

# Диференціальні рівняння

---

Навчальний посібник

Богданський Ю.В.

Богданський Ю.В.

Диференціальні рівняння: Навч.посіб. – К.: ІВЦ  
„Видавництво „політехніка””, 2011. –

Викладено основні розділи теорії звичайних диференціальних рівнянь ті початкові поняття і найпростіші задачі варіаційного числення. За змістом посібник відповідає програмі вузів з поглибленим рівнем викладання математики. Теоретичний матеріал супроводжується численними прикладами та малюнками.

Для студентів бакалавратів „Системний аналіз” та „Інформатика”.

## Зміст

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Вступ</b>                                                                                               | <b>7</b>  |
| <b>Розділ 1. Диференціальні рівняння 1-го порядку</b>                                                      | <b>10</b> |
| §1. Теорема Пікара.....                                                                                    | 10        |
| §2. Продовження розв'язків.....                                                                            | 17        |
| §3. Рівняння, що не розв'язні відносно похідної. Метод параметризації.....                                 | 20        |
| §4. Особливі розв'язки та обвідні .....                                                                    | 24        |
| <b>Розділ 2. Лінійні диференціальні рівняння і системи.....</b>                                            | <b>30</b> |
| §1. Початкові поняття .....                                                                                | 30        |
| §2. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь.....                                                | 33        |
| §3. Формула Ліувілля-Якобі.....                                                                            | 38        |
| §4. Однорідні лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку.....                                         | 40        |
| §5. Формула Остроградського-Ліувілля.....                                                                  | 43        |
| §6. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Експонента матриці.....  | 47        |
| §7. Обчислення розв'язків систем однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами..... | 56        |
| §8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.....                                | 62        |
| §9. Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь.....                                              | 65        |
| §10. Метод варіації для неоднорідного лінійного диференціального рівняння $n$ -го порядку.....             | 69        |

|                                                                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| §11. Метод невизначених коефіцієнтів для<br>неоднорідних лінійних рівнянь.....                                                       | 70        |
| §12. Метод невизначених коефіцієнтів для<br>неоднорідних систем лінійних рівнянь.....                                                | 74        |
| <b>Розділ 3. Лінійні диференціальні рівняння 2-го<br/>порядку</b>                                                                    | <b>79</b> |
| §1. Якісні властивості розв'язків однорідного<br>лінійного диференціального рівняння<br>$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$ .....    | 79        |
| §2. Крайова задача.....                                                                                                              | 82        |
| §3. Поняття про крайову задачу на власні<br>числа (задача Штурма-Ліувілля).....                                                      | 89        |
| §4. Інтегрування диференціальних рівнянь за<br>допомогою степеневих та узагальнених<br>степеневих рядів.....                         | 90        |
| <b>Розділ 4. Автономні системи. Теорія перших<br/>інтегралів. Диференціальні рівняння з<br/>частковими похідними першого порядку</b> | <b>96</b> |
| §1. Початкові поняття.....                                                                                                           | 96        |
| §2. Перші інтеграли.....                                                                                                             | 99        |
| §3. Диференціальні рівняння першого порядку<br>з частковими похідними.....                                                           | 103       |
| §4. Задача Коші для диференціальних рівнянь<br>1-го порядку в часткових похідних.....                                                | 110       |
| §5. Дослідження фазових кривих.....                                                                                                  | 114       |
| §6. Фазова площина лінійної однорідної системи<br>зі сталими коефіцієнтами.....                                                      | 116       |
| §7. Консервативні системи з одним степенем<br>вільності.....                                                                         | 126       |

|                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| §8. Граничні цикли динамічних систем (теорія Пуанкаре-Бендіксона).....                                  | 129        |
| §9. Неперервна залежність розв'язку системи диференціальних рівнянь від початкової умови.....           | 134        |
| §10. Існування повної системи перших інтегралів                                                         | 138        |
| <b>Розділ 5. Теорія стійкості.....</b>                                                                  | <b>143</b> |
| §1. Постановка задачі. Приклади.....                                                                    | 143        |
| §2. Дослідження стійкості нульового розв'язку однорідної лінійної системи зі сталими коефіцієнтами..... | 145        |
| §3. Лема Ляпунова.....                                                                                  | 148        |
| §4. Асимптотична стійкість розв'язку диференціального рівняння вищого порядку.....                      | 151        |
| §5. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням.....                                           | 154        |
| §6. Достатня умова нестійкості.....                                                                     | 157        |
| §7. Теорема Ляпунова про нестійкість за першим наближенням.....                                         | 159        |
| <b>Розділ 6. Варіаційне числення.....</b>                                                               | <b>163</b> |
| §1. Предмет дослідження.....                                                                            | 163        |
| §2. Основний функціонал варіаційного числення та його узагальнення.....                                 | 164        |
| §3. Необхідна умова екстремуму.....                                                                     | 165        |
| §4. Найпростіша задача варіаційного числення. Рівняння Ейлера.....                                      | 169        |
| §5. Приклади.....                                                                                       | 172        |
| §6. Найпростіша задача з незакріпленими кінцями.....                                                    | 175        |
| §7. Узагальнення основного функціонала.....                                                             | 176        |
| §8. Перетворення Лежандра.....                                                                          | 178        |

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| §9. Випадок автономної системи Гамільтона.....                               | 180        |
| §10. Умовний екстремум. Ізопериметрична задача                               | 181        |
| §11. Умовний екстремум. Задача Лагранжа.....                                 | 186        |
| §12. Випадок двічі диференційовних функціоналів                              | 193        |
| §13. Необхідна умова екстремуму основного варіа-<br>ційного функціонала..... | 195        |
| §14. Дослідження квадратичних функціоналів.....                              | 199        |
| §15. Достатня ознака слабкого екстремуму.....                                | 202        |
| <b>Список використаної та рекомендованої</b>                                 |            |
| <b>літератури.....</b>                                                       | <b>209</b> |
| <b>Предметний покажчик.....</b>                                              | <b>210</b> |

## ВСТУП

На другому курсі (в четвертому семестрі) студенти бакалавратів „Системний аналіз” 6.040303 та „Інформатика” 6.040302 Навчально-наукового комплексу „Інститут прикладного системного аналізу” НТУУ „КПІ” вивчають дисципліну „Диференціальні рівняння”.

З теорією звичайних диференціальних рівнянь студенти починають знайомитись ще в курсі математичного аналізу. Саме тоді, в 2-3 семестрах студенти вчаться розв'язувати типові рівняння 1<sup>го</sup> порядку (з подільними змінними; лінійні, Бернуллі, в повних диференціалах); типові рівняння вищого порядку методами зниження порядку; лінійні однорідні та неоднорідні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами (без належного обґрунтування), рівняння Ейлера. Тому в посібнику зовсім не приділяється уваги типовим рівнянням 1<sup>го</sup> та вищих порядків.

