

# Оцінювання реверсів рангів в нечіткому методі аналізу ієрархій при зміні параметрів функцій принадлежності

Н.І. Недашківська, Л.О. Креп

## Вступ

Протягом останніх років метод аналізу ієрархій (MAI) та його модифікації набувають все ширшого використання. MAI застосовують для прийняття багатокритеріальних рішень в економіці, фінансах, бізнесі тощо. Модифікований MAI (MMAI) обробки нечіткої експертної інформації [1] дозволяє використовувати данні та інформацію від експертів що містять неповноту та невизначеність.

Одна з головних проблем при формалізації експертних оцінок за допомогою нечітких чисел та лінгвістичних змінних – це вибір виду і параметрів функції належності, який здебільшого здійснюється необґрунтовано і може не в повній мірі відображати реальну дійсність. Розробляються модифіковані MAI, в яких використовується лог-нормальний закон розподілу експертних оцінок [2], логіт- [3] і пробіт- [4] моделі з мультиноміальним законом розподілу оцінок експертів та інші [5]. Однак, питання строгого математичного обґрунтування того чи іншого закону розподілу експертних оцінок в MAI на сьогоднішній день залишається відкритим.

У зв'язку з цим, метою даної роботи є визначення однозначності представлення експертних оцінок в залежності від функції принадлежності (ФП) та впливу параметрів ФП на ранжування альтернатив при обчисленні локальних ваг за допомогою MMAI обробки нечіткої експертної інформації [1]. Основною задачею є оцінювання змін ранжувань альтернатив (реверс рангів) в методі MMAI, при представленні інформації за допомогою ФП [6–12], що найчастіше використовуються в літературних джерелах.

## 1. Постановка задачі розрахунку нечітких ваг за допомогою MMAI

Дано:

- $A^{\text{неч}} = \{(a_{ij}^{\text{неч}}) | i, j = \overline{1, n}\}$  - нечітка матриця парних порівнянь (НМПП), для якої  $a_{ij}^{\text{неч}} = (x, \mu_{ij}(x))$  - нормальна нечітка множина і відображає результат парного

порівняння об'єктів  $O_i$  та  $O_j$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , де  $\mathfrak{R}$  - множина дійсних чисел. Значення функції приналежності  $\mu_{ij}(x)$  нечіткої множини  $a_{ij}^{neq}$  є ступенем виконання переваги  $O_i \succ O_j$ ;

- $\mu_{ij}(x)$  - функція приналежності трикутного виду:  $\mu_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]$ , де  $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$ ,  $m_{ij}$  - значення інтервалу, в якому функція приналежності  $\mu_{ij}(x)$  дорівнює одиниці.

Знайти:

- вектор нечітких ваг  $w^{neq} = \{(w_i^{neq}) | i = \overline{1, n}\}$ , який відображає переваги, записані в НМПП  $A^{neq}$ ;
- ранжування альтернатив за знайденими вагами  $w_i^{neq}$ .

## 2. Розв'язання задачі

Для розв'язання задачі розрахунку нечітких ваг в MMAI [1] використовується декомпозиційне представлення НМПП і здійснюється перехід до роботи з множинами рівня – інтервальними матрицями парних порівнянь (ІМПП)  $A = A(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0,1]$ :

$$A = \left\{ \left( a_{ij} \right) \middle| a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}], i, j = \overline{1, n} \right\}, l_{ij} \leq u_{ij} \quad (1)$$

Розглянемо двох-етапну лінійну модель MMAI знаходження інтервальних ваг  $w = \left\{ \left( w_h \right) \middle| w_h = [w_h^l, w_h^u], h = \overline{1, n} \right\}$  з ІМПП (1) [1].

Етап 1 (знаходження найменших значень відхилень розширеніх інтервалів):

$$\text{Min } \Delta(\Delta 1, \Delta 2) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\Delta 1_{ij} + \Delta 2_{ij}) \quad (2)$$

при обмеженнях

$$x_i - x_j + \Delta 1_{ij} \geq \ln(l_{ij}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \quad (3)$$

$$x_i - x_j - \Delta 2_{ij} \leq \ln(u_{ij}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \quad (4)$$

$$\Delta 1_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \quad (5)$$

$$\Delta 2_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \quad (6)$$

$$0 \leq a \leq x_i \leq b, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

Змінні:  $x_l$ ,  $l = \overline{1, n}$  та  $\Delta 1_{ij}$ ,  $\Delta 2_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{i+1, n}$ .

