

Построение коциклов для двойного скрещенного произведения групп Ли

А. А. Калюжный, Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский

Аннотация

Для пары согласованных групп Ли получена формула для нахождения пар коциклов, используемых для построения примеров локально компактных квантовых групп.

Введение

Конструкция двойного скрещенного произведения групп с коциклами была введена Г. И. Кацем в [1] для построения примеров конечных кольцевых групп, сейчас известных как конечных алгебр Каца. Затем эта конструкция была обобщена для построения примеров локально компактных квантовых групп в [2], алгебр Хопфа в [3]. Аналогичная конструкция применима к биалгебрам Ли, например, см. [3].

Данная конструкция позволяет построить две не коммутативные алгебры фон Неймана, находящиеся в двойственности, путем рассмотрения пары согласованных групп, действующих друг на друге как на множествах, и пары функций, называемых коциклами и удовлетворяющих некоторым соотношениям (см. определения 1, 2). Группа классов эквивалентности пар коциклов описана для конечных групп в [1] и для локально компактных групп в [4], см. также [5]. Целью настоящей статьи является получение формулы для нахождения пары коциклов в явном виде в случае когда группы являются группами Ли, используя пару коциклов на соответствующей паре согласованных алгебр Ли.

1 Обозначения и определения

Всюду далее, если не оговорено иное, G, H, K — связные группы Ли, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ — соответствующие алгебры Ли. Элементы групп G, H, K обозначаются $g, g_1, \dots, h, h_1, \dots$ и k, k_1, \dots , соответственно. Определение коциклов на группе и алгебре Ли см. в [6].

Определение 1. Пара (G, H) называется парой согласованных групп Ли, если существуют дифференцируемые отображения $\triangleleft : H \times G \rightarrow H$ и $\triangleleft : H \times G \rightarrow G$, являющиеся правым действием группы G на H и левым действием H на G , соответственно, и удовлетворяющие соотношениям:

$$(h_1 h_2) \triangleleft g = (h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g))(h_2 \triangleleft g), \quad (1)$$

$$h \triangleright (g_1 g_2) = (h \triangleright g_1)((h \triangleleft g_1) \triangleright g_2). \quad (2)$$

Пусть $K = G \times H$ с умножением

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot (h_1 \triangleright g_2), (h_1 \triangleleft g_2) \cdot h_2).$$

Известно [1], что если G и H — конечные группы, то K — также группа. Очевидно, что если G, H — группы Ли, то K — также группа Ли. Далее, группу K обозначим $G \cdot H$, а элемент $(g, h) \in K$ обозначим $g \cdot h$ или gh .

Определение 2. Пусть (G, H) — пара согласованных групп Ли, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Пара дифференцируемых функций (u, v) , $u : H \times G \times G \rightarrow \mathbb{T}$, $v : H \times H \times G \rightarrow \mathbb{T}$ называется парой коциклов на (G, H) , если

$$u(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4)u(h_1, g_2, g_3g_4) = u(h_1, g_2, g_3)u(h, g_2g_3, g_3), \quad (3)$$

$$v(h_1, h_2, h_3 \triangleright g_4)v(h_1h_2, h_3, g_4) = v(h_1, h_2h_3, g_4)v(h_2, h_3, g_4), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v(h_1, h_2, g_3g_4)u(h_1h_2, g_2, g_3) &= v(h_1, h_2, g_3)u(h_2, g_3, g_4) \\ &\cdot v(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4) \\ &\cdot u(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4). \end{aligned} \quad (5)$$

В последующем рассматриваются только нормализованные пары коциклов, т.е. удовлетворяющие также условию $u(h_1, g_2, g_3) = 1$, $v(h_1, h_2, g_3) = 1$, если по крайней мере один из элементов h_i, g_j совпадает с единицей соответствующей группы.

Две пары коциклов (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на согласованной паре (G, H) называются эквивалентными, если существует дифференцируемая функция $r : H \times G \rightarrow \mathbb{T}$ такая, что

$$\begin{aligned} u_1(h_1, g_2, g_3)u_2(h_1, g_2, g_3)^{-1} &= r(h_1, g_2)r(h_1 \triangleleft g_2, g_3)r(h_1, g_2g_3)^{-1}, \\ v_1(h_1, h_2, g_3)v_2(h_1, h_2, g_3)^{-1} &= r(h_1h_2, g_3)r(h_1, h_2 \triangleright g_3)^{-1}r(h_2, g_3)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Множество классов эквивалентности $[u, v]$ пар коциклов на согласованной паре (G, H) образуют абелеву группу относительно поточечного умножения [1]. Т.е., $[u_1, v_1] \cdot [u_2, v_2] = [u_1u_2, v_1v_2]$. Эту группу далее обозначим через $E(G, H)$.

Пусть (G, H) — пара согласованных групп Ли, и $K = G \cdot H$. Для пары (u, v) функций $u : H \times G \times G \rightarrow \mathbb{T}$ и $v : H \times H \times G \rightarrow \mathbb{T}$, следуя [5], рассмотрим функцию $f_{u,v} : K \times K \times K \rightarrow \mathbb{T}$, определенную

$$f_{u,v}(k_1, k_2, k_3) = u(h_1, g_2, h_2 \triangleright g_3)v(h_1 \triangleleft g_2, h_2, g_3),$$

где $k_i = g_i h_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда, как следует из [5], пара (u, v) удовлетворяет (3), (4) и (5) тогда и только тогда, когда $f_{u,v}$ является неоднородным 3-коциклом на группе K , равным 1, если один из элементов k_1, k_2, k_3 равен e_K . Кроме того, пары (u_1, v_1) и (u_2, v_2) удовлетворяют (6) тогда и только тогда, когда существует дифференцируемая функция $r : K \times K \rightarrow \mathbb{T}$ такая, что $r(k_1, k_2) = r(h_1, g_2)$ для всех $k_i = g_i h_i \in K$, $i = 1, 2$, и $f_{u_1, v_1} f_{u_2, v_2}^{-1} = dr$, где d — дифференциал на комплексе нормализованных неоднородных коциклов на K [5].