Посібник складається з таких розділів:

- диференціальні рівняння 1<sup>го</sup> порядку;
- лінійні диференціальні рівняння та системи;
- лінійні диференціальні рівняння 2<sup>го</sup> порядку;
- автономні системи; теорія перших інтегралів; диференціальні рівняння з частковими похідними першого порядку;
- теорія стійкості;
- варіаційне числення.

Викладення матеріалу починається з доведення фундаментальної теореми теорії диференціальних рівнянь – теореми Коші-Пікара.

Для рівнянь першого порядку, які не задовольняють достатні умови застосування вказаної теореми, наведено техніку їх розв'язання ("метод параметризації"). При цьому виникає ефект неєдиності розв'язку відповідної задачі Коші, що супроводжується наявністю особливих розв'язків цих рівнянь.

У другому розділі розглянуто класичну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь (однорідних та неоднорідних) та застосування цієї теорії до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку. Основою цієї теорії є фундаментальний результат, відповідно до якого система усіх розв'язків однорідної системи  $n$  лінійних диференціальних рівнянь на числовому проміжку утворює лінійний простір розмірності  $n$  (базис якого називається „фундаментальною системою розв'язків” вихідної системи рівнянь).

Якісні властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку розглянуто в третьому розділі. Наведено метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів (звичайних та узагальнених). Цим методом вдається одержати розвинення в ряд багатьох спеціальних функцій, зокрема функцій Бесселя. Для неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку досліджено крайову задачу.



Четвертий розділ присвячено основам теорії автономних (динамічних) систем та її застосуванням. Зокрема техніку перших інтегралів застосовано до розв'язання лінійних та квазілінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку в частинних похідних. Для систем другого порядку розглянуто метод фазових портретів та його застосування до задач класичної механіки.

Основам теорії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь та систем присвячено п'ятий розділ. Наведено основні результати класичної теорії стійкості О.М.Ляпунова для автономних систем та рівнянь.

В шостому розділі посібника розглянуто постановку та найпростіші задачі варіаційного числення. Виведене рівняння Л.Ейлера для пошуку екстремалей основного варіаційного функціонала. Досліджено узагальнення: рівняння Ейлера-Пуассона, систему рівнянь Ейлера-Лагранжа та відповідну систему рівнянь Гамільтона. Розглядаються різні варіанти постановки задач на умовний екстремум та прийоми їх розв'язання. Одержано достатню умову слабкого екстремуму основного варіаційного функціонала.

Основний теоретичний матеріал посібника супроводжується численними прикладами та малюнками.

Вважаю своїм обов'язком висловити щиру подяку своїм аспірантам Я.В. Горбатенку та В.М. Статкевичу, які взяли на себе клопіт комп'ютерного набору посібника, та доценту А.Ю.Мальцеву за допомогу комп'ютерного набору малюнків.

# ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

## РОЗДІЛ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 1<sup>го</sup> ПОРЯДКУ

Під (звичайним) диференціальним рівнянням 1<sup>го</sup> порядку розуміємо рівняння виду  $F(x, y, y') = 0$ , а розв'язок його є функція  $y = y(x)$ , що визначена на деякому числовому проміжку  $\Delta = \langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$  і задовольняє на цьому проміжку тотожність: для  $\forall x \in \Delta$ :  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ . Синоніми "розв'язку" – "інтеграл диференціального рівняння" та "інтегральна крива". При цьому треба розуміти, що розв'язок диференціального рівняння не обов'язково визначений в явній формі – він може бути параметрично визначений або в неявній формі.

### §1. Теорема Пікара

В цьому параграфі розглядаємо диференціальне рівняння 1<sup>го</sup> порядку, що "розв'язне відносно першої похідної", тобто рівняння

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Функція  $f$  припускається визначеною на деякій підмножині  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Ставимо задачу про пошук інтегральної кривої рівняння (1), що проходить через фіксовану точку  $(x_0, y_0) \in D$ , тобто розв'язку, що задовольняє умову:

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Така задача (задача (1)-(2)) називається "задачею Коші".

Виявляється, що за відповідних (не дуже обтяжливих) умов на функцію  $f$ , можна гарантувати існування та єдність локального розв'язку задачі (1)-(2).

**Теорема 1** (Ш. Пікар). Нехай  $(x_0, y_0)$  - внутрішня точка  $D$ , а функція  $f$  неперервна в  $D$  і задовольняє в  $D$  умову Ліпшиця відносно змінної  $y$ , тобто  $\exists C > 0 \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$  виконується нерівність:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2| \quad (3)$$

Тоді існує таке  $\delta > 0$ , що на відрізку  $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  існує і притому єдиний розв'язок задачі (1)-(2).

**Зауваження.** 1. Зрозуміло, що за змістом теореми за множину  $D$  можна взяти околі точки  $(x_0, y_0)$ .

2. Умова Ліпшиця не є обтяжливою: вона виконується в разі існування та неперервності часткової похідної  $\frac{\partial f}{\partial y}$  в околі точки  $(x_0, y_0)$ .

Дійсно, в замкненому околі точки неперервна функція  $\frac{\partial f}{\partial y}$  обмежена за теоремою Вейерштрасса, а тоді умова (3) буде наслідком теореми Лагранжа (обміркуйте!).

**Доведення теореми.** Розв'язок задачі Коші (1)-(2) - це функція  $y(x)$ , для якої:  $y'(x) = f(x, y(x))$ . Тож  $y(x)$  - диференційовна функція. А з огляду на

неперервність складеної функції  $f(x, y(x))$ ,  $y(x)$  – неперервно диференційовна. Звідси:

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \text{ Тож } y(x) -$$

є неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (4)$$

Навпаки. Нехай  $y(x)$  – неперервний розв'язок рівняння (4). Тоді  $y(x_0) = y_0$ , а також права частина (4) є диференційовною функцією аргументу  $x$ . Після диференціювання обох частин (4) одержимо (1).

Тож пошук розв'язків задачі (1)-(2) еквівалентен пошуку неперервних розв'язків рівняння (4).

Не втрачаючи загальності можна вважати, що окіл є замкненим прямокутником  $\Pi = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a; |y - y_0| \leq b\}$ . Тоді неперервна функція  $f$  буде обмеженою на  $\Pi$ :

$$\sup_{\Pi} |f(x, y)| = M. \quad (5)$$

Ідея подальшого доведення полягає в тому, що в просторі неперервних функцій на відрізку  $[x_0 - a; x_0 + a]$  ми розглянемо відображення  $F: g \mapsto F(g)$ , що ставить у відповідь неперервній функції  $g$  нову

функцію за правилом:  $(F(g))(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt$ . При

цьому функція  $F(g)$  також виявляється неперервною і рівняння (4) перетворюється на таке:  $F(y) = y$ .

При подальшому доведенні ми будемо користуватись оцінкою (5), а для цього важливо, щоб графіки наших функцій не виходили за межі прямокутника  $\Pi$ . Це також важливо і з іншої причини: графіки функцій можуть вийти за межі контрольованого околу точки  $(x_0, y_0)$ . Виникає питання: а чи можна досягти бажаної мети шляхом зменшення відрізка аргументу (зменшення  $a$ )?