$a, b$  - задані величини.

Етап 2 (знаходження логарифма інтервальної ваги  $x_h = [x_h^l, x_h^u]$ ,  $h = \overline{1, n}$ ):

$Min/Max x_h$

при обмеженнях (3) – (7) і

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\Delta 1_{ij} + \Delta 2_{ij}) = \Delta^*,$$

де  $\Delta^*$  - оптимальне значення цільової функції (2) етапу 1.

Змінні:  $x_l$ ,  $l = \overline{1, n}$  та  $\Delta 1_{ij}$ ,  $\Delta 2_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{i+1, n}$ .

Результатуючі ненормовані ваги  $w_h = [w_h^l, w_h^u]$  дорівнюють  $w_h^l = \exp(x_h^{*l})$ ,

$w_h^u = \exp(x_h^{*u})$ , де  $x_h^{*l}, x_h^{*u}$  - оптимальні розв'язки задач мінімізації і максимізації етапу 2, відповідно.

### 3. Постановка задачі оцінювання зміни ранжувань (реверсу рангів) в MMAI при зміні параметрів функцій приналежності

В традиційному методі аналізу ієрархій експерти дають оцінки у вербальній шкалі відносної важливості: «рівна важливість» (кількісне вираження дорівнює 1) – «абсолютна перевага» (кількісне вираження дорівнює 9). Ця шкала отримала назву фундаментальної. Використання фундаментальної шкали є однією з переваг MAI над іншими методами експертного оцінювання, оскільки дозволяє оптимальним чином врахувати психофізіологічні особливості людини [13].

В даній роботі для представлення експертних оцінок розглядаються нечітки фундаментальні шкали, в яких лінгвістичним змінним відповідають трикутні функції приналежності (ФП) (рис.1, табл. 1). Досліджуються ФП з різними параметрами [6–12]. *Під реверсом рангів в даній роботі будемо розуміти зміну ранжувань альтернатив, знайдених за допомогою двох-етапної моделі MMAI, при зміні параметрів ФП нечітких експертних оцінок.* Задача полягає в оцінюванні двох видів реверсу рангів:

- 1) зміна найкращої (оптимальної) альтернативи;
- 2) зміна рангу будь-якої неоптимальної альтернативи.

