ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 517.983

Ю.В. Богданський

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНІ КОСИНУС-ФУНКЦІЇ

Вступ

Дослідження рівняння $u' + Au = 0$ для функції дійсного аргумента зі значеннями у банаховому (нескінченновимірному) просторі приводить до теорії операторних півгруп та операторних груп, зокрема (C_0)-теорії, а рівняння $u'' + Au = 0$ – до теорії косинус-функцій (див., наприклад, [1]).

Для загального однорідного рівняння другого порядку $u'' + Au' + Bu = 0$ відповідної теорії поки що не існує. Деякі кроки в цьому напрямку були зроблені в [1, 2]. У поданій статті пропонується ще один крок у напрямку побудови відповідної теорії.

Постановка задачі

Нехай X – банахів простір (дійсний або комплексний); $L(X)$ – простір обмежених лінійних операторів в X зі стандартною операторною нормою. Відображення $\mathrm{R} \ni t \mapsto F(t) \in L(X)$ називатимемо сильно неперервною (операторною) експоненціальною косинус-функцією (ЕКФ), якщо воно задовольняє умови:

$$F(u)F(v+w) + F(v)F(u+w) + F(w)F(u+v) = \\ = 2F(u)F(v)F(w) + F(u+v+w) \qquad (1)$$

для всіх $u, v, w \in \mathrm{R}$;

$$F(0) = \mathrm{I} \text{ (тотожний оператор в } X\text{);} \qquad (2)$$

для кожного $x \in X$ функція

$$\mathrm{R} \ni t \mapsto F(t)x \in X \qquad (3)$$

неперервна.

Прикладами ЕКФ є сильно неперервні однопараметричні операторні групи $T(t)$ ($T(t+s) = T(t)T(s)$) та сильно неперервні операторні косинус-функції $C(t)$ ($C(t-s) + C(t+s) = 2C(t)C(s)$).

Функціональне рівняння (1), наскільки відомо автору, в літературі раніше не розглядалось.

Задача полягає в дослідженні ЕКФ та побудові відповідного диференціального рівняння в просторі X.

Розклад експоненціальної косинус-функції

Твердження 1. Нехай $F(t)$ – ЕКФ. Тоді $\forall t, s \in \mathrm{R}$ матимемо $F(t)F(s) = F(s)F(t)$.

Доведення. Досить у рівнянні (1) покласти $w = 0$.

Твердження 2. Нехай $T(t)$ та $C(t)$ – відповідно сильно неперервні однопараметричні група та косинус-функція, що комутують (тобто $T(t)C(s) = C(s)T(t)$ для всіх $t, s \in \mathrm{R}$). Тоді $F(t) = T(t)C(t)$ є експоненціальна косинус-функція.

Доведення. Косинус-функція задовольняє рівняння

$$C(u+v) + C(u-v) = 2C(u)C(v),$$

звідки

$$C(u+v)C(w) + C(u-v)C(w) = 2C(u)C(v)C(w);$$

$$C(v+w)C(u) = \frac{1}{2}C(u+v+w) + \frac{1}{2}C(v+w-u);$$

$$C(u+w)C(v) = \frac{1}{2}C(u+v+w) + \frac{1}{2}C(u+w-v);$$

$$\frac{1}{2}C(-u+v+w) + \frac{1}{2}C(u+w-v) = C(u-v)C(w).$$

Після додавання лівих та правих частин цих чотирьох рівностей приходимо до висновку, що $C(t)$ задовольняє умову (1) ЕКФ. Почленне множення на $T(u+v+w) = T(u)T(v)T(w)$ доводить умову (1) і для $F(t) = T(t)C(t)$. Умови (2) та (3) виконуються очевидним чином. ■