Візьмемо додатне  $\delta \leq a$ . Тоді

$$\left| (F(g))(x) - y_0 \right| \leq \left| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \right| \leq M\delta \quad \text{і в разі, якщо за } \delta$$

взяти число:  $\delta = \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\}$  ми гарантовано одержимо

нерівність:  $\left| (F(g))(x) - y_0 \right| \leq b$  (в разі, якщо функція  $g$  також має цю властивість, тобто:  $\sup_{|x-x_0| \leq \delta} |g(x) - y_0| \leq b$ ).

Тож тепер пошук розв'язку задачі (1)-(2) зведено до пошуку неперервної на відрізку  $\Delta = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$  функції  $y$ , що задовольняє тотожність:  $F(y) = y$  (а також оцінку:  $\sup_{|x-x_0| \leq \delta} |y(x) - y_0| \leq b$ ). Така функція буде знайдена методом „послідовних наближень”.

Нехай  $g_0(x) \equiv y_0$  на  $\Delta$ , а послідовність функцій  $g_n$  будується за правилом:

$$g_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g_n(t)) dt = (F(g_n))(x) \quad (n = 0; 1; 2; \dots).$$

Доведемо, що функціональна послідовність (неперервних!) функцій  $g_n$  на  $\Delta$  рівномірно збігається і гранична функція буде розв'язком рівняння (4).

З цією метою оцінимо різницю  $|g_{k+1}(x) - g_k(x)|$  на відрізку  $\Delta$ .

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, g_k(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, g_{k-1}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, g_k(t)) - f(t, g_{k-1}(t))| dt \right| \leq C \left| \int_{x_0}^x |g_k(t) - g_{k-1}(t)| dt \right|. \end{aligned}$$

Повторне застосування одержаної нерівності дає:

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(t) - g_k(t)| &\leq C^2 \left| \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t |g_{k-1}(s) - g_{k-2}(s)| ds \right| \leq \dots \leq \\ &\leq C^k \left| \int_{x_0}^x dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{x_0}^{t_{k-1}} |g_1(t_k) - g_0(t_k)| dt_k \right| \leq [ \end{aligned}$$

$$|g_1(s) - g_0(s)| \leq 2ba \quad \Delta \leq C^k 2b \cdot \frac{\delta^k}{k!} \quad (\text{обміркуйте!}).$$

Збіжність числового ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k \delta^k \cdot 2b}{k!}$  за теоремою

Вейерштрасса призводить до рівномірної збіжності на  $\Delta$  функціонального ряду  $g_0(x) + (g_1(x) - g_0(x)) + (g_2(x) - g_1(x)) + \dots$ , тож і функціональної послідовності його часткових сум  $\{g_k(\cdot)\}$ .

Гранична функція  $y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$  є неперервною як рівномірна границя послідовності неперервних

функцій, і для перевірки (4) залишилось довести рівномірну збіжність на  $\Delta$  послідовності функцій  $f(t, g_k(t))$  до функції  $f(t, y(t))$ , бо тоді за відомою теоремою аналізу для всіх  $x \in \Delta$ :

$$\int_{x_0}^x f(t, g_k(t)) dt \rightarrow \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Останній факт є наслідком таких міркувань.  $f$  – рівномірно неперервна на  $\Pi$  (теорема Кантора). Тож  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (|s_1 - s_2| < \delta; t \in \Delta) \Rightarrow (|f(t, s_1) - f(t, s_2)| < \varepsilon)$ . А з іншого боку,  $\exists N \forall n \geq N; \forall t \in \Delta: |g_n(t) - y(t)| < \delta$ . Звідси:  $\forall n \geq N; \forall t \in \Delta: |f(t, g_n(t)) - f(t, y(t))| < \varepsilon$ .

Залишилось довести єдиність неперервного розв'язку (4) на відрізку  $\Delta$ .

Нехай  $z(x)$  – довільний розв'язок і  $y(x)$  – побудований вище. Тоді, як і раніше, для кожного  $x \in \Delta$ :

$$\begin{aligned} |z(x) - g_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, g_{k-1}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq C \left| \int_{x_0}^x |z(t) - g_{k-1}(t)| dt \right| \leq \dots \leq \frac{2bC^k \delta^k}{k!} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тому  $z(x) \equiv y(x)$ . ■

**Узагальнення.** Надалі ми будемо досліджувати системи звичайних диференціальних рівнянь 1<sup>го</sup> порядку виду:

[illegible]

Такі системи можуть бути переписані у векторній формі:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \quad (6)$$

і для них також будемо розглядати задачу Коші:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (7)$$

Виявляється, що наведене вище доведення теореми 1 без жодних ускладнень може бути перенесене на випадок задачі (6)-(7). При цьому інтеграл від векторної функції числового аргументу слід розуміти покоординатно, а в усіх оцінках слід замінювати модуль числа на норму вектора. Єдине, що потребує при цьому перевірки – це оцінка:

$$\left\| \int_{t_0}^t \vec{x}(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\vec{x}(s)\| ds \right| \quad (8)$$

Приходимо до теореме.

**Теорема 2** (Ш. Пікар). Нехай  $\vec{f}$  визначена на  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , неперервна на  $D$  і задовольняє на  $D$  умову Ліпшиця відносно  $n$  останніх аргументів:

$$\exists C > 0 : \quad ((t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in D) \Rightarrow \left( \left\| \vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y}) \right\| \leq C \left\| \vec{x} - \vec{y} \right\| \right);$$

$(t_0, \vec{x}_0)$  – внутрішня точка  $D$ .

Тоді існує таке  $\delta > 0$ , що на відрізку  $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$  існує і притому єдиний розв'язок задачі (6) - (7).



**Вправа 1.** Перевірте (8) та відслідкуйте доведення теореми 2.

**Підказ.** Для неперервних функцій інтеграл є границею інтегральних сум. Спочатку розпишіть (8) для інтегральних сум, а потім обґрунтуйте збереження нерівності при граничному переході.

**Зауваження.** Так само, як і у теоремі 1 достатньо вимагати неперервної диференційовності вектор-функції  $\vec{f}(t, \vec{x})$  в околі  $(t_0, \vec{x}_0)$ .

## §2. Продовження розв'язків

Нехай  $D$  – область (відкрита, зв'язна множина) в  $\mathbb{R}^2$  і  $f:D \rightarrow \mathbb{R}^n$  задовольняє умови теореми 1. Тоді для кожної точки  $(x_0, y_0)$  області  $D$  існує відрізок  $\Delta = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ , на якому розв'язок задачі Коші (1) - (2) існує і цей розв'язок єдиний. Аналіз доведення теореми 1 показує, що те ж саме можна стверджувати і для довільного проміжку  $\tilde{\Delta} \subset \Delta$  в разі, якщо  $x_0 \in \tilde{\Delta}$ .