Используя [3], определим пару согласованных алгебр Ли следующим образом.

Определение 3. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ алгебр Ли называется парой согласованных алгебр Ли, если существует алгебра Ли \mathfrak{k} такая, что \mathfrak{g} и \mathfrak{h} — подалгебры Ли \mathfrak{k} , $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

Определение 4. Пара линейных функционалов (U, V) , где $U: \mathfrak{h} \otimes (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$ и $V: (\mathfrak{h} \wedge \mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ называется парой коциклов на согласованной паре алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, если линейный функционал $F_{U,V}: \mathfrak{k} \wedge \mathfrak{k} \wedge \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$, определенный как

$$F_{U,V}(A_1 + X_1, A_2 + X_2, A_3 + X_3) = U(X_1; A_2, A_3) + U(X_2; A_3, A_1) + U(X_3; A_1, A_2) + V(X_1, X_2; A_3) + V(X_2, X_3; A_1) + V(X_3, X_1; A_2), \quad (7)$$

$A_i \in \mathfrak{g}$, $X_i \in \mathfrak{h}$, $i = 1, 2, 3$, является 3-коциклом на алгебре Ли \mathfrak{k} . Две пары коциклов (U_1, V_1) и (U_2, V_2) называются эквивалентными, если существует линейный функционал $R: \mathfrak{k} \wedge \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$F_{U_1, V_1} - F_{U_2, V_2} = dR,$$

где $F_{U,V}$ определяется формулой (7), и $R(A_1, A_2) = R(X_1, X_2) = 0$ для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$. Здесь d — дифференцирование в комплексе полилинейных антисимметричных форм на \mathfrak{k} [6].

Это определение следует из [3] и [7].

Как и для пары согласованных групп, множество классов эквивалентности пар $[U, V]$ коциклов на согласованной паре алгебр Ли образуют абелеву группу, $[U_1, V_1] + [U_2, V_2] = [U_1 + U_2, V_1 + V_2]$. Эту группу обозначим $E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

2 Действие на K и инвариантные векторные поля

Пусть (G, H) — пара согласованных групп Ли, \mathfrak{g} и \mathfrak{h} — алгебры Ли групп Ли G и H , соответственно, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — соответствующая пара согласованных алгебр Ли, $K = G \cdot H$ и $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} + \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

Лемма 1. Для $k_0 = g_0 h_0 \in K$ рассмотрим отображение $\lambda_{k_0}: K \rightarrow K$ посредством $\lambda_{g_0 h_0} = \lambda_{g_0} \lambda_{h_0}$, где $\lambda_{g_0}: K \rightarrow K$ и $\lambda_{h_0}: K \rightarrow K$ задаются на $k = gh$ формулами

$$\lambda_{g_0}(k) = (g_0 g) \cdot (h \triangleleft g_0^{-1}), \quad \lambda_{h_0}(k) = (h_0 \triangleright g) \cdot (h h_0^{-1}). \quad (8)$$

Тогда $\lambda: K \times K \rightarrow K$ — левое действие K на себе и

$$k = gh = \lambda_{g(h \triangleleft g)^{-1}}(e_K). \quad (9)$$

Замечание. Действие аналогичное (8) было введено в [1].

Доказательство леммы 1. Формула (9) очевидна. То, что λ определяет левое действие G и H на K , следует непосредственно из (8) и того, что \triangleright и \triangleleft есть левое и правое действие, соответственно.

Осталось показать, что $\lambda_h \lambda_g = \lambda_{h \triangleright g} \lambda_{h \triangleleft g}$.

Применяя (1) к $(e_H e_H) \triangleleft g$ и (2) к $h \triangleright (e_G e_G)$, получаем, что $e_H \triangleleft g = e_H$ и $h \triangleright e_G = e_G$ для всех $g \in G, h \in H$. Рассматривая $e_H = (h_0^{-1} h_0) \triangleleft g_0$ и $e_G = h_0 \triangleright (g_0 g_0^{-1})$, имеем

$$(h_0 \triangleleft g_0)^{-1} = h_0^{-1} \triangleleft (h_0 \triangleright g_0), \quad (h_0 \triangleright g_0)^{-1} = (h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g_0^{-1}. \quad (10)$$

Теперь

$$\lambda_{h_0} \lambda_{g_0}(gh) = (h_0 \triangleright (g_0 g)) \cdot (h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \lambda_{h_0 \triangleright g_0} \lambda_{h_0 \triangleleft g_0}(gh) &= \lambda_{h_0 \triangleright g_0}(((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g) \cdot (h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1})) \\ &= (h_0 \triangleright g_0)((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g) \cdot (h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}) \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Однако, $(h_0 \triangleright g_0)((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g) = h_0 \triangleright (g_0 g)$ а, используя (10), имеем

$$\begin{aligned} (h(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}) \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1} &= (h \triangleleft ((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright (h_0 \triangleright g_0)^{-1})) \cdot \\ &\quad \cdot ((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}) = \\ &= (h \triangleleft ((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright ((h_0 \triangleleft g_0) \triangleright g_0^{-1}))) \cdot \\ &\quad \cdot ((h_0^{-1} \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)) \triangleleft (h_0 \triangleright g_0^{-1})) = \\ &= (h \triangleleft g_0^{-1}) h_0^{-1}. \end{aligned}$$

□

Векторное поле $\eta: K \rightarrow T(K)$, $\eta_k \in T_k(K)$, на K назовем λ -инвариантным, если $\eta_{\lambda_{k_0}(k)} = (D\lambda_{k_0})_k \eta_k$ для всех $k, k_0 \in K$, где $T(K)$ — касательное расслоение K а $(D\lambda_{k_0})_k: T_k(K) \rightarrow T_{\lambda_{k_0}(k)}(K)$ — отображение касательное к λ_{k_0} . Легко видеть, что λ -инвариантные векторные поля на K образуют алгебру Ли, которую обозначим через \mathfrak{k} .

