C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 1099-1103, 1997
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Probabilités/*Probability*)

Diffusion sur une variété de courbure non positive

Victor BONDARENKO

Université nationale technique d'Ukraine, Faculté de Mathématiques appliquées,
Kiev-56, prospecte Pobedy 37, Ukraine
E-mail : peter@bidyuk.carrier.kiev.ua

Résumé. Pour la solution fondamentale de l'équation parabolique sur une variété de courbure non positive, nous obtenons des estimations indépendantes de la dimension. Comme conséquence, des conditions suffisantes d'équivalence pour une certaine classe de mesures sont établies.

Diffusion on a manifold of nonpositive curvature

Abstract. *We gives estimates of the fundamental solution of the parabolic equation on a manifold of nonpositive curvature that are independent of the dimension. As a corollary, sufficient conditions of equivalence for some class of measure in Hilbert space were established.*

Abridged English Version

A heat kernel $p(t, x, y)$, corresponding to the equation $\partial u/\partial t = \frac{1}{2}\,\Delta u$, is considered on a complete simply connected Riemann manifold M. For this heat kernel and its gradient, the dimensionality independent estimates were elaborated with some restrictions on the curvature tensor (in the form of comparison theorems to some known function). The results received allow to use the criteria of measures equivalence in Hilbert space, what is connected with the condition of uniform integrability (*see* [4]). As a corollary, sufficient conditions of equivalence of transitional probabilities of the diffusion processes in Hilbert space H with the initial condition and diffusion operator $A(x)$ for disturbance are given. Specifically, if $A^{-1}(x)(z - x) \in H$ we have $P(t, x, \bullet) \sim P(t, z, \bullet)$.

1. Introduction

Soit M, une variété riemannienne de courbure non positive, de dimension n, complète et simplement connexe. Considérons l'équation parabolique dans M

(1) $$\partial u/\partial t = \frac{1}{2}\,\Delta\, u,$$

Note présentée par Paul MALLIAVIN.

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami, et soit $p(t,x,y)$ sa solution fondamentale (le noyau de la chaleur). Posons

$$q\,(t,\,x,\,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp\{-\rho^2\,(x,\,y)/2t\}.$$

Des estimations du noyau $p(t,x,y)$ furent obtenues dans [1]-[3], avec des restrictions sur la courbure, données sous forme de théorèmes de comparaison avec la fonction $q(t,x,y)$:

$$f_1 < p/q \leq f_2, \tag{2}$$

où les f_j dépendent, en particulier, de la dimension de la variété. Dans ces articles, les résultats suivants sont obtenus avec d'autres contraintes sur la courbure :

A. L'inégalité (2) est démontrée avec f_j ne dépendant pas de la dimension.

B. La norme $\|\mathrm{grad}\ln(p/q)\|$ est estimée par une fonction indépendante de la dimension.

Les estimations obtenues permettent d'établir des conditions suffisantes sur l'équivalence des probabilités transitoires $P\,(t,\,x,\,\Gamma)$ des processus de diffusion dans un espace de Hilbert, pour les perturbations de la valeur initiale x et de l'opérateur de diffusion (ces résultats généralisent des résultats connus sur les mesures gaussiennes).

2. Conditions

Fixons les notations suivantes concernant la variété : (u,v) est le produit scalaire dans T_xM ; $\{e_k\}$, $\{\varphi_k\}$ sont des bases orthonormées dans T_xM ; $g_{jk}(x)$ est le tenseur métrique ; $\rho\,(x,\,y)$ est la distance entre x et y ; $\gamma\,(s)$ est la géodésique, $\gamma\,(0)=y, \gamma\,(\rho)=x$; $R(x)(X,Y)$ est le tenseur de la courbure ; $\mathrm{Ric}\,(x)\,(X,\,Y)=\sum_k (R\,(x)\,(X,\,e_k)\,Y,\,e_k)$ est le tenseur de Ricci ; $\mathrm{Ric}\,(x)=\sum_k \mathrm{Ric}\,(x)\,(e_k,\,e_k)$ est la courbure scalaire.

Le tenseur de la courbure satisfait aux conditions suivantes :

1. $(R\,(x)\,(u,\,v)\,u,\,v)\geq 0$ (la courbure est non positive),
2. $\sum_k |(R\,(x)\,(u,\,e_k)\,v,\,\varphi_k)| < c\sqrt{\mathrm{Ric}\,(x)\,(u,\,u)\cdot\mathrm{Ric}\,(x)\,(v,\,v)}$,
3. $\int_0^\infty s\,\mathrm{Ric}\,(\gamma\,(s))\,ds < c$ pour chaque géodésique γ.

