Математические заметки

том 74 выпуск 3 сентябрь 2003

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

В. Г. Бондаренко

Пусть M – полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны, $\dim M = n$, с метрикой ρ и объемом σ; $p(t,x,y)$ – ядро теплопроводности, т.е. фундаментальное решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u, \qquad x,y \in M, \quad t \in (0;T], \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами. В данной работе для логарифмического градиента этого ядра

$$U(t,x,y) = \operatorname{grad}_x \ln p(t,x,y) \in T_x M$$

получено представление в виде суммы двух векторных полей и для одного из слагаемых установлена оценка.

1. Введение. Через $R(x)$ обозначим тензор кривизны многообразия; если $\{e_k\}$ – ортобазис в $T_x M$, то

$$\operatorname{Ric}(x)(U,V) = \sum_{k=1}^{n} (R(x)(U,e_x)V, e_k), \qquad r(x) = \operatorname{tr}\operatorname{Ric}(x)$$

называются соответственно *тензором Риччи* и *скалярной кривизной* многообразия (отличные знаком от общепринятых). Пусть γ – геодезическая, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho(x,y)) = x$. *Полем Якоби* вдоль γ называется решение $Z(s)$ уравнения Якоби

$$\nabla^2_{\dot\gamma(s)} Z(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\,\dot\gamma(s).$$

Пусть тензор кривизны удовлетворяет следующим условиям:

1) $\sum_k |R(x)(U,e_k)V,\varphi_k| < c\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U,U)\operatorname{Ric}(x)(V,V)}$, где $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ – произвольные ортобазисы в $T_x M$, а константа c не зависит от x;
2) вдоль любой геодезической скалярная кривизна убывает достаточно быстро, т.е.
$$\int_0^\infty s r(\gamma(s))\,ds < c,$$
где c не зависит от γ;
3) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам
$$\|(\nabla_{X(s)} R)(\gamma(s))(\Upsilon(s),\dot\gamma(s))Z(s)\| \leqslant f_1(\gamma(s))\|X(s)\|\cdot\|\Upsilon(s)\|\cdot\|Z(s)\|,$$
$$\|\nabla_{U(s)}\nabla_{X(s)} R(\gamma(s))(\Upsilon(s),\dot\gamma(s))Z(s)\| \leqslant f_2(\gamma(s))\|X(s)\|\cdot\|\Upsilon(s)\|\cdot\|Z(s)\|\cdot\|U(s)\|,$$
где функции f_1 и f_2 таковы, что вдоль любой геодезической γ $\int_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))\,ds < c$, c не зависит от γ.

Как показано в [1] и [2], при выполнении этих условий имеют место следующие результаты.

Определим вдоль γ оператор D:

$$D(\gamma(s))U = \nabla_U \rho(y, \gamma(s))\dot{\gamma}(s), \quad \gamma(0) = y, \quad U \in T_{\gamma(s)}M,$$

и функцию

$$a(x, y) = \operatorname{tr}(D(x) - \mathrm{I}),$$

Тогда $D(x) \geqslant \mathrm{I}$, а для функции $a(x, y)$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant a(x, y) \leqslant \int_0^{\rho(x,y)} s \operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\, ds, \quad \|\operatorname{grad}_x a(x, y)\| < c, \quad |\Delta_x a(x, y)| < c.$$

Для функции

$$\varphi(x, y) = \int_0^{\rho(x,y)} \frac{a(\gamma(s), y)}{s}\, ds$$

также ограничены $\|\operatorname{grad}_x \varphi(x, y)\|$ и $|\Delta_x \varphi(x, y)|$.

Положим

$$q(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}}, \quad m(t, x, y) = q(t, x, y) e^{-\frac{\varphi(x,y)}{2} - kt},$$

где k – некоторая положительная константа.