Лемма 2. Пусть \mathfrak{k} — алгебра Ли группы Ли K . отождествим \mathfrak{k} с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей ξ на K и пусть $\tilde{\mathfrak{k}}$ — алгебра Ли λ -инвариантных векторных полей η на K . Пусть $\pi_G: K \rightarrow G$ и $\pi_H: K \rightarrow H$ — проекции $(g, h) \mapsto g$ и $(g, h) \mapsto h$, соответственно. Тогда отображение $\tau: \mathfrak{k} \rightarrow \tilde{\mathfrak{k}}$, определенное формулой

$$(\tau(\xi))_k = (D\lambda_{g_0(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}})_{e_K} \circ (D\pi_G)_{e_K} \xi_{e_K} - (D\lambda_{g_0(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}})_{e_K} \circ (D\pi_H)_{e_K} \xi_{e_K}, \quad (11)$$

является изоморфизмом алгебр Ли \mathfrak{k} и $\tilde{\mathfrak{k}}$.

Доказательство. Пусть $x_G = (x_G^1, \dots, x_G^m)$, $m = \dim G$, и $x_H = (x_H^1, \dots, x_H^n)$, $n = \dim H$, — системы координат на G и H в окрестностях единиц соответствующих групп, и $x_K = (x_H^1, \dots, x_G^m, x_H^1, \dots, x_H^n)$ — система координат на K в окрестности e_K . Для $k_0 = g_0 h_0$ оператор левого сдвига на K будет $L_{k_0}(gh) = g_0(h_0 \triangleright g) \cdot (h_0 \triangleleft g)h$ и, следовательно,

$$(DL_{k_0})_{e_K} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial x_G(g_0(h_0 \triangleright g))}{\partial x_G(g)} & 0 \\ \frac{\partial x_H(h_0 \triangleleft g)}{\partial x_G(g)} & \frac{\partial x_H(h_0 h)}{\partial x_H(h)} \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{g=e_G \\ h=e_H}}.$$

Рассмотрим левоинвариантные поля $(\xi_i)_{k_0} = (DL_{k_0})_{e_K} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^i} \right)_{e_K}$ и $(\xi_j)_{k_0} = (DL_{k_0})_{e_K} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^j} \right)_{e_K}$, т.е.

$$\begin{aligned} (\xi_i)_{k_0} &= \frac{\partial x_G^r(g_0(h_0 \triangleright g))}{\partial x_G^i(g)} \Big|_{g=e_G} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^r} \right)_{g_0} + \frac{\partial x_H^s(h_0 \triangleleft g)}{\partial x_G^i(g)} \Big|_{g=e_G} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s} \right)_{h_0}, \\ (\xi_j)_{k_0} &= \frac{\partial x_H^s(h_0 h)}{\partial x_H^j(h)} \Big|_{h=e_H} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s} \right)_{h_0}. \end{aligned}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование. Тогда непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} ([\xi_{i_1}, \xi_{i_2}]_{e_K}) &= \left(\frac{\partial^2 x_G^r(g_0 g)}{\partial x_G^{i_1}(g_0) \partial x_G^{i_2}(g)} - \frac{\partial^2 x_G^r(g_0 g)}{\partial x_G^{i_2}(g_0) \partial x_G^{i_1}(g)} \right) \Big|_{\substack{g=e_G \\ g_0=e_G}} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^r} \right)_{e_G}, \\ ([\xi_i, \xi_j]_{e_K}) &= - \left(\frac{\partial^2 x_G^r(h_0 \triangleright g)}{\partial x_H^j(h_0) \partial x_G^i(g)} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^r} \right)_{e_G} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 x_H^s(h_0 \triangleleft g)}{\partial x_H^j(h_0) \partial x_G^i(g)} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s} \right)_{e_H} \right) \Big|_{\substack{g=e_G \\ h_0=e_H}}, \\ ([\xi_{j_1}, \xi_{j_2}]_{e_K}) &= \left(\frac{\partial^2 x_H^s(h_0 h)}{\partial x_H^{j_1}(h_0) \partial x_H^{j_2}(h)} - \frac{\partial^2 x_H^s(h_0 h)}{\partial x_H^{j_2}(h_0) \partial x_H^{j_1}(h)} \right) \Big|_{\substack{h=e_H \\ h_0=e_H}} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s} \right)_{e_H}. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя (10), запишем $\lambda_{g_0(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}}(gh) = g_0((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright g) \cdot (h \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}) h_0$. Следовательно,

$$(D\lambda_{g_0(h_0 \triangleleft g_0)^{-1}})_{e_K} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial x_G(g_0((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright g))}{\partial x_G(g)} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x_H((h \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}) h_0)}{\partial x_H(h)} \end{array} \right) \Big|_{\substack{g=e_G \\ h=e_H}}$$

Пусть $\eta_i = \tau(\xi_i)$ и $\eta_j = \tau(\xi_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\eta_i)_{k_0} &= \frac{\partial x_G^r(g_0((h_0 \triangleleft g_0)^{-1} \triangleright g))}{\partial x_G^i(g)} \Big|_{g=e_G} \left(\frac{\partial}{\partial x_G^r} \right)_{g_0} \\ (\eta_j)_{k_0} &= - \frac{\partial x_H^s((h \triangleleft (h_0 \triangleright g_0)^{-1}) h_0)}{\partial x_H^j(h)} \Big|_{h=e_H} \left(\frac{\partial}{\partial x_H^s} \right)_{h_0} \end{aligned}$$

Доказательство завершает непосредственное вычисление значения коммутаторов в $k_0 = e_K$ и сравнение с формулами (12). \square

3 Построение гомоморфизма из $E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в $E(G, H)$

Обозначим $I = [0, 1]$. Пусть отображения $\gamma_G: I \times G \rightarrow G$ и $\gamma_H: I \times H \rightarrow H$,

$$(u, g) \mapsto \gamma_G^u(g), \quad (u, h) \mapsto \gamma_H^u(h), \quad u \in I,$$

дифференцируемы и

$$\begin{aligned}\gamma_G^1(g) &= g, & \gamma_G^0(g) &= e_G, \\ \gamma_H^1(h) &= h, & \gamma_H^0(h) &= e_H\end{aligned}\quad (13)$$

для всех $g \in G$, $h \in H$.