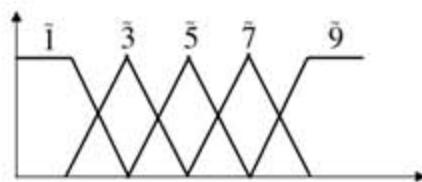


Рис.1. Нечітка фундаментальна шкала, ФП 1

Таблиця 1. Нечіткі фундаментальні шкали

Лінгвістична змінна	Нечіткі числа					
	ФП 1 [6, 7]	ФП 2 [8]	ФП 3 [9]	ФП 4 [10]	ФП 5 [11]	ФП 6 [12]
Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1} = (1,1,3)$	$\tilde{1} = (1,1,1)$	$\tilde{1} = (1,1,1)$	$\tilde{1} = (1,1,2)$	$\tilde{1} = (1,1,1)$	$\tilde{1} = (1/2,1,3/2)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3} = (1,3,5)$	$\tilde{3} = (2,3,4)$	$\tilde{3} = (2,3,4)$	$\tilde{3} = (2,3,4)$	$\tilde{3} = (1,3,5)$	$\tilde{3} = (1,3/2,2)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5} = (3,5,7)$	$\tilde{5} = (4,5,6)$	$\tilde{5} = (4,5,6)$	$\tilde{5} = (4,5,6)$	$\tilde{5} = (3,5,7)$	$\tilde{5} = (3/2,2,5/2)$
Дуже сильна перевага $\tilde{7}$	$\tilde{7} = (5,7,9)$	$\tilde{7} = (6,7,8)$	$\tilde{7} = (6,7,8)$	$\tilde{7} = (6,7,8)$	$\tilde{7} = (5,7,9)$	$\tilde{7} = (2,5/2,3)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9} = (7,9,9)$	$\tilde{9} = (9,9,9)$	$\tilde{9} = (8,9,10)$	$\tilde{9} = (8,9,9)$	$\tilde{9} = (7,9,11)$	$\tilde{9} = (5/2,3,7/2)$
Проміжні значення між двома сусідніми судженнями: $\tilde{2}, \tilde{4}, \tilde{6}, \tilde{8}$	$\tilde{2} = (1,2,4)$ $\tilde{4} = (2,4,6)$ $\tilde{6} = (4,6,8)$ $\tilde{8} = (6,8,9)$	$\tilde{2} = (1,2,3)$ $\tilde{4} = (3,4,5)$ $\tilde{6} = (5,6,7)$ $\tilde{8} = (7,8,9)$	$\tilde{2} = (1,2,3)$ $\tilde{4} = (3,4,5)$ $\tilde{6} = (5,6,7)$ $\tilde{8} = (7,8,9)$	$\tilde{2} = (1,2,3)$ $\tilde{4} = (3,4,5)$ $\tilde{6} = (5,6,7)$ $\tilde{8} = (7,8,9)$	$\tilde{2} = (1,2,4)$ $\tilde{4} = (2,4,6)$ $\tilde{6} = (4,6,8)$ $\tilde{8} = (6,8,10)$	$\tilde{2} = (3/4,5/4,7/4)$ $\tilde{4} = (5/4,7/4,9/4)$ $\tilde{6} = (7/4,9/4,11/4)$ $\tilde{8} = (9/4,11/4,13/4)$

#### 4. Приклад

Розглянемо приклад реверсу рангів при використанні різних ФП. Нехай експерт попарно порівнює чотири альтернативи і за результатами його лінгвістичних оцінок побудована наступна МПП:

$$\begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{3} & \tilde{2} & \tilde{4} \\ 1/\tilde{3} & \tilde{1} & \tilde{4} & \tilde{7} \\ 1/\tilde{2} & 1/\tilde{4} & \tilde{1} & \tilde{9} \\ 1/\tilde{4} & 1/\tilde{7} & 1/\tilde{9} & \tilde{1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Для представлення цих експертних оцінок використаємо дві різні ФП, а саме, ФП 1 і ФП 2 (див.табл.1), тобто розглядатимемо дві НМПП

$$A_1^{\text{неч}} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & (1,3,5) & (1,2,4) & (2,4,6) \\ (1/5,1/3,1) & (1,1,1) & (2,4,6) & (5,7,9) \\ (1/4,1/2,1) & (1/6,1/4,1/2) & (1,1,1) & (7,9,9) \\ (1/6,1/4,1/2) & (1/9,1/7,1/5) & (1/9,1/9,1/7) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

$$A_2^{\text{неч}} = \begin{pmatrix} (1,1,1) & (2,3,4) & (1,2,3) & (3,4,5) \\ (1/4,1/3,1/2) & (1,1,1) & (3,4,5) & (6,7,8) \\ (1/3,1/2,1) & (1/5,1/4,1/3) & (1,1,1) & (9,9,9) \\ (1/5,1/4,1/3) & (1/8,1/7,1/6) & (1/9,1/9,1/9) & (1,1,1) \end{pmatrix}$$

Задамося рівнем  $\alpha = 0.1$ . До кожної з цих НМПП застосуємо двох-етапну модель MMAI з параметрами  $a = 0$  і  $b = 20$ . В результаті отримаємо інтервалні ваги альтернатив  $w_1 = (0.40 \ 0.36 \ 0.16 \ 0.07)$  і  $w_2 = (0.35 \ 0.44 \ 0.14 \ 0.07)$ . Тому використання ФП № 1 в результаті дає найкращу першу альтернативу, а при використанні ФП № 2 найкращою є друга альтернатива. Таким чином, використання різних ФП для представлення лінгвістичних оцінок (8) призводить до різних найкращих альтернатив (реверс рангів первого виду).

## 5. Виконані експерименти

Для оцінювання чутливості отриманого за допомогою MMAI ранжування альтернатив до вибору нечіткої шкали було проведено комп’ютерне моделювання.