Якщо  $\Delta_1, \Delta_2$  – два числові проміжки і  $x_0 \in \Delta_1 \subset \Delta_2$ , а  $y_k$  – розв'язки задачі (1) - (2) на проміжку  $\Delta_k$  ( $k=1,2$ ), то в разі, якщо  $y_1 = y_2|_{\Delta_1}$ ,  $y_2$  називається продовженням  $y_1$  на  $\Delta_2$ . Розв'язок  $y$  задачі (1) - (2), для якого продовження не існує, називається не-продовжуваним.

**Теорема 2.** Нехай  $f$  визначена в області  $D \subset \mathbb{R}^2$  і задовольняє умови теореми 1. Тоді для кожної

точки  $(x_0, y_0)$  існує і притому єдиний неперервний розв'язок.

Доведенню теореми передумовимо дві леми.

**Лема 1.** Нехай  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  – розв'язки рівняння (1) відповідно на  $[a; b]$  і  $[b; c]$ , причому  $y_1(b) = y_2(b)$ . Тоді функція

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in [a; b] \\ y_2(x), & x \in [b; c] \end{cases}$$

також є розв'язком.

**Доведення леми.** Рівність  $y'(x) = f(x, y(x))$  потребує перевірки лише в точці  $b$ . Але  $y'_-(b) = y'_1(b) = f(x, y_1(b)) = f(x, y_2(b)) = y'_2(b) = y'_+(b)$ . Тож  $\exists y'(b)$  і при цьому:  $y'(b) = f(b, y(b))$ . ■

**Лема 2.** Нехай  $x_0 \in \Delta_1 \cap \Delta_2$  і  $y_k$  – розв'язок задачі (1) - (2) на  $\Delta_k$  ( $k=1, 2$ ). Тоді  $y_1(x) = y_2(x)$  на  $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$ .

**Доведення леми.** Нехай  $\exists x_1 \in \Delta$ , в якій  $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$ . Нехай  $x_0 < x_1$  (варіант  $x_1 < x_0$  розглядається аналогічно). Тоді існує

$$\tilde{x} = \inf \{x > x_0 \mid y_1(x) \neq y_2(x)\}, \quad (9)$$

а з теореми Пікара виходить, що  $\tilde{x} > x_0$  (бо інакше в кожному околі  $x_0$  було б два різних розв'язки). Тож  $y_1(x) = y_2(x)$  при  $x \in [x_0; \tilde{x})$ , а тому з неперервності  $y_k$ :  $y_1(\tilde{x}) = y_2(\tilde{x})$ . Повторне застосування теореми Пікара, але з початковою умовою:  $y(\tilde{x}) = y_1(\tilde{x}) = y_2(\tilde{x})$

приводить до рівності  $y_1(x) = y_2(x)$  в околі аргументу  $\tilde{x}$ , що суперечить припущенню (9). ■

**Доведення теореми.** Нехай  $\{y_\alpha(\cdot)\}$  – сім'я усіх розв'язків задачі (1) - (2), кожен з яких визначено на відповідному проміжку  $\Delta_\alpha \ni x_0$ . Для довільного числа  $x \in \Delta = \bigcup_\alpha \Delta_\alpha$  покладемо:  $y(x) = y_\alpha(x)$ , якщо  $x \in \Delta_\alpha$ . Коректність завдання функції  $y$  обумовлена лемою 2 (обміркуйте!). Точку  $x$  можна вважати внутрішньою точкою  $\Delta_\alpha$ , бо інакше застосування теореми Пікара в точці  $(x, y_\alpha(x))$  дозволить одержати локальний розв'язок, який за лемою 1 вдається "склеїти" з розв'язком  $y_\alpha$  і, для нового розв'язку  $y_\beta$ ,  $x$  вже стане внутрішньою точкою  $\Delta_\beta$ . Тож  $y'(x) = y'_\alpha(x) = f(x, y_\alpha(x)) = f(x, y(x))$ . Оскільки  $\forall \alpha: \Delta_\alpha \subset \Delta$ , то  $y$  – неперодовжуваний.

Єдиність неперодовжуваного розв'язку. Якщо  $y_1$  і  $y_2$  – два неперодовжуваних розв'язки задачі (1) - (2), то, як виходить з леми 2, достатньо перевірити:  $\Delta_1 = \Delta_2$  для відповідних проміжків визначення. В разі, якщо  $\Delta_1 \neq \Delta_2$ , функція

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & \text{якщо } x \in \Delta_1 \\ y_2(x), & \text{якщо } x \in \Delta_2 \setminus \Delta_1 \end{cases} \quad \text{буде розв'язком}$$

рівняння (1) (відслідкуйте можливі взаємні положення  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$ ), що суперечить неперодовжуваності  $y_1$  та  $y_2$ . ■

**Вправа 2.** Доведіть, що проміжок визначення  $\Delta$  неперодовжуваного розв'язку є відкритим інтервалом.

**Зауваження.** Не уточнюючи зміст наступного твердження, повідомимо, що в разі обмеженості області  $D$ , розв'язок задачі (1) - (2) продовжується "впритул до межі області".

### **§3. Рівняння, що не розв'язні відносно похідної. Метод параметризації**

Нехай диференціальне рівняння першого порядку не розв'язне відносно похідної (має вид  $F(x, y, y') = 0$ ). Тоді, в разі, якщо  $F$  є функцією класу  $C^1$  (неперервно диференційовна) в області  $D \subset \mathbb{R}^3$ , а в точці  $(x_0, y_0, p_0) \in D$ :  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ ;  $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) \neq 0$ , то, за теоремою про неявну функцію, в околі точки  $(x_0, y_0, p_0)$  рівняння  $F(x, y, p) = 0$  еквівалентне рівнянню  $p = f(x, y)$  з функцією  $f$  класу  $C^1$ . Ці міркування дозволяють замінити при локальному дослідженні вихідне диференціальне рівняння на рівняння типу (1).

Далі розглядається інший прийом розв'язання рівнянь  $F(x, y, y') = 0$ , який може стати в нагоді навіть і тоді, коли виконуються вищенаведені умови і вдається перейти до рівняння типу (1).

Шукаємо розв'язок рівняння  $F(x, y, y') = 0$  у параметричному вигляді. Тож нам слід знайти

функцію  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , що на деякому проміжку  $\Delta = \{t\}$

задовольняє тотожність:

$$F\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = 0 \quad (10)$$

За відповідних умов (гладкість функції  $F$ ) множина  $S = \{(x, y, p) | F(x, y, p) = 0\}$  являє собою поверхню у просторі  $\mathbb{R}^3$ , яка може бути задана і в

параметричному вигляді:  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ p = p(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2.$

Тож  $F(x(u, v), y(u, v), p(u, v)) \equiv 0$  на  $G$ .

Розв'язку рівняння відповідає крива

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ p = p(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \end{cases},$  що задовольняє на  $\Delta$  тотожність:

$F(x(t), y(t), p(t)) \equiv 0$ , а тому належить поверхні  $S$ .