4.1. $\sum_k \|(\nabla_{e_k(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(\dot\gamma\,(s),\,\varphi_k\,(s))\,\dot\gamma\,(s)\| = f_1\,(s)$,

4.2. $\sum_k \|(\nabla_{\dot\gamma(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(e_k\,(s),\,\dot\gamma\,(s))\,\varphi_k\,(s)\| = f_2\,(s)$,

4.3. $\sum_{j,k} \|(\nabla_{e_k(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(\dot\gamma\,(s),\,e_j\,(s))\,\dot\gamma\,(s)\|^2 = f_3^2\,(s)$,

4.4. $\sum_{j,k} \|(\nabla_{\dot\gamma(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(e_j\,(s),\,\dot\gamma\,(s))\,e_k\,(s)\|^2 = f_4^2\,(s)$,

4.5. $\sum_{j,k} |(\nabla_{e_k(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(\varphi_j\,(s),\,\dot\gamma\,(s))\,e_j\,(s),\,\varphi_k\,(s)| = f_5\,(s)$,

4.6. $\sum_{j,k} |(\nabla_{e_k(s)}\nabla_{e_j(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(\dot\gamma\,(s),\,e_j\,(s))\,\dot\gamma\,(s),\,e_k\,(s)| = f_6\,(s)$,

4.7. $\sum_{j,k} |(\nabla_{e_k(s)}\nabla_{\dot\gamma(s)}R)\,(\gamma\,(s))\,(e_j\,(s),\,\dot\gamma\,(s))\,e_j\,(s),\,e_k\,(s)| = f_7\,(s)$,

où les fonctions $f_i(s)$ satisfont les conditions suivantes :

$$\int_0^\infty s^2 f_i\,(s)\,ds < c,\ i=1,\,2\,; \qquad \int_0^\infty s f_i\,(s)\,ds < c, \qquad i = 3 \text{ à } 7,$$

et où toutes les constantes sont indépendantes de la dimension.

Remarque 1. – Les conditions 1-3 assurent que la variété est sotchastiquement complète (*voir* [4] et [5]).

DÉFINITION. – *Soit* $\{e_k\}$ *la base orthonormée demi-géodésique dans* $T_x M$ *(c'est-à-dire* $e_1 = \dot{\gamma}(\rho)$*). Les champs basiques de Jacobi* $Z_k(s)$ *sont les solutons de l'équation (Jacobi)*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)}{}^2 Z_k(s) = R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z_k(z))\dot{\gamma}(s), \qquad Z_k(0) = 0, \qquad Z_k(\rho) = e_k.$$

Remarque 2. – La condition suffisante de solution unique du problème aux limites est le caractère non positif de la courbure.

3. Résultats

Supposons

$$a(x, y) = \sum_k (\rho \nabla_{\dot{\gamma}(s)} Z_k(\rho) - Z_k(\rho), Z_k(\rho)),$$

$$b(x, y) = \int_0^\rho (\rho - s)\,\mathrm{Ric}(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\,ds,$$

où les Z_k sont les champs basiques de Jacobi.

CONCLUSION 1. – *Si la condition* 1 *est vérifiée, on a les inégalités*

$$0 \le a(x, y) \le \int_0^\rho s\,\mathrm{Ric}(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\,ds.$$

CONCLUSION 2. – *Sous les conditions* 1-3, *la fonction* $\exp\{b(x, y)\}$ *est intégrable par rapport à une mesure* $q(t, x, y)\,\sigma(dy)$.

THÉORÈME 1. – *Sous les conditions* 1-3, *on a les inégalités*

$$\exp\{-kt - b(x, y)/2\} \le p(t, x, y)/q(t, x, y) \le 1, \qquad \textit{pour} \quad x, y \in M \quad \textit{et} \quad t > 0,$$

où la constante k *ne dépend pas de la dimension.*

THÉORÈME 2. – *Sous les conditions* 1-4.7, *on a la formule*

$$\mathrm{grad}\ln p(t, x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{t}\dot{\gamma}(\rho) + H(t, x, y),$$

où le champ vectoriel H *satisfait l'inégalité*

$$\|H(t, x, y)\| < \sqrt{\frac{a(x, y) + k}{t}}, \qquad x \in M, \quad y \in M, \quad 0 < t < t_0.$$

Applications des estimations obtenues. – Considérons le processus de la diffusion $\xi(t)$ dans un espace de Hilbert séparable H et soit $P(t, x, \Gamma)$ sa probabilité transitoire. L'équation pour $\xi(t)$ est

$$\xi(t) = x + \int_0^t A(\xi(\tau)\,dw(\tau) + \int_0^t b(\xi(\tau))\,d\tau, \tag{3}$$

où $A(x)$ est l'opérateur de Hilbert-Schmidt,

$$b(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A(x)A^*(x))' - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A(x)A^*(x))'(A(x)A^*(x)(\cdot))(A(x)A^*(x))^{-1}.$$

Soient $A(x)$ et $b(x)$ satisfaisant les conditions d'existence et d'unicité de la solution, et supposons que :

a) $K_1 < A(x) A^*(x) < K_2$, où K_i est l'opérateur nucléaire ;

b) la série $\sum_{n=1}^{\infty} (b(x), e_n)^2 = \|b(x)\|^2$ converge uniformément dans une certaine base $\{e_k\}$.