Умови моделювання:

1. випадковим чином вибираються лінгвістичні змінні – елементи верхньої трикутної частини НМПП з множини  $\{\tilde{1}, \tilde{2}, \dots, \tilde{9}\}$ ;
2. використовуючи нечіткі шкали (див. табл. 1), формуються НМПП;
3. розраховуються елементи нижньої трикутної частини кожної НМПП за формулою  $1/\tilde{x} = (1/c, 1/b, 1/a)$ , де  $\tilde{x} = (a, b, c)$  - елемент верхньої трикутної частини НМПП, що знаходиться у відповідній симетричній позиції;
4. діагональні елементи кожної НМПП дорівнюють нечіткому числу (1,1,1);
5. генеруються НМПП розмірності 4x4;

6. задаються рівні  $\alpha$  для декомпозиційного представлення НМПП:  
 $\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 1;$
7. використовуючи двох-етапний алгоритм MMAI, розраховуються ваги;
8. перевіряється поява реверсу рангів першого або другого виду для деяких двох НМПП;

Оскільки попередні дослідження реверсів в інших задачах [14] виявили залежність частоти реверсів від присутності альтернатив-копій в множині альтернатив, то в даному моделюванні окрім розглядаються два випадки:

- **всі альтернативи різні** (серед елементів верхньої трикутної частини НМПП немає елемента «рівна важливість»);
- **в множині альтернатив присутні альтернативи-копії;**

## 6. Результати експериментів

**Експеримент 1.** Досліджується чутливість отриманого за допомогою MMAI ранжування альтернатив до вибору параметрів ФП: перевіряється зміна найкращої альтернативи чи зміна рангів інших альтернатив для деяких двох НМПП.

Параметри оптимізації:  $a = 0$ ,  $b = 20$ . Загальна кількість досліджених матриць:  $100*10*15 = 15000$ , дляожної пари шкал  $100*10 = 1000$  (де 100 – кількість ітерацій, 10 – кількість досліджених рівнів параметру  $\alpha$ , 15 – кількість комбінацій пар ФП).

Наведемо основні отримані результати в залежності від присутності альтернатив-копій у множині альтернатив.

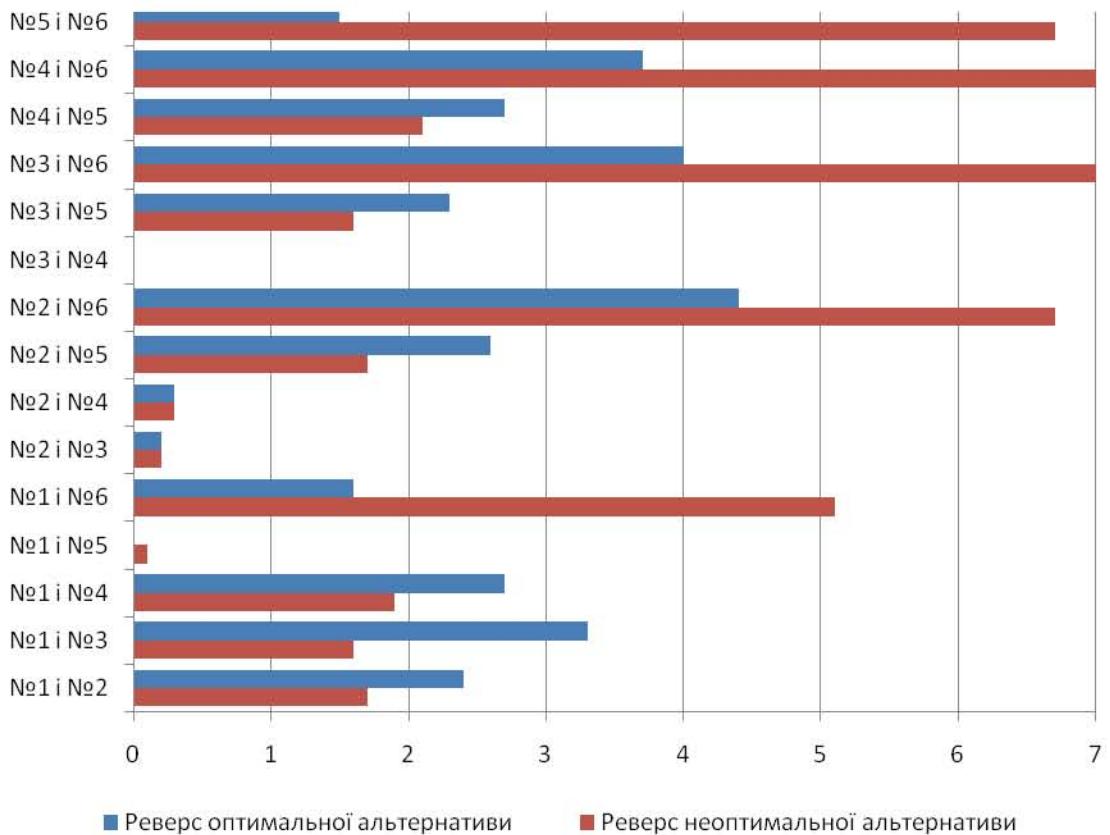
### 1.1 всі альтернативи різні (серед елементів верхньої/нижньої трикутної частини НМПП немає елемента «рівна важливість»)