Цій кривій у свою чергу в площині параметрів

$\{(u, v)\}$  відповідає крива  $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ . Тож:

$$\begin{cases} x(t) = x(u(t), v(t)) \\ y(t) = y(u(t), v(t)) \\ p(t) = p(u(t), v(t)). \end{cases}$$

При цьому:

$$p(u(t), v(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t))\dot{v}(t)}{\frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t))\dot{u}(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t))\dot{v}(t)}. \quad (11)$$

Звідси:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t)) p(u(t), v(t)) - \frac{\partial y}{\partial u}(u(t), v(t)) \right) \dot{u}(t) + \\ & + \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u(t), v(t)) p(u(t), v(t)) - \frac{\partial y}{\partial v}(u(t), v(t)) \right) \dot{v}(t) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а це, власне, значить, що крива  $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$  є

розв'язком рівняння:

$$\left( \frac{\partial x}{\partial u} \cdot p - \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial x}{\partial v} \cdot p - \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = 0. \quad (13)$$

Таким чином, розв'язку  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  рівняння (10) в

координатах  $(u, v)$  відповідає крива, що є розв'язком рівняння (13).

**Твердження 1** (зворотне). Нехай  $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$  –

розв'язок рівняння (13). Тоді  $\begin{cases} x(t) = x(u(t), v(t)) \\ y(t) = y(u(t), v(t)) \end{cases}$  є

розв'язком рівняння (10).

**Доведення.** Розв'язок (13) – це власне крива, що задовольняє тотожність (12). З (12) та (11)

виходить:  $p(t) = p(u(t), v(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ . А оскільки крива

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ p = p(t) \end{cases}, \quad \text{що відповідає} \quad \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, \quad \text{задовольняє}$$

тотожність:  $F(x(t), y(t), p(t)) = 0$  (належить поверхні  $S$ ), то для неї виконується (10). ■

**Зауваження.** Рівняння (13) може бути переписано у вигляді  $\left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) p = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$  і може бути одержано з тотожності

$$dy = p dx \quad (14)$$

**Застосування. 1.** Рівняння Клеро

$$y = xy' + f(y').$$

Тут  $F(x, y, p) = xp + f(p) - y; F(x, y, y') = 0$ . Параметризація:

$$\begin{cases} x = u \\ y = uv + f(v) \\ p = v \end{cases}$$

З (14) маємо:  $d(uv + f(v)) = v du;$

$$u dv + v du + f'(v) dv = v du;$$

$$\begin{cases} u = -f'(v) \\ dv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -f'(v) \\ y = -vf'(v) + f(v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = Cu + f(C) \end{cases} \Leftrightarrow y = Cx + f(C)$$

**Приклад.**  $y = xy' + (y')^2.$  
$$\begin{cases} y = Cx + C^2 \\ y = -\frac{x^2}{4} \end{cases}$$

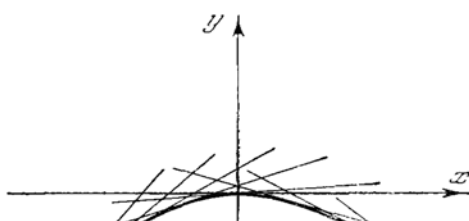


Рис.1

2. Рівняння Лагранжа. Рівняння Лагранжа є узагальненням рівняння Клеро:

$$y = a(y')x + b(y').$$

Замінімо  $y'$  через  $p$ ;  $dy = p dx$ .

$$d(a(p)x + b(p)) = p dx; x a'(p) dp + a(p) dx + b'(p) dp = p dx;$$

$$(a(p) - p) dx + (x a'(p) + b'(p)) dp = 0.$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{a'(p)}{a(p) - p} x - \frac{b'(p)}{a(p) - p} \quad - \quad \text{лінійне неоднорідне}$$

рівняння 1<sup>го</sup> порядку і т. д.

#### §4. Особливі розв'язки та обвідні.

**Означення.** Точка  $(x_0, y_0)$  називається точкою неєдиності (розгалуження) розв'язків рівняння  $F(x, y, y') = 0$ , якщо в цій точці дотикаються принаймні два розв'язки, що не співпадають в жодному околі цієї точки.

Точки розгалуження можуть виникати тоді, коли в точці  $(x_0, y_0)$  не спрацьовує теорема про неявну функцію, тобто точки  $(x_0, y_0, y'(x_0))$  задовольняють систему:



$$\begin{cases} F(x_0, y_0, p_0) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

або втрачається гладкість функції  $F$  в цій точці.

**Приклади.** 1. Рівняння  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ . Загальний розв'язок:  $y = (x + C)^3$ . Точки  $(x, 0)$  – точки неєдиності. Причина: права частина вихідного диференціального рівняння не диференційовна при  $y = 0$  і локально не виконується умова Ліпшиця.

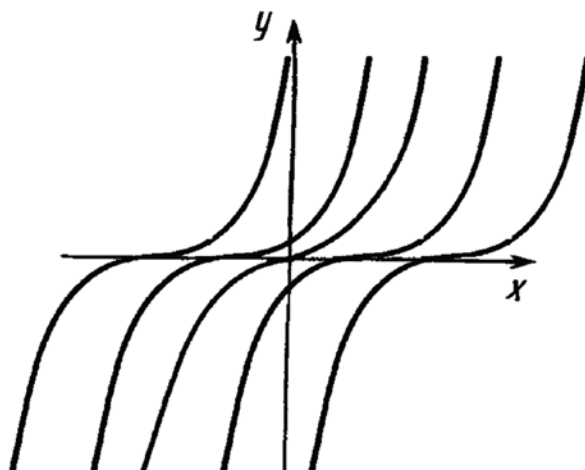


Рис.2

2. Рівняння  $y = xy' + (y')^2$ . Як можна побачити на мал. 1: всі точки, що належать параболі  $y = -\frac{x^2}{4}$  є точками неєдиності. Причина: ці точки (і це буде зрозумілим з подальшого) задовольняють систему рівнянь (15). На мал. 1 є також точки, в яких розв'язки мають перетин. Такі точки виникають саме тому, що при розв'язанні рівняння Клеро відносно  $y'$  приходимо до сукупності рівнянь, розв'язних відносно  $y'$ . Ці точки ми не відносимо до точок неєдиності.

**Означення.** Інтегральна крива (розв'язок)  $\Gamma$  називається особливою інтегральною кривою (особливим розв'язком), якщо  $\forall (x_0, y_0) \in \Gamma$  є точкою розгалуження розв'язків диференціального рівняння.

**Приклади.** 1. Рівняння  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ . Розв'язок  $y \equiv 0$  є особливим.

2. Розглянемо рівняння Клеро  $y = xy' + f(y')$ , в якому  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ;  $\forall p \in \mathbb{R} : f''(p) \neq 0$ . Тому  $f'$  – строго монотонна;  $f$  – строго опукла на  $\mathbb{R}$ . Підозрілими точками (на предмет неєдиності) є точки, що задовольняють систему (15):

$$\begin{cases} F(x, y, p) = -y + xp + f(p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = x + f'(p) = 0. \end{cases}$$

Звідси: 
$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases} \quad - \quad \text{параметричне}$$

завдання кривої  $\Gamma$ , що підпадає під підозру як особлива.