В работе [3] фундаментальное решение $p(t, x, y)$ построено методом параметрикса:

$$p(t, x, y) = m(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_M m(t - \tau, x, z) r(\tau, z, y)\, \sigma(dz), \tag{2}$$

где функция $r(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению Вольтерра. При ее оценивании в интеграле

$$\int_M f(z) q(\tau, z, y) q(t - \tau, x, z)\, \sigma(dz)$$

используется замена

$$\begin{gathered} U = \sqrt{\frac{t}{\tau(t - \tau)}} \rho(x, z) e(x, z) - \sqrt{\frac{t - \tau}{t\tau}} \rho(x, y) e(x, y), \\ z(U) = \operatorname{Exp}_x \left(\sqrt{\frac{\tau(t - \tau)}{t}} U + \frac{t - \tau}{t} \rho(x, y) e(x, y) \right) \end{gathered} \tag{3}$$

(где $e(x, y)$ – единичный вектор, касательный в точке x к геодезической, соединяющей x и y, и направленный к y), которая приводит упомянутый интеграл к выражению

$$\int_{T_x M} f(z(U)) J(t, \tau, x, y, U)\, \mu_x(dU)\, q(t, x, y),$$

где μ_x – каноническая гауссова мера на $T_x M$, а якобиан J ограничен. В результате для r доказана оценка: $|r(t, x, y)| < cq(t, x, y)$, $x, y \in M$, $t \in (0; T]$.

2. Результаты. Рассмотрим разность

$$W(t, x, y) = \operatorname{grad}_x \ln p(t, x, y) - \operatorname{grad}_x \ln q(t, x, y) \equiv U(t, x, y) - \frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y).$$

Дифференцируя уравнение (1) вдоль произвольного векторного поля $H(x)$, можно получить систему уравнений для U и W: подставляя во вторую систему $H = W$, для функции $\alpha(t, x, y) = \|W(t, x, y)\|^2$ получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta \alpha + (\operatorname{grad} \alpha, U) + \alpha \left(\operatorname{Ric}(x)(E, E) - \frac{2}{t}(D(x)E, E) \right) \\ &\quad - \frac{1}{t}(\operatorname{grad} a(x, y), W) - \sum_k \|\nabla_{e_k} w\|^2, \end{aligned} \tag{4}$$

где $E(t, x, y) = W/\|W\|$, а оператор $D(x)$ определен выше.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *При выполнении условий* (1)–(3) *для* $x, y \in M$, $t \in [0;T]$ *справедлива оценка*

$$\|W(t,x,y)\| < c,$$

где константа c зависит только от T.

Лемма 1. *Начальное условие для векторного поля $W(t,x,y)$ определяется равенством*

$$W(0,x,y) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\varphi(x,y).$$

Доказательство. Дифференцирование по x равенства (2) приводит к выражению

$$\operatorname{grad}\ln p(t,x,y) = \frac{1}{p(t,x,y)}\biggl(m(t,x,y)\biggl(\frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y) - \frac{\operatorname{grad}\varphi(x,y)}{2}\biggr) + \int_0^t d\tau \int_M \biggl(\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\operatorname{grad}\varphi(x,z)}{2}\biggr)m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\,\sigma(dz)\biggr).$$

Вычитая из обеих частей равенства

$$\operatorname{grad}\ln q(t,x,y) = \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y)$$

и подставляя вместо $p(t,x,y)$ правую часть (2), приходим к равенству

$$W(t,x,y) = \frac{1}{1 + \frac{1}{m(t,x,y)}\int_0^t d\tau \int_M m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\,\sigma(dz)} \times \biggl(-\frac{1}{2}\operatorname{grad}\varphi(x,y) + \frac{1}{m(t,x,y)}\int_0^t d\tau \int_M \biggl(\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y)\biggr) \times m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\,\sigma(dz) - \frac{1}{m(t,x,y)}\int_0^t d\tau \int_M \operatorname{grad}\varphi(x,y) \times m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\,\sigma(dz)\biggr).$$

В силу упомянутой выше оценки для $r(t,x,y)$ для ограниченной функции f справедливо соотношение

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\int_0^t d\tau \int_M f(z)m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\,\sigma(dz)}{m(t,x,y)} = 0,$$