Теорема 1. Нехай $F(t)$ – ЕКФ. Тоді існують і притому єдині сильно неперервні однопараметричні група $T(t)$ та косинус-функція $C(t)$, такі, що комутують і для кожного $t \in \mathrm{R}$ має місце розклад

$$F(t) = T(t)C(t). \qquad (4)$$

Доведення. Покладемо $T(t) = 2F\left(\frac{t}{2}\right)^2 - F(t)$. Тоді

$$C(t) = 2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) - \mathrm{I}.$$

Перевіримо, що $T(t)$ – однопараметрична група, а $C(t)$ – косинус-функція:

$$T(t)T(s) = 2F\left(\frac{t}{2}\right)2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{s}{2}\right)^2 - 2F\left(\frac{t}{2}\right)^2 F(s) -$$

$$- 2F\left(\frac{s}{2}\right)^2 F(t) + F(t)F(s) =$$

$$= 2F\left(\frac{t}{2}\right)\left(2F\left(\frac{t+s}{2}\right)F\left(\frac{s}{2}\right) + F\left(\frac{t}{2}\right)F(s) - F\left(\frac{t}{2}+s\right)\right) -$$

$$-\left(F(t)F(s) + 2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(s+\frac{t}{2}\right) - F(t+s) \right) -$$

$$-\left(F(t)F(s) + 2F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(t+\frac{s}{2}\right) - F(t+s) \right) + F(t)F(s) =$$

$$= 2\left(F\left(t+\frac{s}{2}\right)F\left(\frac{s}{2}\right) + F\left(s+\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(\frac{t+s}{2}\right)^2 - F(t+s) \right) +$$

$$+ F(t)F(s) + 2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{t}{2}+s\right) - F(t+s) -$$

$$- 2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{t}{2}+s\right) - F(t)F(s) +$$

$$+ 2F(t+s) - 2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(s+\frac{t}{2}\right) -$$

$$- 2F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(t+\frac{s}{2}\right) = -F(t+s) + 2F\left(\frac{t+s}{2}\right)^2 = T(t+s);$$

$$2C(t)C(s) =$$

$$= 4F\left(\frac{t}{2}\right)2F\left(-\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(-\frac{s}{2}\right) - 4F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) -$$

$$- 4F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(-\frac{s}{2}\right) + 2\mathrm{I} =$$

$$= 4F\left(\frac{t}{2}\right)\left(F\left(-\frac{t}{2}\right) + F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(-\frac{t+s}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(-\frac{s}{2}\right)F\left(\frac{s-t}{2}\right) - F\left(-\frac{t}{2}\right)\right) - 4F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) -$$

$$- 4F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(-\frac{s}{2}\right) + 2\mathrm{I} =$$

$$= 2\left(F\left(\frac{t+s}{2}\right)F\left(-\frac{t+s}{2}\right) + F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(-\frac{s}{2}\right) - \mathrm{I} \right) + 2\left(F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) + F\left(-\frac{s}{2}\right)F\left(\frac{s}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(\frac{t-s}{2}\right)F\left(\frac{s-t}{2}\right) - \mathrm{I} \right) -$$

$$- 4F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) - 4F\left(\frac{s}{2}\right)F\left(-\frac{s}{2}\right) + 2\mathrm{I} =$$

$$= 2F\left(\frac{t+s}{2}\right)F\left(-\frac{t+s}{2}\right) + 2F\left(\frac{t-s}{2}\right)F\left(\frac{s-t}{2}\right) - 2\mathrm{I} =$$

$$= C(t+s) + C(t-s).$$

Сильна неперервність $T(t)$, $C(t)$ та умова $T(0) = C(0) = \mathrm{I}$ очевидні. Перевіримо $F(t) = T(t)C(t)$:

$$\left(2F\left(\frac{t}{2}\right)^2 - F(t)\right)\left(2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) - \mathrm{I}\right) =$$

$$= 2F\left(-\frac{t}{2}\right)2F\left(\frac{t}{2}\right)^3 - 2F\left(\frac{t}{2}\right)^2 -$$