Пусть

$$\begin{aligned}\Delta^1 &= \{t_1 \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t_1 \leq 1\}, \\ \Delta^2 &= \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1, t_2 \geq 0; t_1 + t_2 \leq 1\}\end{aligned}$$

— стандартные 1- и 2-симплексы. Обозначим $\Delta^{2,1} = \Delta^1 \times \Delta^2$ и $\Delta^{1,2} = \Delta^2 \times \Delta^1$. Будем рассматривать $\Delta^{2,1} \subset \mathbb{R}^3$ и $\Delta^{1,2} \subset \mathbb{R}^3$ с координатными функциями, являющимися ограничениями канонических координат (t_1, t_2, t_3) в \mathbb{R}^3 , и ориентацией, индуцированной базисом $(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial t_3})$. Аналогично [6] рассмотрим функции $s_1: \Delta^1 \rightarrow I$ и $s_2: \Delta^2 \rightarrow I$, заданные посредством

$$s_1(t_1) = 1 - t_1, \quad s_2(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1-t_1-t_2}{1-t_1}, & 1 - t_1 \neq 0, \\ 0, & 1 - t_1 = 0. \end{cases}\quad (14)$$

Для фиксированных $g_1, g_2 \in G$ и $h_1, h_2 \in H$ определим отображения $\Delta_G^1(g_1): \Delta^1 \rightarrow G$, $\Delta_G^2(g_1, g_2): \Delta_G^2 \rightarrow G$ и $\Delta_H^1(h_1): \Delta^1 \rightarrow H$, $\Delta_H^2(h_1, h_2): \Delta^2 \rightarrow H$ следующими формулами:

$$\begin{aligned}\Delta_G^1(g_1)(t_1) &= \gamma_G^{s_1(t_1)}(g_1), & \Delta_G^2(g_1, g_2)(t_1, t_2) &= \gamma_G^{s_1(t_1)}(g_1 \gamma_G^{s_2(t_1, t_2)}(g_2)), \\ \Delta_H^1(h_1)(t_1) &= \gamma_H^{s_1(t_1)}(h_1), & \Delta_H^2(h_1, h_2)(t_1, t_2) &= \gamma_H^{s_1(t_1)}(\gamma_H^{s_2(t_1, t_2)}(h_1) h_2).\end{aligned}\quad (15)$$

Наконец, для каждой из троек $(h_1, g_2, g_3) \in H \times G \times G$ и $(h_1, h_2, g_3) \in H \times H \times G$ определим отображения $\sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3): \Delta^{2,1} \rightarrow K$ и $\sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3): \Delta^{1,2} \rightarrow K$ как

$$\begin{aligned}\sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3)(t_1, t_2, t_3) &= \Delta_G^2(g_2, g_3)(t_2, t_3) \cdot \Delta_H^1(h_1)(t_1), \\ \sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3)(t_1, t_2, t_3) &= \Delta_G^1(g_3)(t_3) \cdot \Delta_H^2(h_1, h_2)(t_1, t_2),\end{aligned}\quad (16)$$

и обозначим через $c^{2,1}(h_1, g_2, g_3) = (\Delta^{2,1}, \sigma^{2,1}(h_1, g_2, g_3))$ и $c^{1,2}(h_1, h_2, g_3) = (\Delta^{1,2}, \sigma^{1,2}(h_1, h_2, g_3))$ соответствующие цепи в K .

Теорема. Пусть (G, H) — пара согласованных связных групп Ли, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — пара соответствующих алгебр Ли. Пусть γ_G и γ_H удовлетворяют (13) и такие, что

$$h \triangleright \gamma_G^u(g) = \gamma_G^u(h \triangleright g), \quad \gamma_H^u(h) \triangleleft g = \gamma_H^u(h \triangleleft g)\quad (17)$$

для всех $g \in G$, $h \in H$ и $u \in [0, 1]$. Рассмотрим $(D\gamma_G^u)_g: T_g(G) \rightarrow T_{\gamma_G^u(g)}(G)$ и $(D\gamma_H^u)_h: T_h(H) \rightarrow T_{\gamma_H^u(h)}(H)$. Предположим, что $(D\gamma_G^u)_g \rightarrow 0$ и $(D\gamma_H^u)_h \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$. Для пары коциклов (U, V) , $[U, V] \in E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, зададим λ -инвариантную дифференциальную 3-форму на K как

$$\omega_{U, V} = (\tau^{-1})^*(F_{U, V}),\quad (18)$$

где $F_{U,V}$ определено в (7) а τ в (11), и функции $\tilde{u} : G \times G \times H \rightarrow \mathbb{R}$ и $\tilde{v} : H \times H \times G \rightarrow \mathbb{R}$ посредством несобственных интегралов

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \int_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_{U,V}, \quad \tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = \int_{c^{1,2}(h_1, h_2, g_3)} \omega_{U,V}. \quad (19)$$

Тогда интегралы в (19) сходятся, а отображение $\text{Int} : E(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rightarrow E(G, H)$, заданное посредством

$$\text{Int}([U, V]) = [e^{i\tilde{u}}, e^{i\tilde{v}}],$$

корректно определено и является гомоморфизмом групп.

