УДК 513.881

Ю.В. Богданський

ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕСКІНЧЕННОВИ-МІРНОМУ ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Вступ

Дослідження диференціальних рівнянь для функцій нескінченновимірного аргументу вимагає розвитку адекватного апарату аналізу. Це зумовлено наявністю в нескінченновимірному випадку диференціальних операторів, що не мають скінченновимірного аналога. Розв'язки рівнянь з такими операторами мають властивос- ті, які не притаманні скінченновимірній теорії і не можуть бути одержані безпосередньо на базі відомих теорем і техніки класичного аналізу [1–3]. У статті пропонується результат (лема 1), який можна розглядати як нескінченновимірний аналог класичної теореми Вейєрштрасса і застосовувати при дослідженні нескінченновимірного аналога рівняння теплопровідності.

Постановка задачі

Нехай H–нескінченновимірний сепарабельний дійсний гільбертів простір; $B_C(H)$ – банахів простір (відносно операторної норми) самоспряжених обмежених лінійних операторів в H; J – конус невід'ємних лінійних функціоналів на $B_C(H)$.

Для функції $u \in C^2(D)$ (D – область в H) еліптичний вираз другого порядку визначено за формулою

$$(Lu)(x) = j(x)(u''(x)),$$

де $j : D \to J$.

У тому випадку, коли функціонали $j(x)$ при кожному x мають вигляд $C \mapsto \mathrm{Tr}AC$, де A – ядерний невід'ємний оператор, L називають регулярним еліптичним оператором. При дослідженні задач для диференціальних рівнянь з такими операторами вдається використати методику скінченновимірних апроксимацій.

У випадку, коли при кожному x ядру функціонала $j(x)$ належать всі оператори скінченного рангу (оператор у цьому разі називаємо суттєво нескінченновимірним), при дослідженні задач можна використовувати принципово інший "метод послідовних кроків" [1–3].

У загальному випадку функціонал $\alpha \in J$ допускає розклад

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

де α_1 та α_2 – функціонали обох вказаних типів і жоден із методів, про які йшла мова, не виявляється ефективним.

Розглянемо найпростіше параболічне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (L_x u)(x,t) = j(x,t)(u_x''(x,t)) . \quad (1)$$

Тут функція $u : H \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ належить класу C^2 (за Фреше) по аргументу x і класу C^1 по аргументу t; $j : H \times [0,+\infty) \to J$ – "коефіцієнт".

Таке рівняння було раніше досліджено автором у статті [4], але при дещо жорсткіших умовах на класи функцій ("регулярність за розмірністю").

У даній статті доведено єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (1) в широкому класі гладких функцій.

Основна лема

Нехай D – обмежена область в H; $T \in (0,+\infty)$; Z – циліндр $D \times (0;T) \subset H \times \mathbf{R}$; $\bar{Z} = \bar{D} \times [0,T]$; $\partial Z = \bar{Z} \setminus Z$. Позначимо через $G(Z)$ клас дійснозначних функцій, які визначені і неперервні в $\bar{Z}$, двічі неперервно диференційовні по x і неперервно диференційовні по t в Z і для яких $\inf_Z f > -\infty$.

Лема 1. $\forall f \in G(Z)$ і $\forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in G(Z)$, така, що

$$\sup_Z \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\cdot) - \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(\cdot) \right\| \le \varepsilon \quad (k = 0,1,2) ,$$

$$\sup_Z \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot) - \frac{\partial^k g}{\partial t}(\cdot) \right| \le \varepsilon , \quad (2)$$

і при цьому існує точка $(x_0, t_0) \in Z$, така, що $g(x,t) > g(x_0,t_0)$ $\forall (x,t) \in \bar{Z} \setminus \{(x_0,t_0)\}$, тобто на $\bar{Z}$ функція g має строгий мінімум, що досягається у внутрішній точці (x_0,t_0).

Доведення. Нехай $a = \inf_Z f$. Візьмемо $\varepsilon_1 > 0$ і $(x_1,t_1) \in Z$, такі, що $f(x_1,t_1) < a + \varepsilon_1$.

Нехай $\delta_1 > 0$. Покладемо $f_1(x,t) = f(x,t) + \delta_1(\| x - x_1 \|^2 + |t - t_1|^2)$.