Те, що крива  $\Gamma$  є розв'язком, ми вже знаємо (див. §3).

Строга монотонність і диференційовність функції  $f'$  дає можливість ввести у розгляд обернену до неї диференційовну функцію  $g: p = g(x)$ . Тоді рівняння кривої  $\Gamma$  прийме вид:

$$y = xg(x) + f(g(x)). \quad (16)$$

Доведемо, що кожна точка кривої (16) є точкою неєдиності. Нагадаємо, що рівняння Клеро має сім'ю

розв'язків:  $y = Cx + f(C)$ . Доведемо, що через кожну точку  $(x_0, y(x_0))$  кривої (16) проходить принаймні одна пряма вказаної сім'ї; що дотикається  $\Gamma$ .

Коефіцієнт  $C$  цієї прямої шукаємо як розв'язок системи (співвідношення значень ординат та кутових коефіцієнтів в точці  $x_0$ ):

$$\begin{cases} Cx_0 + f(C) = x_0 g(x_0) + f(g(x_0)) \\ C = g(x_0) + x_0 g'(x_0) + f'(g(x_0))g'(x_0). \end{cases}$$

Оскільки  $f'(g(x_0)) = -x_0$ , то система сумісна і при цьому  $C = g(x_0)$ . Оскільки

$y' = (xg(x) + f(g(x)))' = xg'(x) + g(x) + f'(g(x))g'(x) = g(x)$ , а функція  $g$  (обернена до  $-f'$ ) не може бути сталою на жодному проміжку аргументу, то в жодному околі точки  $(x_0, y(x_0))$  крива  $\Gamma$  не може співпасти з прямою. Тож  $\Gamma$  – особливий розв'язок.

**Означення.** Нехай є сім'я  $\{\Gamma_\alpha\}$  кривих в  $\square^2$ . Крива  $\Gamma$  називається обвідною сім'ї  $\{\Gamma_\alpha\}$ , якщо для кожної точки  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  існує крива сім'ї  $\{\Gamma_\alpha\}$ , що дотикається  $\Gamma$  в цій точці і не співпадає з  $\Gamma$  в жодному околі  $(x_0, y_0)$ .

**Приклади.** 1. Пряма  $y \equiv 0$  є обвідною сім'ї кривих  $\{y = (x + C)^3\}$  (див. мал. 2).

2.  $y = -\frac{x^2}{4}$  є обвідною сім'ї прямих  $\{y = Cx + C^2\}$  (мал. 1). І взагалі особливий розв'язок

диференціального рівняння 1<sup>го</sup> порядку, як виходить з означень, буде обвідною деякої сім'ї розв'язків.

Надалі будемо вважати, що сім'ю  $\{\Gamma_\alpha\}$  визначено рівнянням (тут  $C$  – параметр):

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (17)$$

тобто  $\Gamma_C = \{(x, y) | \Phi(x, y, C) = 0\}$ .

Нехай  $\Gamma$  – обвідна сім'ї (17). Поставимо у відповідь точці  $(x, y) \in \Gamma$  значення параметра  $C$ , при якому  $\Gamma_C$  дотикається до  $\Gamma$  в точці  $(x, y)$ . Така відповідність не є обов'язково взаємно однозначною, але дозволяє параметризувати точки кривої  $\Gamma$  параметром  $C$ :  $x = x(C); y = y(C)$  (взагалі кажучи, може так статись, що  $(x(C_1), y(C_1)) = (x(C_2), y(C_2))$  при  $C_1 \neq C_2$ ). Тож

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C). \end{cases} \quad (18)$$

Припускаємо надалі: всі функції, що зустрічаються є диференційовними.

**Твердження 2 (необхідна умова обвідної).** Якщо (18) – обвідна сім'ї (17), то  $(x(C), y(C))$  задовольняє систему:

$$\begin{cases} \Phi(x(C), y(C), C) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C}(x(C), y(C), C) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

**Доведення.** Умова  $\Phi(x(C), y(C), C) = 0$  очевидна – це умова параметризації  $\Gamma$ . Оскільки обвідна дотикається до кривої сім'ї (17), то

$$\frac{\dot{y}(C)}{\dot{x}(C)} = -\frac{\Phi'_x(x(C), y(C), C)}{\Phi'_y(x(C), y(C), C)}, \quad \text{звідки:}$$

$$\Phi'_x(x(C), y(C), C)\dot{x}(C) + \Phi'_y(x(C), y(C), C)\dot{y}(C) = 0. \quad \text{Тому :}$$

$$0 = \frac{d}{dC}\Phi(x(C), y(C), C) = \Phi'_x(x(C), y(C), C)\dot{x}(C) + \\ + \Phi'_y(x(C), y(C), C)\dot{y}(C) + \Phi'_C(x(C), y(C), C) = \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x(C), y(C), C),$$

що й дає другу рівність в системі (19). ■

**Приклад.**  $(x-C)^2 + y^2 = 1$  - система кіл. З малюнку (зробіть його!) можна побачити, що прямі  $y=1$  та  $y=-1$  є обвідними цієї сім'ї.

Система (19) в даному разі приймає вид:

$$\begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = 1 \\ 2(x-C) = 0, \end{cases}$$

звідки  $y = \pm 1$ .

## РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ

### §1. Початкові поняття

Систему диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій дійсного аргументу  $t$ , що має вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)x_j(t) + f_1(t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)x_j(t) + f_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

надалі будемо називати системою лінійних диференціальних рівнянь (першого порядку).  
Коротше: системою ЛДР.

Тут  $a_{ij}(t)$  – функції, що визначені на числовому проміжку  $\Delta \subset \mathbb{R}$ ;  $f_i(t)$  – також функції, що визначені на  $\Delta \subset \mathbb{R}$ . В разі, якщо всі  $f_i(t) \equiv 0$  на  $\Delta$ , систему (1) називаємо однорідною. Якщо ні – неоднорідною. Зверніть увагу на те, що кількість рівнянь в (1) співпадає з кількістю невідомих функцій.

Систему можна переписати й у вигляді:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad (2)$$

$$\text{де } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = (a_{ij}(t)) - \text{квадратна}$$

матриця при кожному  $t \in \Delta$ .

Задача Коші для системи (2) (або (1)) – це задача пошуку розв'язку, що задовольняє початкову умову:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (3)$$

для фіксованої точки  $t_0 \in \Delta$ .

Ми будемо також розглядати лінійні диференціальні рівняння  $n$ -го порядку для числових функцій (коротше: ЛДР)

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = g(t), \quad (4)$$

де  $a_1(t), \dots, a_n(t)$  (коефіцієнти);  $g(t)$  (неоднорідність; права частина ЛДР) – функції на  $\Delta \subset \mathbb{R}$ . В разі, якщо  $g(t) \equiv 0$  на  $\Delta$ , ЛДР – однорідне (антитеза – неоднорідне).