$$- 2F(t)F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) + F(t) =$$

$$= 2F\left(-\frac{t}{2}\right)\left(3F\left(\frac{t}{2}\right)F(t) - F\left(\frac{3t}{2}\right)\right) -$$

$$- 2F\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(F(t) + F\left(\frac{t}{2}\right)^2 + F\left(-\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{3t}{2}\right) - F(t) \right) +$$

$$+ F(t) = 3\left(F\left(-\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{3t}{2}\right) + F\left(\frac{t}{2}\right)^2 \right) -$$

$$- 3F\left(-\frac{t}{2}\right)F\left(\frac{3t}{2}\right) - 3F\left(\frac{t}{2}\right)^2 + F(t) = F(t).$$

Залишилось перевірити єдиність розкладу (4).

Нехай $F(t) = T_1(t)C_1(t)$ — інший розклад $F(t)$ у добуток комутуючих однопараметричної групи та косинус-функції. Тоді

$$T(t) = 2F\left(\frac{t}{2}\right)^2 - F(t) =$$

$$= 2T_1(t)C_1\left(\frac{t}{2}\right)^2 - T_1(t)C_1(t) = T_1(t);$$

$$C(t) = 2F\left(\frac{t}{2}\right)F\left(-\frac{t}{2}\right) - \mathrm{I} =$$

$$= 2C_1\left(\frac{t}{2}\right)C_1\left(-\frac{t}{2}\right) - \mathrm{I} = C_1(t). \ \blacksquare$$

***Наслідок* 1.** Нехай $F(t)$ — ЕКФ у банаховому просторі *X*. Тоді існують сталі *M*, ω, такі, що для кожного $t \in \mathrm{R}$ виконується нерівність

$$\| F(t) \| \le M e^{\omega |t|}. \qquad (5)$$

Доведення. Оцінка (5) має місце як для однопараметричних груп, так і для косинус-функцій. Залишається застосувати результат теореми 1. ■

Побудова диференціального рівняння

Нехай $A = T'(0)$ — генератор побудованої однопараметричної групи $T(t)$, а $Q = C''(0)$ — генератор косинус-функції $C(t)$.

Теорема 2. Оператор $A^2 - Q$ з областю визначення $D(A^2 - Q) = D(A^2) \cap D(Q)$ є щільно визначеним оператором в *X* та допускає замикання.

Доведення. Нехай $x \in D(A^2)$. Для $t > 0$ розглянемо вектор $x_t = \frac{2}{t^2}\int_0^t (t-s)F(s)xds$. Очевидно, $x_t \to x$ при $t \to 0$.

Оператор A^2 є замкненим, щільно визначеним в *X*. Тому $x_t \in D(A^2)$, $A^2 \int_0^t (t-s)F(s)xds = \int_0^t (t-s)F(s)A^2 xds$ і для доведення щільності $D(A^2) \cap D(Q)$ досить перевірити, що $x_t \in D(Q)$.

Коректність подальших граничних переходів зумовлена сильною неперервністю операторних функцій і оцінкою (5):

$$Q\int_0^t (t-s)F(s)xds =$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{2}{h^2}(C(h) - \mathrm{I})\int_0^t (t-s)C(s)T(s)xds =$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\left(\int_0^t (t-s)(C(s+h) + C(s-h))T(s)xds - \right.$$

$$\left. - 2\int_0^t (t-s)C(s)T(s)xds\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\left(\int_h^{t+h} (t-s+h)C(s)T(s-h)xds + \right.$$

$$\left. + \int_{-h}^{t-h} (t-s-h)C(s)T(s+h)xds - 2\int_0^t (t-s)C(s)T(s)xds\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\left(\int_t^{t+h} (t-s+h)F(s)xds - \right.$$