Тоді $\left(\| x - x_1 \|^2 + |t - t_1|^2 > \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} \right) \Rightarrow (f_1(x,t) > f(x,t) + \varepsilon_1)$. Крім того, маємо $f_1(x_1,t_1) = f(x_1,t_1)$. Тому $\inf_Z f_1 \ge \inf_Z f$;

$$\inf_Z f_1 = \inf \left\{ f_1(x,t) \,|\, \| x - x_1 \|^2 + |t - t_1|^2 \le \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} \right\} .$$

Далі беремо $\varepsilon_2 > 0$ та точку $(x_2,t_2) \in Z$ таким чином, щоб

$$\begin{cases} f_1(x_2,t_2) \le f_1(x_1,t_1) = f(x_1,t_1), \\ f_1(x_2,t_2) \le \inf_Z f_1 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Нехай $\delta_2 > 0$. Покладемо, $f_2(x,t) = f_1(x,t) + \delta_2(\| x - x_2 \|^2 + |t - t_2|^2)$.

Тоді $\left(\| x - x_2 \|^2 + (t - t_2)^2 > \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} \right) \Rightarrow (f_2(x,t) > f_1(x,t) + \varepsilon_2)$ і тому

$$\inf_Z f_2 = \left\{ \inf \{ f_2(x,t) \,|\, \| x - x_2 \|^2 + (t - t_2)^2 \le \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} \right\} .$$

За цим принципом індуктивно будуємо послідовність функцій f_n.

Послідовності ε_n і δ_n беремо за принципом

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{(\operatorname{diam} D)^2 + T^2}, \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{diam} D}, \frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2T} \right\} ;$$

$$\delta_n = \frac{\delta}{2^{n+m}}; \qquad \varepsilon_n = \frac{\delta}{8^{n+m}} \qquad (m \in \mathbf{N})$$

(вибір належного значення m буде досліджено нижче). Тоді:

1) $\frac{\varepsilon_k}{\delta_k} : \frac{\varepsilon_{k+1}}{\delta_{k+1}} = 4$;

2) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$;

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ збіжний і його сума не перевищує δ.

Функції f_n мають вигляд $f_n(x,t) = f(x,t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k (\| x - x_k \|^2 + (t - t_k)^2)$ і є функціями класу $G(Z)$. При цьому

$$\frac{\partial}{\partial x} f_n = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\sum_{k=1}^{n} \delta_k (x - x_k);$$

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k\right)\mathrm{I};$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_n = \frac{\partial f}{\partial t} + 2\sum_{k=1}^{n} \delta_k (t - t_k).$$

Тому послідовності $\left\{ f_n; \frac{\partial}{\partial x} f_n; \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}; \frac{\partial f_n}{\partial t} \right\}$ рівномірно збіжні в Z. Це гарантує, що функція $g(x,t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,t)$ є функцією класу $G(Z)$ і при цьому

$$\frac{\partial}{\partial x} g = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} f_n; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} g = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_n;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} f_n.$$

Крім того, виконуються нерівності (2).

Розглянемо замкнені кулі $B_n \subset D \times [0,T]$ з центрами в точках (x_n, t_n) радіуса $r_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\delta_n}}$. Центр (x_1, t_1) кулі B_1 можна вибрати всередині Z. Число m вибираємо з тих міркувань, щоб куля з центром в точці (x_1, t_1) радіуса $\frac{1}{2^m} = 2r_1$ повністю належала Z.

Оскільки $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, то для кожного $n \in \mathbf{N}$ центр кулі B_{n+1} належить B_n. Дійсно, для $(x,t) \notin B_n$ $f_n(x,t) > \inf_{B_n} f_n + \varepsilon_n$, але за вибором послідовності $\{(x_n, t_n)\}$: $f_n(x_{n+1}, t_{n+1}) \le \inf_{B_n} f_n + \varepsilon_{n+1}$. Крім того, $r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$. Стандартна процедура подвоєння радіусів куль разом із критерієм Кантора повноти простору приводить до висновку: $(x_n, t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, t_0) \in Z$.

Доведемо, що в точці (x_0, t_0) функція g досягає строгого мінімуму.