Таблиця 2. Кількість реверсів оптимальної альтернативи (реверс першого виду)

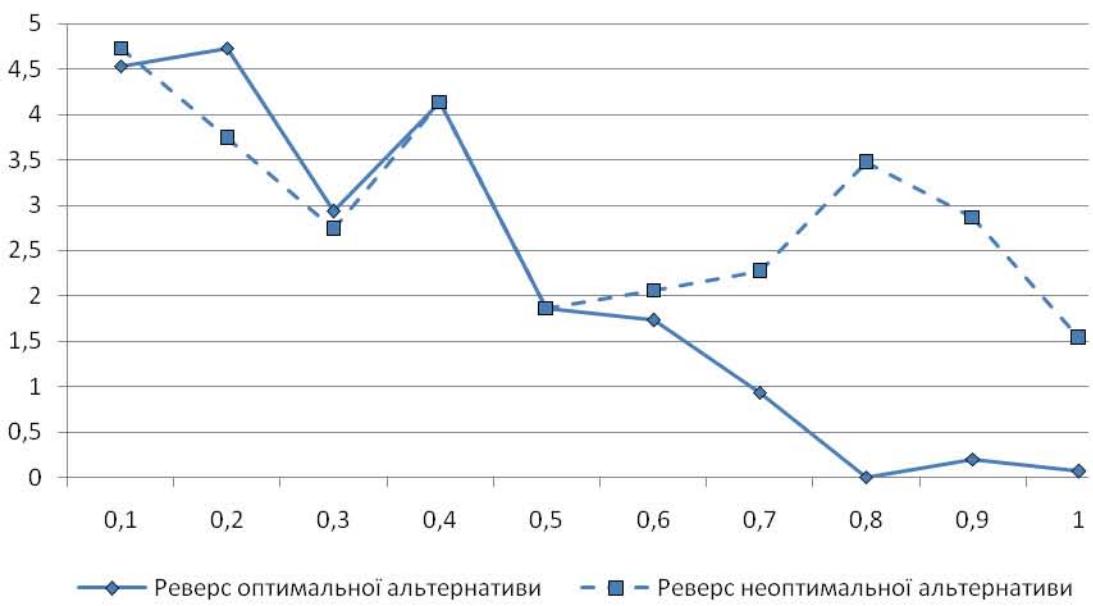
		Кількість реверсів при заданому рівні $\alpha$										Середня частота, %
№ ФП	№ ФП	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
1	2	5	6	2	4	3	2	2	0	0	0	2,4
1	3	9	6	5	7	3	1	2	0	0	0	3,3
1	4	6	5	2	8	4	2	0	0	0	0	2,7
1	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	6	3	3	1	7	1	0	0	0	0	1	1,6
2	3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0,2
2	4	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3
2	5	5	2	8	7	2	1	1	0	0	0	2,6
2	6	13	9	6	7	4	5	0	0	0	0	4,4
3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	5	6	4	2	0	4	2	0	0	0	2,3
3	6	7	12	6	3	4	7	0	0	1	0	4
4	5	4	9	3	3	3	2	3	0	0	0	2,7
4	6	5	8	5	10	3	2	4	0	0	0	3,7
5	6	5	3	2	2	1	0	0	0	2	0	1,5
Середня частота, %		4,53	4,73	2,93	4,13	1,87	1,73	0,93	0	0,2	0,07	2,1

Таблиця 3. Кількість реверсів неоптимальних альтернатив (реверс другого виду)

