i>
5	<i>Розв'язок задачі Коші для параболічних рівнянь в просторі довільної розмірності. Обчислення математичних сподівань за гауссівською мірою.</i>
6	<i>Розв'язок задачі Коші для рівняння коливань в дво- та тривимірному просторі.</i>
7	<i>Розв'язок змішаної задачі— на півосі та на відрізку— для рівнянь дифузії та коливань струни.</i>
8	<i>Розв'язок вироджених інтегральних рівнянь. Дослідження розв'язку рівнянь Вольтерра.</i>
9	<i>Диференціювання узагальнених функцій. Знаходження фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь.</i>

6. Самостійна робота здобувача вищої освіти

Самостійна робота студентів має на меті розвиток творчих здібностей та активізація їх розумової діяльності, формування потреби безперервного самостійного поповнення знань та розвиток морально-вольових зусиль. Завданням самостійної роботи студентів є навчити студентів самостійно працювати з літературою, творчо сприймати навчальний матеріал і осмислювати його та формування навичок до щоденної роботи з метою одержання та узагальнення знань, умінь і навичок.

На самостійну роботу відводяться наступні види завдань: обробка і осмислення інформації, отриманої безпосередньо на заняттях; робота з відповідними підручниками та особистим конспектом лекцій; написання МКР (модульної контрольної роботи) ; підготовка до складання семестрового контролю.

Метою проведення модульних контрольних робіт є перевірка рівня засвоєння теоретичного і практичного матеріалу дисципліни.

МКР 1. Одновимірні еволюційні рівняння, задачі Діріхле та Неймана в крузі..

МКР 2. Задача Коші для двовимірних та тривимірних еволюційних рівнянь, інтегральні рівняння.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Відвідування занять

Відвідування лекцій, а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для виконання домашніх завдань і успішного написання МКР.

Пропущені контрольні заходи

Результат модульної контрольної роботи для студента, який не з'явився на контрольний захід, є нульовим. Повторне написання модульної контрольної роботи для осіб, що були відсутні без поважної причини, не допускається. Пропущений екзамен не зараховується незалежно від причин пропуску; у такому випадку студент отримує запис у відомості «не з'явився» та повинен скласти екзамен на додатковій сесії.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

Процедура оскарження результатів контрольних заходів

Студенти мають можливість підняти будь-яке питання, яке стосується процедури проведення та/або оцінювання контрольних заходів, та очікувати, що воно буде розглянуто згідно із наперед визначеними процедурами. Студенти мають право оскаржити результати контрольних заходів, але обов'язково аргументовано, пояснивши, з яким критерієм не погоджуються відповідно до оціночного листа та/або зауважень.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Таблиця 1. Система рейтингових балів.

№	Контрольний захід	Максимальний бал
1	Модульна контрольна робота МКР 1	24
2	Модульна контрольна робота МКР 2	36
3	Екзамен	40
4	Разом	100

Проміжна атестація студентів (далі – атестація) є календарним рубіжним контролем та проводиться двічі за семестр. Для одержання першої атестації перша модульна контрольна робота має бути написана на позитивну оцінку (не менше 12 балів з 24). Для одержання другої атестації друга модульна контрольна робота має бути написана на позитивну оцінку.

Семестрова атестація (екзамен) проводиться усно. Семестрова оцінка є сумою результату роботи в семестрі (RD) та балами відповіді на екзамені. Умова допуску до екзамену— $RD \geq 20$ балів.

Результат виконання завдання оцінюється за такими критеріями (у відсотках максимальної кількості балів за екзаменаційне завдання):

- | | |
|--|----------|
| - виконання завдання у повному обсязі | 100%, |
| - часткове виконання з незначною кількістю неprinципових помилок | 50% -90% |
| - часткове виконання, є помилки, немає обґрунтування відповіді | <50%, |
| - завдання не виконане або виконане з грубими помилками, немає | |

обґрунтування відповіді

Відповідно сумарної кількості балів, що набрані в семестрі та на іспиті, здобувач отримує оцінку згідно таблиці 2.

Таблиця 2 відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Рейтинг	Оцінка ECTS	Традиційна оцінка
95 - 100	A — відмінно	Відмінно
85 - 94	B — дуже добре	Добре
75 - 84	C — добре	
65 - 74	D — задовільно	Задовільно
60 - 64	E — достатньо	
менше 60 балів	FX — незадовільно	Незадовільно
менше 20 балів	F — не допущено	Не допущено

10. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Теоретичні питання:

1. Природні явища і процеси, що описуються рівняннями математичної фізики. Класифікація рівнянь математичної фізики, постановка задач для цих рівнянь.
2. Модельні приклади рівнянь математичної фізики: задача Коші для рівнянь коливань струни та дифузії.
3. Еволюційний оператор абстрактного диференціального рівняння, його властивості. Розв'язок неоднорідного рівняння. Приклади—неоднорідна задача Коші для рівнянь коливань струни та дифузії.
4. Криволінійні координати в R^3 , базис, коефіцієнти Ламе. Дівергенція в криволінійних координатах.
5. Оператор Лапласа в криволінійних координатах. Розв'язок задачі Діріхле в кругових областях.
6. Загальні властивості гармонічних функцій—формули Гріна в R^3 та R^2 .
7. Теорема про середнє значення гармонічної функції в кулі. Єдиність розв'язку задачі Діріхле.
8. Функція Гріна задачі Діріхле в R^3 та R^2 . Обчислення функції Гріна методом зображень.
9. Функція Гріна для кулі. Обчислення функції Гріна для плоских областей методами теорії функцій комплексної змінної.
10. Нерівність Харнака. Теорема Ліувілля.
11. Розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння в R^n із сталими коефіцієнтами.
12. Ймовірнісна інтерпретація розв'язку задачі Коші. Обчислення розв'язку для деяких класів початкових умов.
13. Розв'язок задачі Коші для рівняння коливань в R^3 та R^2 .
14. Розв'язок крайової задачі на півосі для еволюційних рівнянь.
15. Розв'язок крайової задачі на відрізку для еволюційних рівнянь.
16. Інтегральні рівняння, основні визначення. Рівняння з виродженим ядром. Рівняння Вольтерра та його розв'язок методом ітерацій.
17. Зведення задач для рівнянь математичної фізики до інтегральних рівнянь: метод параметриксу та метод поверхневих потенціалів.
18. Простір основних функцій. Узагальнені функції, їх властивості. Диференціювання узагальнених функцій. Приклади.

19. Узагальнений розв'язок диференціального рівняння. Фундаментальний розв'язок диференціального оператора. Приклади. Узагальнена задача Коші для рівняння коливань.

20. Хвильові властивості розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь. Похідні дробового порядку та відповідні рівняння математичної фізики.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено д.ф.-м.н., професор, Бондаренко Віктор Григорович

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол № 3 від 08.10.2025)

Погоджено Методичною комісією ІПСА (протокол № 2 від 09.10.2025)

ОПП «Системний аналіз і управління» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти введено в дію з 2022/2023 навч. року наказом ректора КПІ ім. Ігоря Сікорського від 15.02.2022 р. № НОН /75/2022