Для доказательства теоремы рассмотрим стандартный 3-симплекс

$$\Delta^3 = \{(t_1, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0; t_1 + t_2 + t_3 \leq 1\},$$

и функцию $s_3 : \Delta^3 \rightarrow I$, заданную посредством

$$s_3(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \frac{1-t_1-t_2-t_3}{1-t_1-t_2}, & 1-t_1-t_2 \neq 0, \\ 0, & 1-t_1-t_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Для $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq i, j \leq 3$, $i+j > 0$, обозначим

$$\Delta^{i,j} = \begin{cases} \Delta^j \times \Delta^i, & i \neq 0, j \neq 0, \\ \Delta^j, & i = 0, j \neq 0, \\ \Delta^i, & i \neq 0, j = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Для фиксированных $g_1, \dots, g_i \in G$ и $h_1, \dots, h_j \in H$, $1 \leq i, j \leq 3$, рассмотрим отображения $\Delta_G^i(g_1, \dots, g_i) : \Delta^i \rightarrow G$ и $\Delta_H^j(h_1, \dots, h_j) : \Delta^j \rightarrow H$, заданные формулами

$$\begin{aligned} \Delta_G^i(g_1, \dots, g_i)(t_1, \dots, t_i) &= \gamma_G^{s_1(t_1)}(g_1 \gamma_G^{s_2(t_1, t_2)}(\dots \gamma_G^{s_i(t_1, \dots, t_i)}(g_i) \dots)), \\ \Delta_H^j(h_1, \dots, h_j)(t_1, \dots, t_j) &= \gamma_H^{s_1(t_1)}(\dots (\gamma_H^{s_j(t_1, \dots, t_j)}(h_j) \dots) h_j), \\ \Delta_G^0 &= e_G, & \Delta_H^0 &= e_H. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь s_1, s_2 заданы формулой (14), а s_3 формулой (20). Для $i, j \geq 0$, $0 < i+j \leq 4$, определим $\sigma^{i,j}(h_1, \dots, h_j, g_{j+1}, \dots, g_{j+i}) : \Delta^{i,j} \rightarrow K$ как

$$\begin{aligned} \sigma^{i,j}(h_1, \dots, h_j, g_{j+1}, \dots, g_{j+i})(t_1, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+i}) &= \\ = \Delta_G^i(g_{j+1}, \dots, g_{j+i})(t_{j+1}, \dots, t_{j+i}) \cdot \Delta_H^j(h_1, \dots, h_j)(t_1, \dots, t_j). \end{aligned} \quad (23)$$

Многообразия $\Delta^{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 3$, $0 < i+j \leq 4$, рассматриваются в \mathbb{R}^{j+i} с координатными функциями $(t_1, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+i})$ и ориентацией, определяемой базисом $(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_j}, \frac{\partial}{\partial t_{j+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_{j+i}})$. Обозначим через $c^{i,j}(h_1, \dots, h_j, g_{j+1}, \dots, g_{j+i}) = (\Delta^{i,j}, \sigma^{i,j}(h_1, \dots, h_j, g_{j+1}, \dots, g_{j+i}))$ соответствующие цепи в K .

Следующая лемма носит вспомогательный характер.

Лемма 3. Для $i, j \geq 0, 0 < i+j \leq 4$, рассмотрим отображения $\theta^{i,j} : \Delta^{i,j} \rightarrow I^{j+i}$, заданные

$$\begin{aligned} \theta^{i,j}(t_1, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+i}) &= \\ &= (s_1(t_{j+1}), \dots, s_i(t_{j+1}, \dots, t_{j+i}), s_1(t_1), \dots, s_j(t_1, \dots, t_j)), \end{aligned}$$

если $i, j > 0$, и для $i \leq 3$ и $j \leq 3$

$$\begin{aligned} \theta^{i,0}(t_1, \dots, t_i) &= (s_1(t_1), \dots, s_i(t_1, \dots, t_i)), \\ \theta^{0,j}(t_1, \dots, t_j) &= (s_1(t_1), \dots, s_j(t_1, \dots, t_j)). \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначим через $c_\theta^{i,j} = (\Delta^{i,j}, \theta^{i,j})$ соответствующие цепи в I^{j+i} . Пусть $y = (y_1, \dots, y_{i+j})$ — канонические координаты на I^{j+i} и

$$\alpha^{i,j} = \sum_{k=1}^{i+j} \alpha_k^{i,j}(y_1, \dots, y_{i+j}) dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy_k} \wedge \dots \wedge dy_{i+j}$$

— дифференциальная $(i+j-1)$ -форма на I^{j+i} . Пусть форма α удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} \text{если } i > 1, \text{ то } \lim_{y_{i-1} \rightarrow 0} \alpha_k^{i,j}(y_1, \dots, y_{i+j}) &= 0 \quad \text{для } k \neq i, \\ \text{если } j > 1, \text{ то } \lim_{y_{i+j-1} \rightarrow 0} \alpha_k^{i,j}(y_1, \dots, y_{i+j}) &= 0 \quad \text{для } k \neq i+j. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда имеет место формула Стокса,

$$\int_{c_\theta^{i,j}} d\alpha = \int_{\partial c_\theta^{i,j}} \alpha, \quad (26)$$

где $\partial c_\theta^{i,j}$ — ориентированная граница цепи $c_\theta^{i,j}$, а несобственные интегралы, стоящие в левой и правой частях формулы, сходятся.