Позначимо: $\vec{x} = (x,t)$; $\| \vec{x} \|_1 = \sqrt{\| x \|^2 + t^2}$. Якщо $(x,t) \ne (x_0, t_0)$ $(\vec{x} \ne \vec{x}_0)$, то

$$\exists\ n \in \mathbf{N}: \ r_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\delta_n}} < \frac{1}{6} \| \vec{x} - \vec{x}_0 \|_1.$$

Тоді

$$\| \vec{x}_n - \vec{x}_0 \|_1 \le 2r_n < \frac{1}{3} \| \vec{x} - \vec{x}_0 \|_1;$$

$$\| \vec{x} - \vec{x}_n \|_1 \ge \| \vec{x} - \vec{x}_0 \|_1 - \| \vec{x}_n - \vec{x}_0 \|_1 > r_n.$$

Далі покладемо $f_n(\vec{x}_{n+1}) \le f_n(\vec{x}_n) < f_n(\vec{x})$. При $m > n$ матимемо

$$\| \vec{x}_m - \vec{x}_{n+1} \|_1 \le \| \vec{x}_m - \vec{x}_0 \|_1 + \| \vec{x}_{n+1} - \vec{x}_0 \|_1 <$$

$$< \frac{2}{3} \| \vec{x} - \vec{x}_0 \|_1 < \| \vec{x}_m - \vec{x}_0 \|_1.$$

Звідси

$$f_m(\vec{x}) - f_m(\vec{x}_{n+1}) = (f_{m-1}(\vec{x}) + \delta_m \| \vec{x} - \vec{x}_m \|_1^2) -$$

$$-(f_{m-1}(\vec{x}_{n+1}) + \delta_m \| \vec{x}_{n+1} - \vec{x}_m \|_1^2) >$$

$$> f_{m-1}(\vec{x}) - f_{m-1}(\vec{x}_{n+1}).$$

Такі міркування приводять до висновку, що існують $\alpha > 0$ і $n \in \mathbf{N}$, такі, що $\forall\, m \ge n$ $f_m(\vec{x}_{n+1}) < f_m(\vec{x}) - \alpha$. Граничним переходом при $m \to \infty$ отримаємо нерівність $g(\vec{x}_{n+1}) \le g(\vec{x}) - \alpha$. Повторний перехід до границі при $n \to \infty$ приводить до нерівності $g(\vec{x}_0) < g(\vec{x})$. Лему доведено.

Дослідження параболічного рівняння

Лема 2. Нехай функція u класу $G(Z)$ задовольняє в циліндрі нерівність

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq L_x u = j(x,t)(u''_x), \quad C = \sup_{(x,t)\in Z} \| j(x,t) \| < +\infty .$$

Тоді $\inf_Z u = \inf_{\partial Z} u$.

Доведення. Нехай $\inf_{\partial Z} u - \inf_Z u > 2\alpha > 0$.

Розглянемо функцію $v(x,t) = u(x,t) + \delta t$ $(\delta > 0)$, для якої виконується в Z нерівність $\frac{\partial v}{\partial t} - L_x v \geq \delta > 0$. При цьому $\inf_{\partial Z} v \geq \inf_{\partial Z} u$, $\inf_Z v \leq \quad \leq \inf_Z u + \delta T$. Тому $\inf_{\partial Z} v - \inf_Z v \geq 2\alpha - \delta T$. Покладемо $\delta = \frac{\alpha}{T}$.

Нехай w – функція, ε – близька до v в сенсі леми 1 і така, що має всередині Z строгий мінімум. Тоді

$$L_x w = j(x,t)(w''_x) \leq j(x,t)(v''_x) + C\varepsilon,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_x w \geq \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon - L_x v - C\varepsilon \geq \alpha - \varepsilon(C+1) .$$

Покладемо $\varepsilon < \frac{\alpha}{C+1}$. Всупереч отриманій нерівності в точці мінімуму функції w має виконуватись протилежна нерівність:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x_0,t_0) - L_x w(x_0,t_0) \leq 0 .$$

Зауваження. Умова $\inf_Z u > -\infty$ не принципова для результату леми 2.