т.е.

$$W(0,x,y) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\varphi(x,y) + \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{m(t,x,y)}\int_0^t d\tau \int_M \biggl(\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y)\biggr)m(t-\tau,x,z)r(\tau,z,y)\,\sigma(dz).$$

Оценим интеграл в правой части, воспользовавшись заменой (3). Пусть $V \in T_xM$. Тогда

$$\biggl|\int_M \biggl(\frac{\rho(x,z)}{t-\tau}e(x,z) - \frac{\rho(x,y)}{t}e(x,y), V\biggr)m(t-\tau,x,z)q(\tau,z,y)\,\sigma(dz)\biggr| < \frac{c}{\sqrt{t}}\int_{T_xM}\sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}}|(U,V)|\exp\biggl\{-\frac{\varphi(x,z(U))}{2} - k(t-\tau)\biggr\}\mu_x(dU)\,q(t,x,y) < \frac{c}{\sqrt{t}}\sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}}\|V\|q(t,x,y).$$

Интегрируя полученную оценку по $d\tau$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{t}}\|V\|q(t,x,y)\int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}}\,d\tau = \frac{c\pi\sqrt{t}}{2}\|V\|q(t,x,y),$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Оценивая правую часть уравнения (4) с помощью неравенств

$$\sqrt{\alpha} < \frac{\varepsilon\alpha}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \qquad \|\operatorname{grad} a(x,y)\| \leqslant C_1, \qquad \operatorname{Ric}(x)(E,E) \leqslant C_2, \qquad D(x) \geqslant \mathrm{I}$$

приходим к неравенству

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} < \frac{1}{2}\Delta\alpha + (\operatorname{grad}\alpha, U) + \alpha\left(C_2 - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon C_1}{2t}\right) + \frac{C_1}{2\varepsilon t},$$

откуда следует неравенство

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} < \frac{1}{2}\Delta\beta + \beta\left(C_2 - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon C_1}{2t}\right) + \frac{C_1}{2\varepsilon t}p$$

для функции

$$\beta(t,x,y) = \alpha(t,x,y)p(t,x,y).$$

Покажем, что для достаточно большого числа k функция $kp(t,x,y)$ удовлетворяет на некотором интервале $(0;t_0]$ обратному неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t}(kp) > \frac{1}{2}\Delta(kp) + kp\left(C_2 - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon C_1}{2t}\right) + p\frac{C_1}{2\varepsilon t}.$$

Последнее является следствием неравенств

$$k > \max\left(\frac{1}{4}\|\operatorname{grad}\varphi(x,y)\|^2, \frac{C_1^2}{4}\right), \qquad \frac{2-\sqrt{4-\frac{C_1^2}{k}}}{C_1} < \varepsilon < \frac{2+\sqrt{4-\frac{C_1^2}{k}}}{C_1},$$
$$t_0 < \frac{2 - \varepsilon C_1/2 - C_1/2\varepsilon k}{C_2}.$$

В силу теорем сравнения [4, с. 72–74]

$$\alpha(t,x,y) < k, \qquad x,y \in M, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

На интервале $(t_0;T]$ $\beta(t,x,y)$ мажорируется функцией

$$\lambda(t,x,y) = \left(e^{A(t-t_0)}\left(\frac{B}{A} + k\right) - \frac{B}{A}\right)p(t,x,y), \qquad \lambda(t_0,x,y) = kp(t_0,x,y),$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\lambda + \lambda A + Bp,$$

где положительные числа $A > C_2 - 2/t_0 + \varepsilon C_2/t_0$, $B > C_1/2\varepsilon t_0$, откуда и следует утверждение теоремы для $t \leqslant T$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bondarenko V. // Comp. Rendus A. S. 1997. V. 324. № 10. P. 1099–1103. **2**. Бондаренко В. Г. // Укр. матем. ж. 1998. Т. 50. № 8. С. 1129–1136. **3**. Бондаренко В. Г. // Укр. матем. ж. 1999. Т. 51. № 11. С. 1143–1148. **4**. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.