Задачу Коші для рівняння (4) ставимо як систему умов:

$$x(t_0) = \tilde{x}_0; \dot{x}(t_0) = \tilde{x}_1; \dots; x^{(n-1)}(t_0) = \tilde{x}_{n-1} \quad (5)$$

Якщо поставити у відповідність числовій функції

$$x(t) \text{ вектор-функцію } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \text{ то з рівнянням}$$

(4) можна пов'язати таку систему ЛДР:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) \\ \dots \\ \frac{d}{dt}x^{(n-2)}(t) = x^{(n-1)}(t) \\ \frac{d}{dt}x^{(n-1)}(t) = -a_1(t)x^{(n-1)}(t) - a_2(t)x^{(n-2)}(t) - \dots - a_n(t)x(t) + g(t), \end{array} \right.$$

або систему (2) в разі, якщо

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

При цьому відповідна початкова умова задачі Коші:

$$\vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix}$$

Тож цілком природним є чекання на те, що результати, які будуть одержані для систем ЛДР, будуть мати неабиякий вплив на дослідження поведінки розв'язків ЛДР вищих порядків.

Надалі всі функції (для визначеності) припускаємо дійснозначними. Але цілком аналогічні результати можуть бути одержані і у випадку комплекснозначних функцій. У свій час ми скористаємось цією обставиною.



## §2. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь

**Теорема 1.** Нехай елементи  $a_{ij}(\cdot)$  матриці  $A(\cdot)$  є неперервними функціями на  $\Delta = [a; b] \subset \mathbb{R}$ . Тоді для кожного  $t_0 \in [a; b]$  та  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  однорідна система ЛДР

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}(t) \quad (6)$$

має і притому єдиний розв'язок  $\vec{x}(t)$ , що визначений на всьому  $\Delta$  і задовольняє умову:  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ .

**Доведення.** Нагадаємо спочатку, що в курсі математичного аналізу було доведено, що для кожної матриці  $A$  ( $n \times n$ ) існує число  $C$  таке, що для  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$  виконується нерівність:  $\|A\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|$ . Детальніше:

$$C = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad (7)$$

$$\|A\vec{x}\|^2 = \sum_i \left( \sum_j a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_i \left( \sum_j a_{ij}^2 \right) \left( \sum_j x_j^2 \right) = C^2 \|\vec{x}\|^2.$$

Число  $C$  визначене в (7), домовимось називати нормою матриці  $A$  ( $C = \|A\|$ ).

Крім того, раніше було обговорена нерівність для неперервних вектор-функцій:

$$\left\| \int_{t_0}^t \vec{x}(s) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\vec{x}(s)\| ds \quad (8)$$

Детальніше (через інтегральні суми):

$$\left\| \int_{t_0}^t \bar{x}(s) ds \right\| = \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^m \bar{x}(s_j) \frac{t-t_0}{m} \right) \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^m \bar{x}(s_j) \frac{t-t_0}{m} \right\| \leq$$

$$\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^m \left\| \bar{x}(s_j) \right\| \frac{|t-t_0|}{m} \right) = \left| \int_{t_0}^t \left\| \bar{x}(s) \right\| ds \right|.$$

При цьому ми скористались неперервністю норми:  
 $(\bar{x}_k \rightarrow \bar{x}_0) \Rightarrow (\|\bar{x}_k\| \rightarrow \|\bar{x}_0\|)$  (перевірте!), бо це й значить  
 $\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\bar{x}_k\|.$

Як і при доведенні теореми Пікара (теорема 1.1), ми робимо висновок про те, що задача Коші (6) - (3) еквівалентна задачі пошуку неперервного розв'язку інтегрального рівняння для вектор-функцій:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s) \bar{x}(s) ds \quad (9)$$

Кожній функції  $\bar{x}(t)$ , що неперервна на  $[a; b]$ , поставимо у відповідь нову функцію

$$(F(\bar{x}))(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s) \bar{x}(s) ds, \quad \text{що також неперервна на}$$

$[a; b]$  і тим самим є передумови для побудови, як і в доведенні теореми Пікара, послідовності неперервних на  $\Delta$  функцій:  $\bar{x}_0(t) \equiv \bar{x}_0; \bar{x}_m(t) = (F(\bar{x}_{m-1}))(t),$   
 $m = 1, 2, \dots$

Числова функція  $\|A(t)\| = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2(t) \right)^{1/2}$  є неперервною функцією на замкненому відрізку  $[a;b]$  і тому, за теоремою Вейерштрасса, існує  $M = \max_{a \leq t \leq b} \|A(t)\| < +\infty$ .

Звідси:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_m(t) - \vec{x}_{m-1}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s) (\vec{x}_{m-1}(s) - \vec{x}_{m-2}(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s) (\vec{x}_{m-1}(s) - \vec{x}_{m-2}(s))\| ds \right| \leq M \left| \int_{t_0}^t (\|\vec{x}_{m-1}(s) - \vec{x}_{m-2}(s)\|) ds \right| \leq \dots \\ &\dots \leq M^m \left| \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots dt_{m-1} \int_{t_0}^{t_{m-1}} \|\vec{x}_1(t_m) - \vec{x}_0\| dt_m \right| \leq \\ &\frac{M^m |t - t_0|^m}{m!} \max_{s \in \Delta} \|\vec{x}_1(s) - \vec{x}_0\|. \end{aligned}$$

Числовий ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{M^m |t - t_0|^m}{m!}$  збіжний, тому рівномірно збігається на  $\Delta$  функціональний ряд  $\vec{x}_0(t) + (\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)) + (\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)) + \dots$ , а це власне доводить рівномірну на  $\Delta$  збіжність послідовності вектор-функцій  $\vec{x}_m(t)$ . Якщо позначити  $\vec{x}(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m(t)$ , то оцінка:  $\|A(s)(\vec{x}(s) - \vec{x}_m(s))\| \leq M \|\vec{x}(s) - \vec{x}_m(s)\|$  дозволяє стверджувати рівномірну збіжність

$$A(s) \vec{x}_m(s) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A(s) \vec{x}(s) \quad \text{на } \Delta, \quad \text{а тому} \quad \forall t \in \Delta:$$

$$\int_{t_0}^t A(s) \bar{x}(s) ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t A(s) \bar{x}_m(s) ds. \quad \text{Тепер} \quad (9) \quad \text{одержимо}$$

граничним переходом  $m \rightarrow \infty$  з рівності:

$$\bar{x}_m(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t A(s) \bar{x}_{m-1}(s) ds.$$

Єдиність розв'язку задачі Коші доведіть самостійно. Її доведення проводиться за тією ж схемою, що й єдиність в теоремі Пікара. ■

При доведенні теореми умова замкненості проміжку  $\Delta$  була використана для обґрунтування обмеженості на  $\Delta$  норми  $\|A(t)\|$ . Насправді, замкненість  $\Delta$  не є принциповою для самого результату теореми: в ситуації, якщо  $\Delta$  не є відрізок, і  $t_0 \in \Delta$ , для  $\forall t_1 \in \Delta \exists$  відрізок  $[a; b] \subset \Delta$ , для якого  $t_0, t_1 \in [a; b]$ . Тоді доведена теорема гарантує існування на  $[a; b]$  єдиного розв'язку задачі Коші. Незалежність значення розв'язку в  $t_1$  від вибору  $[a; b]$  доведіть самостійно.