$$- \int_0^h (t-s+h)F(s)xds + \int_{-h}^0 (t-s-h)F(s)xds -$$

$$- \int_{t-h}^t (t-s-h)F(s)xds +$$

$$+ \int_h^{t+h} (t-s+h)F(s)(T(-h) - \mathrm{I})xds +$$

$$\left. + \int_{-h}^{t-h} (t-s-h)F(s)(T(h) - \mathrm{I})xds\right) =$$

$$= F(t)x + \lim_{h \to 0}\frac{t}{h^2}\left(-\int_0^h F(s)xds + \int_{-h}^0 F(s)xds\right) - x +$$

$$+ \lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^t (t-s)F(s)(T(h) + T(-h) - 2\mathrm{I})xds +$$

$$+ \lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\left(\int_t^{t+h} (t-s)F(s)(T(-h) - \mathrm{I})xds - \right.$$

$$\left. - \int_0^h (t-s)F(s)(T(-h) - \mathrm{I})xds\right) +$$

$$+ \lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\left(\int_{-h}^0 (t-s)F(s)(T(h) - \mathrm{I})xds - \right.$$

$$\left. - \int_{t-h}^t (t-s)F(s)(T(h) - \mathrm{I})xds\right) +$$

$$+ \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} F(s)(T(-h) - \mathrm{I})xds - \right.$$

$$\left. - \int_{-h}^{t-h} F(s)(T(h) - \mathrm{I})xds\right) =$$

$$= F(t)x - x + t\lim_{h \to 0}\frac{1}{h^2}\left(-\int_0^h C(s)(T(s) - T(-s))xds\right) +$$

$$+ \int_0^t (t-s)F(s)A^2 xds +$$

$$+ 2tAx - 2\int_0^t F(s)Axds =$$

$$= F(t)x - x + tAx - 2\int_0^t F(s)Axds +$$

$$+\int_0^t (t-s)F(s)A^2xds .$$

Цим доведена щільність в X лінійного многовида $D(A^2) \cap D(Q)$.

Крім того, для $x \in D(A^2) \cap D(Q)$ маємо рівність

$$\int_0^t (t-s)F(s)(A^2 - Q)xds =$$

$$= -F(t)x + x + A\left(-tx + 2\int_0^t F(s)xds\right). \qquad (6)$$

Якщо $x_n \in D(A^2 - Q)$, $x_n \to 0, (A^2 - Q)x_n \to y$, то замкненість оператора A приводить до висновку: при всіх $t \in \mathrm{R}$: $\int_0^t (t-s)F(s)yds = 0$, а тому $y = 0$ і оператор $A^2 - Q$ допускає замикання. ■

Позначимо B замикання оператора $A^2 - Q$.

Теорема 3. Лінійний многовид $D = D(A^3) \cap \cap D(AQ)$ щільний в X; для кожного $x \in D$ функція $y(t) = F(t)x$ є функцією класу $C^2(\mathrm{R})$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$y''(t) - 2Ay'(t) + By(t) = 0 \qquad (7)$$

з початковою умовою $y(0) = x$; $y'(0) = Ax$ **.**

Доведення. Щільність D в X доводиться міркуваннями, аналогічними тим, що були подані в доведенні теореми 2 із заміною оператора A^2 на A^3.

Для перевірки належності функції $y(t) = F(t)x$ до класу $C^2(\mathrm{R})$ досить перевірити, що для кожного $t \in \mathrm{R}$ існує $z(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(y(t+h) + y(t-h) - 2y(t))$ і $z(t)$ є неперевною функцією:

$$\frac{1}{h^2}(F(t+h)x + F(t-h)x - 2F(t)x) =$$

$$= T(t+h)\frac{1}{h^2}(C(t+h)x + C(t-h)x - 2C(t)x) +$$

$$+ C(t)\frac{1}{h^2}(T(t+h)x + T(t-h)x - 2T(t)x) +$$

$$+\frac{1}{h^2}(T(t+h) - T(t-h))(C(t)x - C(t-h)x) .$$

Перші два доданки при $h \to 0$ мають відповідно границі $T(t)C(t)Qx$ та $C(t)T(t)A^2x$.