		Кількість реверсів при заданому рівні $\alpha$										Середня частота, %
№ ФП	№ ФП	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
1	2	3	3	0	4	3	1	0	2	1	0	1,7
1	3	4	8	0	1	1	0	2	0	0	0	1,6
1	4	5	4	1	1	2	2	1	2	1	0	1,9
1	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1
1	6	5	4	6	9	2	2	4	5	8	6	5,1
2	3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0,2
2	4	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0,3
2	5	5	2	3	4	0	1	0	0	2	0	1,7
2	6	12	6	10	9	4	5	3	6	8	4	6,7
3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	6	3	0	1	2	1	2	1	0	0	1,6
3	6	9	6	8	9	2	7	8	11	6	5	7,1
4	5	7	2	0	4	2	2	2	1	1	0	2,1
4	6	6	10	10	9	4	4	5	14	8	3	7,3
5	6	8	8	3	11	4	5	7	9	7	5	6,7
Середня частота, %		4,73	3,73	2,73	4,13	1,87	2,07	2,27	3,47	2,87	1,53	2,9



Графік 1. Відсоток реверсів в залежності від ФП



Графік 2. Відсоток реверсів в залежності від рівня  $\alpha$

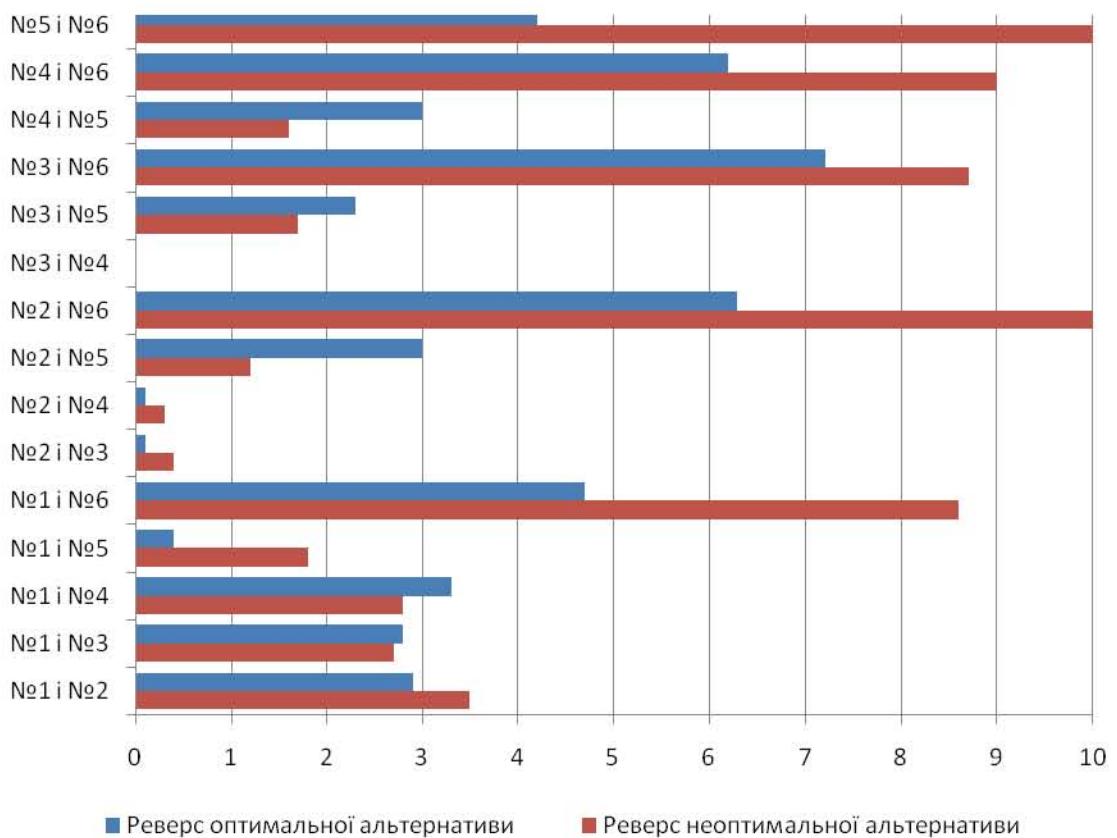
**1.2. в множині альтернатив присутні альтернативи-копії (серед елементів верхньої трикутної частини НМПП присутні елементи «рівна важливість»)**