Доказательство. Если $i > 1$ или $j > 1$, то как следует из определения $\theta^{i,j}$ в (24) и функций s_k в (14) и (20), интегралы в (26) являются несобственными. Поэтому для $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, обозначим

$$\Delta_\epsilon^i = \{(t_1, \dots, t_i) \in \Delta_i \mid t_1 + \dots + t_{i-1} \leq 1 - \epsilon\},$$

$\Delta_\epsilon^{i,j} = \Delta_\epsilon^j \times \Delta_\epsilon^i$ и $c_\theta^{i,j}(\epsilon) = (\Delta_\epsilon^{i,j}, \theta^{i,j}|_{\Delta_\epsilon^{i,j}})$. Тогда, по формуле Стокса

$$\int_{c_\theta^{i,j}(\epsilon)} d\alpha = \int_{\partial c_\theta^{i,j}(\epsilon)} \alpha,$$

причем непосредственная проверка показывает, что все интегралы сходятся при $\epsilon \rightarrow 0$, даже если не накладывать условия (25). Однако, для того, чтобы имела место формула Стокса (26), т.е. чтобы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_{j,\epsilon} c_\theta^{i,j}(\epsilon)} \alpha = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_{\epsilon,i} c_\theta^{i,j}(\epsilon)} \alpha = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \partial_{j,\epsilon} \Delta_\epsilon^{i,j} &= \Delta_\epsilon^j \times \partial_\epsilon \Delta_\epsilon^i, & \partial_{\epsilon,i} \Delta_\epsilon^{i,j} &= \partial_\epsilon \Delta_\epsilon^j \times \Delta_\epsilon^i, \\ \partial_\epsilon \Delta_\epsilon^i &= \{(t_1, \dots, t_i) \in \Delta_\epsilon^i \mid t_1 + \dots + t_{i-1} = 1 - \epsilon\}, \end{aligned}$$

а $\partial_{j,\epsilon} c_\theta^{i,j}(\epsilon)$ и $\partial_{\epsilon,i} c_\theta^{i,j}(\epsilon)$ — соответствующие цепи, достаточно выполнения условий (25). Это доказывается непосредственной проверкой. \square

Запишем отображения (23) в виде $\sigma^{i,j} = \varrho^{i,j} \circ \theta^{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 3$, $0 < i + j \leq 4$, где для $h_1, \dots, h_j \in H$, $g_{j+1}, \dots, g_{j+i} \in G$ отображения $\varrho^{i,j}(h_1, \dots, h_j, g_{j+1}, \dots, g_{j+i}): I^{j+i} \rightarrow K$ определены формулой

$$\begin{aligned} \varrho^{i,j}(h_1, \dots, h_j, g_{j+1}, \dots, g_{j+i})(y_1, \dots, y_{j+i}) &= \\ &= \gamma_G^{y_{j+1}}(g_{j+1} \gamma_G^{y_{j+2}}(\dots \gamma_G^{y_{j+i}}(g_{j+i}) \dots)) \cdot \gamma_H^{y_1}(\gamma_H^{y_2}(\dots \gamma_H^{y_j}(h_1) h_2) \dots h_j), \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда имеем, что $\sigma^{i,j} = \varrho^{ij} \circ \theta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$, $i + j = 4$.

Лемма 4. Пусть $(D\gamma_G^u)_g \rightarrow 0$ и $(D\gamma_H^u)_h \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$, и пусть $\sigma^{i,j}$, $\varrho^{i,j}$ и $\Delta^{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 3$, $0 < i + j \leq 4$, определены формулами (23), (27) и (21), а ω — дифференциальная $(i + j - 1)$ -форма на K . Тогда $(i + j - 1)$ -форма $\alpha = (\varrho^{i,j})^*(\omega)$ на I^{j+i} удовлетворяет условию (25).

Доказательство. Рассмотрим частный случай $\sigma^{3,1}$.

Пусть $x^G = (x_p^G)$, $p = 1, \dots, \dim G$, — координаты на G в окрестности $\Delta^3(g_2, g_3, g_4)(\Delta^3)$ и $x^H = (x_q^H)$, $q = 1, \dots, \dim H$, — система координат на H в окрестности $\Delta_H^1(h_1)(\Delta^1)$. Для $k = \varrho^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)$ рассмотрим

$$(D(\varrho^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4))^*)_k: T_k^*(K) \rightarrow T_{(y_1, y_2, y_3, y_4)}^*(I^4).$$

Используя (15), имеем

$$\begin{aligned} D(\varrho^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4))^*(dx_p^G) &= \frac{\partial x_p^G(\gamma_G^{y_2}(g_2 \gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4))))}{\partial y^2} dy_2 + \\ &+ \frac{\partial x_p^G(\gamma_G^{y_2}(g_2 \gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4))))}{\partial x_{r_1}^G(g_2 \gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4)))} \cdot \frac{\partial x_{r_1}^G(g_2 \gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4)))}{\partial x_{r_2}^G(\gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4)))} \times \\ &\times \left(\frac{\partial x_{r_2}^G(\gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4)))}{\partial y_3} dy_3 + \frac{x_{r_2}^G(\gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4)))}{\partial x_{r_3}^G(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4))} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial x_{r_3}^G(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4))}{\partial x_{r_4}^G(\gamma_G^{y_4}(g_4))} \cdot \frac{\partial x_{r_4}^G(\gamma_G^{y_4}(g_4))}{\partial y_4} dy_4 \right), \\ D(\varrho^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4))^*(dx_q^H) &= \frac{\partial x_q^H(\gamma_H^{y_1}(h_1))}{\partial y_1} dy_1. \end{aligned}$$

В силу условия леммы,

$$\frac{\partial x_p^G(\gamma_G^{y_2}(g_2 \gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4))))}{\partial x_{r_1}^G(g_2 \gamma_G^{y_3}(g_3 \gamma_G^{y_4}(g_4)))} \rightarrow 0 \quad \text{при } y_2 \rightarrow 0, \quad (28)$$

для всех p и r_1 . Это показывает, что $\alpha_k \rightarrow 0$ для всех $k \neq 4$ при $y_2 \rightarrow 0$. Это доказывает утверждение для $\varrho^{3,1}$.

В остальных случаях рассуждения аналогичны. \square

Доказательство теоремы. Прежде всего отметим, что λ -инвариантная дифференциальная 3-форма $\omega_{U,V}$, определенная формулой (18), является точной, поскольку $F_{U,V}$ является коциклом на алгебре Ли \mathfrak{k} и τ — изоморфизм \mathfrak{k} в $\tilde{\mathfrak{k}}$.