Для дослідження третього доданка нагадаємо, що для $x \in X$ має місце формула $Q\int_0^t S(s)xds = C(t)x - x$, де $S(t)x = \int_0^t C(s)xds$ — синус-функція [1], для $x \in D(A)$: $C(t)x \in D(A)$; $S(s)x \in D(A)$ і при цьому $AC(t)x = C(t)Ax$; $AS(t)x = S(t)Ax$. То ж, третій доданок набуває вигляду

$$\frac{1}{h^2}\int_{t-h}^{t+h} T(u)du \int_{t-h}^{t} S(s)AQxds$$

і при $h \to 0$ має границю $2T(t)S(t)AQx$.

Таким чином, $y(t)$ — функція класу $C^2(\mathrm{R})$ і при цьому

$$y''(t) = F(t)Qx + F(t)A^2x + 2T(t)S(t)AQx ,$$

$$y'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(F(t+h)x - F(t)x) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[T(t+h)\frac{1}{h}(C(t+h)x - C(t)x) + \right.$$

$$\left. + C(t)\frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x)\right] =$$

$$= T(t)S(t)Qx + F(t)Ax .$$

Звідси

$$y'(0) = Ax ;$$

$$y''(t) - 2Ay'(t) + By(t) =$$

$$= F(t)Qx + F(t)A^2x +$$

$$+ 2T(t)S(t)AQx - 2T(t)S(t)AQx -$$

$$- 2F(t)A^2x + F(t)(A^2 - Q)x = 0 . ■$$

***Наслідок* 2.** ЕКФ в скінченновимірному просторі є операторнозначною функцією класу $C^\infty(\mathrm{R})$ і задовольняє диференціальне рівняння

$$F''(t) - 2F'(0)F'(t) + (2F'(0) - F''(0))F(t) = 0 . \qquad (8)$$

Доведення. У випадку скінченновимірного простору X за теоремою 3 при всіх $x \in X$ виконується рівність

$$F''(t)x - 2AF'(t)x + BF(t)x = 0 .$$

Тут $A = F'(0)$; $F''(0) = Q + A^2$; $B = A^2 - Q = 2F'(0) - F''(0)$. Звідси маємо (8). Належність $F(t) \in C^{\infty}(\mathrm{R})$ є тепер наслідком стандартних міркувань. ■

Висновки

У статті запроваджено спеціальний клас операторнозначних функцій дійсного аргумента — експоненціальних косинус-функцій, що узагальнюють (C_0)-групи та косинус-функції. Побудовано диференціальне рівняння другого порядку, для якого ЕКФ породжує розв'язки з відповідними початковими умовами.

Автор сподівається, що одержаний у статті результат може бути використаний для побудови загальної теорії рівнянь другого порядку в нескінченновимірних просторах.

Ю.В. Богданский

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ КОСИНУС-ФУНКЦИИ

Исследованы операторнозначные функции в банаховом пространстве, задаваемые функциональным уравнением и обобщающие (C_0)-группы и косинус-функции. Получено соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка.

Yu.V. Bogdansky

EXPONENTIAL COSINE FUNCTIONS

The study operator-valued functions in the Banach space wrer studied, which are determined by functional equations and generalize (C_0)-groups and cosine functions. The corresponding second order differential equations were also obtained.

1. *Fattorini H.O.* Second Order Linear Differetial Equations in Banach Spaces. – Elsevier Science Publishers B.V., 1985. – P. 314.

2. *Xio T.J.*, *Liang J.* On complete second order linear differential equations in Banach spaces // Pacific J. Math. – 1990. – **142**, N 1. – P. 175–195.

Рекомендована Радою навчально-наукового комплексу "Інститут прикладного системного аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 29 жовтня 2007 року