Таблиця 4. Кількість реверсів оптимальної альтернативи (реверс першого виду)

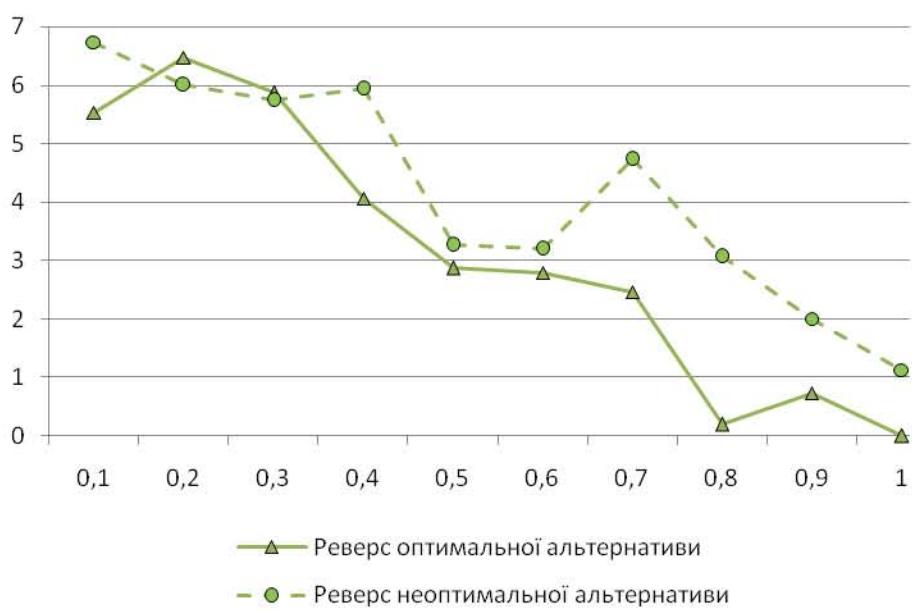
		Кількість реверсів при заданому рівні $\alpha$										Середня частота, %
№ ФП	№ ФП	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
1	2	4	6	6	2	5	2	2	0	2	0	2,9
1	3	5	7	5	2	4	3	2	0	0	0	2,8
1	4	7	7	8	2	1	3	4	0	1	0	3,3
1	5	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0,4
1	6	6	12	8	7	1	7	4	0	2	0	4,7
2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1
2	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0,1
2	5	5	8	6	2	4	2	3	0	0	0	3
2	6	13	13	15	10	3	4	3	1	1	0	6,3
3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	5	3	2	1	2	6	4	0	0	0	2,3
3	6	11	14	17	8	8	5	5	1	3	0	7,2
4	5	5	8	2	3	6	3	3	0	0	0	3
4	6	13	9	10	16	3	4	5	1	1	0	6,2
5	6	7	10	9	7	5	2	1	0	1	0	4,2
Середня частота, %		5,53	6,47	5,87	4,07	2,87	2,8	2,47	0,2	0,73	0	3,1

Таблиця 5. Кількість реверсів неоптимальних альтернатив (реверс другого виду)

		Кількість реверсів при заданому рівні $\alpha$										Середня частота, %
№ ФП	№ ФП	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
1	2	7	3	5	4	4	3	5	3	1	0	3,5
1	3	5	6	4	3	1	1	5	1	1	0	2,7
1	4	7	4	3	3	3	3	2	2	1	0	2,8
1	5	2	4	4	2	1	0	2	3	0	0	1,8
1	6	11	9	14	14	4	6	10	12	4	2	8,6
2	3	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0,4
2	4	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,3
2	5	2	2	1	1	3	1	2	0	0	0	1,2
2	6	17	15	11	16	6	8	15	6	7	2	10,3
3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	5	2	2	3	2	1	1	1	0	0	1,7
3	6	18	14	9	7	4	7	8	6	7	7	8,7
4	5	5	6	2	1	0	0	2	0	0	0	1,6
4	6	12	11	14	17	10	8	7	5	3	3	9
5	6	10	13	15	18	8	10	11	7	6	3	10,1
Середня частота, %		6,73	6	5,73	5,93	3,27	3,2	4,73	3,07	2	1,13	4,2



Графік 1. Відсоток реверсів в залежності від ФП



Графік 2. Відсоток реверсів в залежності від рівня  $\alpha$

## **Висновки**

В роботі виконано оцінювання реверсу рангів альтернатив в методі MMAI при зміні параметрів функцій принадлежності (ФП) при обчисленні локальних ваг за допомогою модифікованого методу аналізу ієархій обробки нечіткої експертної інформації. Досліджено трикутні ФП з різними параметрами [6–12].