Désignons par $\prod_n$ et $\prod_n^{n+k}$, respectivement, les projecteurs de H sur $\mathbf{R}^n$ et de $\mathbf{R}^{n+k}$ sur $\mathbf{R}^n$. Considérons, de plus, deux équations stochastiques

$$\eta(t) = \prod_n x + \int_0^t \prod_n A(\eta(\tau))\, dw(\tau) + \int_0^t \prod_n b(\eta(\tau))\, d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(t) = x + \int_0^t \tilde{A}(\tilde{\xi}(\tau))\, dw(\tau) + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{\xi}(\tau))\, d\tau,$$

$\eta(t) \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{\xi}(t) \in H$, et soient $P_n(t, x_n, \Lambda_n)$ et $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$, respectivement, les probabilités transitoires des processus η et $\tilde{\xi}$, $x_n = \Pi_n x$.

THÉORÈME 3. – *Les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\lim_{n\to\infty} E\|\xi(t) - \eta(t)\|^2 = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} P_{n+k}\left(t, \prod_{n+k} x, \left(\prod_n^{n+k}\right)^{-1} \Delta_n\right) = P\left(t, x, \prod_n^{-1} \Delta_n\right)$$

sur l'algèbre des ensembles dont les frontières est de mesure de Lebesgue nulle.

Remarque 3.

$$P_n(t, x_n, \Delta_n) = \int_{\Delta_n} p(t, x_n, y_n)\, \sigma(dy_n),$$

où p est le noyau de la chaleur sur la variété $M = \prod_n H$ avec le tenseur métrique

$$g_{jk}\left(\prod_n x\right) \sim \left(\prod_n A\left(\prod_n x\right) A^*\left(\prod_n x\right) \prod_n\right)^{-1},$$

σ étant l'élément de volume dans M.

L'existence des estimations indépendantes de la dimension et le résultat du théorème 3 permettent d'appliquer le critère de la continuité absolue, qui utilise le concept d'intégrabilité uniforme (*voir* [6], p. 522).

THÉORÈME 4. – *Le tenseur métrique $g_{jk}(\prod_n x)$ engendre le tenseur de la courbure, qui satisfait, pour toutes les dimensions, les conditions* 1-4.7. *Si la relation*

$$A^{-1}(x)(z - x) \in H$$

est vérifiée, les mesures $P(t, x, \Gamma)$ et $P(t, z, \Gamma)$ sont équivalentes pour $t > 0$.

Exemple. – Soit $A(x) = A_1(I + C(x))$, où A_1 est l'opérateur de Hilbert-Schmidt constant et où $C(x)$ est l'opérateur nucléaire. Si les dérivées $C^{(k)}(x)\,(k \leq 4)$ satisfont certaines conditions naturelles, le tenseur de la courbure correspondant à $A(x)$ satisfera les conditions 1-4.7.

THÉORÈME 5. – *Si les conditions du théorème* 4 *sont également vérifiées pour le tenseur métrique*

$$\tilde{g}_{jk}\left(\prod_n x\right) \sim \left(\prod_n x\tilde{A}\left(\prod_n x\right) \tilde{A}^*\left(\prod_n x\right) \prod_n\right)^{-1},$$

et si la distance $d(x, y)$ engendrée par celui-ci, satisfait la condition

$$\rho^2(x, y) - d^2(x, y) \leq \rho^2(x, y)(B(x)\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)), \quad B(x) \leq \lambda I, \quad \lambda < 1,$$

où $B(x)$ est l'opérateur nucléaire, alors la probabilité de transition $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ est absolument continue par rapport à $P(t, x, \Gamma)$, pour $t > 0$ et $x \in H$.

Note remise le 13 mai 1996, acceptée après révision le 27 mars 1997.

Références bibliographiques

[1] **Débiard A., Gaveau B., Mazet E., 1976**. Théorème de comparaison en géométrie riemannienne, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 12, No. 2, p. 391-425.

[2] **Cheng S. Y., Li P., Yau S. T., 1981**. On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold, *J. Amer. Math.*, 103, No. 5, p. 1021-1063.

[3] **Cheeger J., Yau S. T., 1981**. A lower bound for heat kernel, *Comm. Pure Appl. Math.*, 34, p. 465-480.

[4] **Azencott R., 1974**. Behavior of diffusion semi-groupe at infinity, *Bull. Soc. Math. France*, 102, p. 193-240.

[5] **Yau S. T., 1978**. On the heat kernel of complete Riemannian manifold, *J. Math. Pures Appl.*, 57, n° 2, p. 191-201.

[6] **Gihmann J. J., Skorojohd A. V., 1971**. Théorie des processus aléatoires (en russe), *Nauka*, Moscau.