Докажем, что функция \tilde{u} , задаваемая (19), удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4) + \tilde{u}(h_1, g_2, g_3 g_4) = \tilde{u}(h_1, g_2, g_3) + \tilde{u}(h, g_2 g_3, g_3), \quad (29)$$

где $h_1 \in H$, $g_2, g_3, g_4 \in G$. Рассмотрим $c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)$ (см. (23)). Поскольку $d\omega_{U,V} = 0$, имеем

$$\int_{c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)} d\omega_{U,V} = 0.$$

Из условия теоремы, лемм 4 и 3, используя формулу Стокса, имеем

$$\int_{\partial c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} = 0. \quad (30)$$

Рассмотрим $\partial c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)$. Из определений отображений Δ_G^i, Δ_H^j (см. (22)), функций s_i (см. (14) и (20)) с использованием свойств γ_G и γ_H (см. (17)) имеем, что

$$\begin{aligned} \Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)|_{t_2=0} &= g_2 \Delta_G^2(g_3, g_4), & \Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)|_{t_3=0} &= \Delta_G^2(g_2 g_3, g_4), \\ \Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)|_{t_4=0} &= \Delta_G^2(g_2, g_3 g_4), & \Delta_G^3(g_2, g_3, g_4)|_{t_2+t_3+t_4=1} &= \Delta_G^2(g_2, g_3), \\ \Delta_H^1(h)|_{t_1=0} &= e_G, & \Delta_H^1(h)|_{t_1=1} &= h. \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом ориентации индуцированной с $c^{3,1}$ на $\partial c^{3,1}$, имеем:

$$\begin{aligned} \partial c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4) &= -c^{3,0}(g_2, g_3, g_4) \cdot e_G + c^{3,0}(g_2, g_3, g_4) \cdot h_1 + \\ &+ g_2 \cdot c^{2,1}(h_1, g_3, g_4) - c^{2,1}(h_1, g_2 g_3, g_4) + c^{2,1}(h_1, g_2, g_3 g_4) - c^{2,1}(h_1, g_2, g_3). \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку по определению (см. (11)), τ^{-1} переводит λ -инвариантное векторное поле, касательное к G , в вектор из алгебры Ли \mathfrak{g} а коцикл $F_{U,V}$ обнуляется на $\wedge^3 \mathfrak{g}$, то

$$\int_{c^{3,0}(g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} = 0.$$

Далее, $\Delta^3(g_2, g_3, g_4) \cdot h_1 = \lambda_{h_1^{-1}}(h_1 \triangleright \Delta^3(g_2, g_3, g_4))$ и, поэтому,

$$\begin{aligned} \int_{c^{3,0}(g_2, g_3, g_4) \cdot h} \omega_{U,V} &= \int_{\lambda_{h_1^{-1}}(h_1 \triangleright c^{3,0}(g_2, g_3, g_4))} \omega_{U,V} = \\ &= \int_{h_1 \triangleright c^{3,0}(g_2, g_3, g_4)} \lambda_{h_1} \cdot \omega_{U,V} = \int_{h_1 \triangleright c^{3,0}(g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} = 0, \end{aligned}$$

где в предпоследнем равенстве использована λ -инвариантность формы $\omega_{U,V}$.

Также, используя (17), имеем:

$$\begin{aligned} g_2 \Delta_G^2(g_3, g_4) \cdot \Delta_H^1(h_1) &= \lambda_{g_2} \cdot (\Delta_G^2(g_3, g_4) \cdot (\Delta_H^1(h_1) \triangleleft g_2)) = \\ &= \lambda_{g_2} \cdot (\Delta_G^2(g_3, g_4) \cdot \Delta_H^1(h_1 \triangleleft g_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, используя λ -инвариантность $\omega_{U,V}$, получаем, что

$$\int_{g_2 c^{2,1}(h_1, g_3, g_4)} \omega_{U,V} = \int_{c^{2,1}(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4)} \lambda_{g_2^{-1}} \cdot \omega_{U,V} = \int_{c^{2,1}(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V}.$$

Это показывает, что

$$\begin{aligned} \int_{\partial c^{3,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} &= \int_{c^{2,1}(h_1 \triangleleft g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} - \int_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} + \\ &+ \int_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V} - \int_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_{U,V} = 0, \end{aligned}$$

что доказывает (29).

Рассматривая

$$\int_{c^{1,3}(h_1, h_2, h_3, g_4)} d\omega_{U,V} = 0,$$

можно доказать таким же образом, что

$$\tilde{v}(h_1, h_2, h_3 \triangleright g_4) + \tilde{v}(h_1 h_2, h_3, g_4) = \tilde{v}(h_1, h_2 h_3, g_4) + \tilde{v}(h_2, h_3, g_4). \quad (32)$$

Теперь рассмотрим

$$0 = \int_{c^{2,2}(h_1, h_2, g_3, g_4)} d\omega_{U,V} = \int_{\partial c^{2,2}(h_1, h_2, g_3, g_4)} \omega_{U,V}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_G^2(g_3, g_4)|_{t_3=0} &= g_3 \Delta_G^1(g_4), & \Delta_G^2(g_3, g_4)|_{t_4=0} &= \Delta_G^1(g_3 g_4), \\ \Delta_G^2(g_3, g_4)|_{t_3+t_4=1} &= \Delta_G^1(g_3), \\ \Delta_H^2(h_1, h_2)|_{t_1=0} &= \Delta_H^1(h_1) h_2, & \Delta_H^2(h_1, h_2)|_{t_2=0} &= \Delta_H^1(h_1 h_2), \\ \Delta_H^2(h_1, h_2)|_{t_1+t_2=1} &= \Delta_H^1(h_2), \end{aligned}$$