Результати моделювання, проведеного для випадковим чином заповнених матриць парних порівнянь, свідчать про те, що при зміні параметрів досліджуваних ФП зміна найкращої альтернативи мала місце в середньому в 2,1% випадків, а зміна рангів інших альтернатив – в 2,9% випадків, якщо всі порівнювані альтернативи різні. Якщо ж серед них присутня хоча б одна пара альтернатив-копій, тобто відповідна лінгвістична оцінка парних порівнянь дорівнює «рівна важливість», то відсоток зміни ранжування є вищим і дорівнює в середньому 3,1% для зміни найкращої альтернативи і 4,2% для зміни рангів інших альтернатив. Встановлено, що реверс рангів при зміні параметрів досліджуваних ФП виникає у випадку сильно неузгоджених оцінок експертів.

Реверси рангів при використанні ФП №2, №3 і №4, так само як і ФП №1 та №5, є найменшими, оскільки відповідні шкали мають подібну структуру і відмінності лише у визначенні нечітких чисел рівної важливості та абсолютної переваги.

При збільшенні рівня  $\alpha$  кількість реверсів в середньому скорочується.

## **Список літератури**

1. Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Часть 1 // Проблемы управления и информатики. – 2007. - №2 - С. 40 – 55.
2. Laininen P., Hämäläinen R.P. Analyzing AHP-matrices by regression // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.148, №3. – P.514 – 524.
3. Hahn E.D. Decision making with uncertain judgments: a stochastic formulation of the analytic hierarchy process // Decision Sciences. – 2003. – Vol.34, №3. – P.443 – 466.
4. Hahn E.D. Link function selection in stochastic multicriteria decision making models // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol.172, №1. – P.86 – 100.
5. Lipovetsky S., Conklin W.M. Robust estimation of priorities in the AHP // European Journal of Operational Research. – 2002. – Vol. 137, №1. – P.110 – 122.

6. Tien-Chin Wang, Yueh-Hsiang Chen. Applying fuzzy linguistic preference relations to the improvement of consistency of fuzzy AHP // Information Sciences. – 2008. – Vol. 178 – P.3755–3765.
7. Jiann Liang Yang, Huan Neng Chiu, Gwo-Hshiung Tzeng, Ruey Huei Yeh. Vendor selection by integrated fuzzy MCDM techniques with independent and interdependent relationships // Information Sciences. – 2008. – Vol. 178 – P. 4166–4183.
8. Amy H.I. Lee, Wen-Chin Chen, Ching-Jan Chang. A fuzzy AHP and BSC approach for evaluating performance of IT department in the manufacturing industry in Taiwan// Expert Systems with Applications. – 2008. – Vol. 34 – P. 96–107.
9. Muh-Cherng Wu, Ying-Fu Lo, Shang-Hwa Hsu. A fuzzy CBR technique for generating product ideas// Expert Systems with Applications. – 2008. – Vol. 34 – P.530–540.
10. Amy H.I. Lee. A fuzzy supplier selection model with the consideration of benefits, opportunities, costs and risks // Expert Systems with Applications. – 2009. – Vol. 36 – P.2879–2893.
11. Victor B. Kreng, Chao-Yi Wu. Evaluation of knowledge portal development tools using a fuzzy AHP approach: The case of Taiwanese stone industry // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 176. 1795–1810.
12. Osman Kulak, Cengiz Kahraman. Fuzzy multi-attribute selection among transportation companies using axiomatic design and analytic hierarchy process // Information Sciences. – 2005. – Vol. 170 – P.191–210.
13. Saaty T.L. Theory of the Analytic Hierarchy Process, Part 2.1. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. - №1. – С.48 – 72.
14. Saaty, T.L. Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy/network processes// European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol.168(2). –P. 557 – 570.