Теорема. Нехай функція u визначена і неперервна в $W = H \times (0,T]$, двічі неперервно диференційовна по x і неперервно диференційовна по t в $H \times (0,T)$; $\sup_W |u(x,t)| = M < +\infty$ і скрізь в $H \times (0,T)$ виконується нерівність $\frac{\partial u}{\partial t} \geq j(x,t)(u''_x)$. Тоді $\inf_W u = \inf_H u(x,0)$.

Доведення. Фіксуємо точку $(x_0,t_0) \in W$ і розглянемо функцію $w(x,t) = 2C(t-t_0) + \quad + \|x - x_0\|^2$. Тоді $\frac{\partial w}{\partial t} = 2C \geq j(x,t)(w''_x)$.

Для $\varepsilon > 0$ візьмемо функцію $v = u + \varepsilon w$. Для функції v маємо

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) ; \quad \frac{\partial v}{\partial t} \geq j(x,t)(v''_x) .$$

Нехай $Z_R = \{(x,t) \,|\, \|x - x_0\| < R;\ t \in (0,T)\}$ – циліндр радіуса R. За лемою 2 має виконуватись нерівність $v(x_0,t_0) \geq \inf_{\partial Z_R} v$. Тоді

$$u(x_0,t_0) \geq \inf_{\partial Z_R}(u(x,t) + 2C\varepsilon(t-t_0) + \varepsilon\|x - x_0\|^2) \geq$$

$$\geq \inf_{\partial Z_R}(u(x,t) - 2C\varepsilon t_0 + \varepsilon\|x - x_0\|^2).$$

При досить великому R $\left(R > \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}}\right)$ звідси отримаємо

$$u(x_0,t_0) \geq \inf_{\|x-x_0\|\leq R}(u(x,0) - 2\beta\varepsilon t_0 + \varepsilon\|x - x_0\|^2) \geq$$

$$\geq \inf_{\|x-x_0\|\leq R} u(x,0) - 2\beta\varepsilon t_0 \geq \inf_H u(x,0) - 2\beta\varepsilon t_0 .$$

Залишилось нагадати про довільність вибору $\varepsilon > 0$.

Наслідок. У класі функцій, що визначені на $W = H \times [0,T)$, неперервні і обмежені на W та мають неперервні в W похідні $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, задача Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x u = j(x,t)(u''_x(x,t)), \quad u(x,0) = \varphi(x),$$

де $\sup_W \| j(x,t) \| < \infty$, має не більш як один розв'язок. Розв'язок задачі Коші неперервно залежить від початкової умови.

Наслідок підтверджується стандартними мір- куваннями.

Висновки

У скінченновимірному аналізі дуже важливим є "принцип компактності", відомий як "теорема Вейєрштрасса": на обмеженій замкненій множині неперервна функція досягає екстремальних значень. У статті запропоновано метод (лема 1), який можна використовувати при дослідженні коректності задач для диференціальних рівнянь нескінченновимірного аргументу.

Ю.В. Богданский

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для уравнения теплопроводности на гильбертовом пространстве $\frac{\partial u}{\partial t} = j(x,t)(u''_x(x,t))$ ($j(x,t)$ – неотрицательный линейный функционал) доказана единственность решения задачи Коши в классе ограниченных гладких функций.

Yu.V. Bogdansky

A MAXIMUM PRINCIPLE FOR HEAT CONDUCTION EQUATION IN INFINITE-DIMENSIONAL HILBERT SPACE

The uniqueness of Cauchy problems solution for the heat equation on the Hilbert space $\frac{\partial u}{\partial t} = j(x,t)(u''_x(x,t))$ ($j(x,t)$ is a nonnegative linear functional) is proved in the class of smooth bounded functions.

1. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781–784.
2. *Богданский Ю.В.* Параболические уравнения с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 4Б269-77. Деп. – К., 1977. – 50 с.
3. *Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L.* Cauchy problem for the simplest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator / (Suppl. to chapters IV, V): Yu.L. Dalecky, S.V. Fomin. Measures and differential equations in infinite-dimensional space. – Kluwer Acad. Publ., 1991. – P. 309–322.
4. *Богданский Ю.В.* Принцип максимума для нерегулярного эллиптического дифференциального уравнения в счетномерном гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 21–25.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного
системного аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до
редакції 3 липня
2006 року