имеем, что

$$\begin{aligned} \partial c^{2,2}(h_1, h_2, g_3, g_4) &= -c^{2,1}(h_1, g_2, g_3) \cdot h_2 + c^{2,1}(h_1 h_2, g_2, g_3) - c^{2,1}(h_2, g_3, g_4) - \\ &- g_3 \cdot c^{1,2}(h_1, h_2, g_4) + c^{1,2}(h_1, h_2, g_3 g_4) - c^{1,2}(h_1, h_2, g_3). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_G^2(g_3, g_4) \cdot \Delta_H^1(h_1) h_2 &= \lambda_{h_2}^{-1}((h_2 \triangleright \Delta_G^2(g_3, g_4)) \cdot \Delta_H^1(h_1)) = \\ &= \lambda_{h_1}^{-1}(\Delta_G^2(h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4)) \cdot \Delta_H^1(h_1), \end{aligned}$$

то

$$\int_{c^{2,1}(h_1, g_3, g_4) h_2} \omega_{U,V} = \int_{c^{2,1}(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4)} \omega_{U,V}.$$

Точно также,

$$\int_{g_3 c^{1,2}(h_1, h_2, g_4)} \omega_{U,V} = \int_{c^{1,2}(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4)} \omega_{U,V}.$$

Это доказывает, что

$$\begin{aligned} \tilde{v}(h_1, h_2, g_3 g_4) + \tilde{u}(h_1 h_2, g_2, g_3) &= \tilde{v}(h_1, h_2, g_3) + \tilde{u}(h_2, g_3, g_4) + \\ &+ \tilde{v}(h_1 \triangleleft (h_2 \triangleright g_3), h_2 \triangleleft g_3, g_4) + \tilde{u}(h_1, h_2 \triangleright g_3, (h_2 \triangleleft g_3) \triangleright g_4). \end{aligned}$$

Поэтому, функции $u = e^{i\tilde{u}}$ и $v = e^{i\tilde{v}}$ удовлетворяют (3), (4), и (5).

Докажем теперь, что отображение Int корректно определено.

Пусть $F_{U,V} = dR$, причем $R|_{\mathfrak{g}^{\wedge 2}} = R|_{\mathfrak{h}^{\wedge 2}} = 0$. Определим λ -инвариантную дифференциальную 2-форму на K

$$\omega_R = (\tau^{-1})^*(R).$$

Тогда $\omega_{U,V} = d\omega_R$ и

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \int_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_{U,V} = \int_{c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} d\omega_R = \int_{\partial c^{2,1}(h_1, g_2, g_3)} \omega_R,$$

где

$$\begin{aligned} \partial c^{2,1}(h_1, g_2, g_3) &= c^{2,0}(g_2, g_3) - c^{2,0}(g_2, g_3)h_1 - \\ &\quad - g_2c^{1,1}(h_1, g_3) + c^{1,1}(h_1, g_2g_3) - c^{1,1}(h_1, g_2). \end{aligned}$$

Так как $c^{2,0}(g_2, g_3)h_1 = \lambda_{h_1^{-1}}(h_1 \triangleright c^{2,0}(g_2, g_3))$, а ω_R — λ -инвариантная и $R|_{\mathfrak{g}^{\wedge 2}} = 0$, то

$$\int_{c^{2,0}(g_2, g_3)} \omega_R = 0, \quad \int_{c^{2,0}(g_2, g_3)h_1} \omega_R = 0.$$

Также, используя (17) и λ -инвариантность 2-формы ω_R , имеем

$$\int_{g_2c^{1,1}(h_1, g_3)} \omega_R = \int_{c^{1,1}(h_1 \triangleleft g_2, g_3)} \omega_R.$$

Следовательно, полагая

$$\tilde{r}(h_1, g_2) = - \int_{c^{1,1}(h_1, g_2)} \omega_R,$$

имеем, что

$$\tilde{u}(h_1, g_2, g_3) = \tilde{r}(h_1 \triangleleft g_2, g_3) - \tilde{r}(h_1, g_2g_3) + \tilde{r}(h_1, g_2). \quad (33)$$

Поскольку

$$\tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = \int_{c^{1,2}(h_1, h_2, g_3)} \omega_{U,V} = \int_{\partial c^{1,2}(h_1, h_2, g_3)} \omega_R$$

и

$$\begin{aligned} \partial c^{1,2}(h_1, h_2, g_3) &= c^{1,1}(h_1, g_3)h_2 - c^{1,1}(h_1h_2, g_3) + c^{1,1}(h_2, g_3) + \\ &\quad + g_3c^{0,2}(h_1, h_2) - c^{0,2}(h_1, h_2), \end{aligned}$$

то

$$\tilde{v}(h_1, h_2, g_3) = -\tilde{r}(h_1, h_2 \triangleright g_3) + \tilde{r}(h_1h_2, g_3) - \tilde{r}(h_2, g_3). \quad (34)$$

Формулы (33) и (34) показывают, что пары (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , где $u_1 = u$, $v_1 = v$, $u_2 = v_2 = 1$, и функция $r = e^{i\tilde{r}}$ удовлетворяют (6). \square

Список литературы

- [1] Г. И. Кац. Расширение групп, являющиеся кольцевыми группами. *Матем. сборник*, 76(3):473–496, 1968.
- [2] S. Vaes and L. Vainerman. Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction. *Adv. in Math.*, 175(1):1–101, 2003.
- [3] S. Majid. *Foundations of quantum group theory*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] S. Baaj, G. Skandalis, and S. Vaes. Topological Kac cohomology for bicrossed products. *math. QA/0307172*.
- [5] Yu. A. Chapovsky, A. A. Kalyuzhnyi, and G. B. Podkolzin. On the group of extensions for the bicrossed product construction for a locally compact group. *Algebra and Discrete Mathematics*, (3):12–19, 2004.
- [6] А. Гишарде. *Когомологии топологических групп и алгебр Ли*. “Мир”, Москва, 1984.
- [7] Yu. A. Chapovsky, A. A. Kalyuzhnyi, and G. B. Podkolzin. On $2 + 2$ locally compact quantum groups. In *The Proceedings of Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics Part III*, pages 1064–1070, 2004.