Тому при подальшому дослідженні на проміжок  $\Delta$  не накладаємо умову замкненості.

Запровадимо у розгляд "диференціальний вираз"  
 $L: \bar{x}(t) \mapsto \dot{\bar{x}}(t) - A(t) \bar{x}(t).$  Функції  $\bar{x}(\cdot) \in C^1(\Delta)$   
 (неперервно диференційовній на проміжку  $\Delta$ )  
 ставимо у відповідь функцію  $(L\bar{x})(\cdot) \in C(\Delta)$   
 (неперервну на  $\Delta$ ).

Система рівнянь (6) набуває вигляду:

$$L\bar{x} = \vec{0}. \quad (6)$$

$L$  - є лінійне відображення з  $C^1(\Delta)$  в  $C(\Delta)$ .

Тому, якщо  $\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t)$  - розв'язки (6), то довільна їх лінійна комбінація  $C_1\bar{x}_1(t) + \dots + C_m\bar{x}_m(t)$  також буде розв'язком (6).

Фіксуємо  $t_0 \in \Delta$  і побудуємо відображення, що ставить у відповідь кожному розв'язку  $\bar{x}(t)$  рівняння (6) (тобто  $\bar{x} \in \text{Ker } L$ ) вектор  $\bar{x}(t_0)$  (значення  $\bar{x}(t)$  в точці  $t_0$ ). Це відображення  $B(t_0): \text{Ker } L \rightarrow \mathbb{R}^n$  є, вочевидь, лінійним оператором. При цьому, як виходить з теореми 1,  $B(t_0)$  взаємно однозначно відображує  $\text{Ker } L$  на весь простір  $\mathbb{R}^n$  (обміркуйте). Тому  $B(t_0)$  є ізоморфізмом.

**Наслідки:** 1. Система розв'язків  $\{\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t)\}$  рівняння (6) - лінійно незалежна на  $\Delta$  в тому й тільки тому разі, якщо  $\{\bar{x}_1(t_0), \dots, \bar{x}_m(t_0)\}$  - лінійно незалежна система векторів в  $\mathbb{R}^n$ .

2.  $\dim \text{Ker } L = n$  (розмірність простору розв'язків рівняння (6) дорівнює  $n$ ). При цьому базис простору  $\text{Ker } L$  називається "фундаментальною системою розв'язків однорідної системи ЛДР (6)".

Розглянемо матричнозначну функцію  $X(t)$ , стовпці якої утворюють фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (6):  $X(t) = (\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t))$ . Загальний розв'язок системи (6):  $\bar{x}(t) = C_1\bar{x}_1(t) + \dots + C_n\bar{x}_n(t)$  можна записати і так:

$$\bar{x}(t) = X(t)\vec{C}, \quad (10)$$

де  $\vec{C}$  – стовпець  $\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ . Така матричнозначна функція

$X(t)$  називається фундаментальною матрицею системи (6).

Фундаментальна матриця системи (6), вочевидь, задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t), \quad (11)$$

Для кожного стовпця матриці  $Y(t)$ :

$\frac{d}{dt}\vec{y}_k(t) = A(t)\vec{y}_k(t)$ , тож рівняння (11) можна мислити як набір, складений з  $n$  систем рівнянь (6).

**Вправа.** 1. Нехай  $Y(t)$  – довільний розв'язок матричного рівняння (11). Тоді для будь-яких  $t_1, t_2 \in \Delta$  матриці  $Y(t_1), Y(t_2)$  вироджені або не вироджені одночасно.

2. Якщо  $X(t)$  – фіксована фундаментальна матриця системи (6), то загальний розв'язок рівняння (11) має вид:  $Y(t) = X(t)C$ , де  $C$  – довільна квадратна матриця.

### §3. Формула Ліувілля – Якобі

**Теорема 2** (Ж. Ліувілля; К. Якобі). Нехай  $A(t)$  – неперервна на проміжку  $\Delta$  матричнозначна функція;  $t_0, t \in \Delta$ ;  $Y(t)$  – розв'язок рівняння (11). Тоді

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}$$

**Лема 1.** Нехай для кожного  $t \in \Delta$  матриця  $B(t)$  – квадратна  $n \times n$ ;  $B(t)$  – диференційовна функція на  $\Delta$  (всі елементи матриці:  $b_{ij}(t)$  є диференційовними функціями на  $\Delta$ ). Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det B(t) = & \begin{vmatrix} b'_{11}(t) & \cdots & b'_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b'_{21}(t) & \cdots & b'_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{n1}(t) & \cdots & b'_{nn}(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Доведення леми.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det B(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \sigma} b_{1,\sigma(1)}(t) b_{2,\sigma(2)}(t) \dots b_{n,\sigma(n)}(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \sigma} b_{1,\sigma(1)}(t) \dots b_{k-1,\sigma(k-1)}(t) b'_{k,\sigma(k)}(t) b_{k+1,\sigma(k+1)}(t) \dots b_{n,\sigma(n)}(t) . \blacksquare \end{aligned}$$

**Доведення теореми 2.** Нехай  $Y(t)$  – розв'язок рівняння (11). Тоді за лемою 1:

$$\frac{d}{dt}(\det Y(t)) = \sum_{k=1}^n \det Y_k(t), \quad \text{де матриця } Y_k(t) \text{ одержана з}$$

$Y(t)$  диференціюванням  $k$ -го рядка.

Маємо:

$$\begin{aligned}
Y_k(t) &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} Y'(t) = \\
&= \left( \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} A(t) \right) Y(t) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ a_{k1}(t) & \cdots & \cdots & a_{kk}(t) & \cdots & \cdots & a_{kn}(t) \\ & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} Y(t).
\end{aligned}$$

Тому

$$\det Y_k(t) = a_{kk}(t) \det Y(t),$$

звідси:

$$\frac{d}{dt} \det Y(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot \det Y(t); \quad \det Y(t) = C \cdot e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds}, \quad \text{де}$$

$C = \det Y(t_0).$  ■



#### §4. Однорідні лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку

В цьому параграфі досліджуємо рівняння:

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = 0. \quad (12)$$

Тут  $L$  – лінійний диференціальний оператор порядку  $n$ ;  $t$  пробігає числовий проміжок  $\Delta \subset \mathbb{R}$ .

Задача Коші для рівняння (12) задається системою умов (5). В §1 була виявлена взаємно однозначна відповідність між розв'язками поставленої задачі Коші та розв'язками задачі Коші для однорідної системи ЛДР зі спеціального виду матрицею  $A(t)$ . Тому, з посиланням на теорему 1, можна зробити висновок:

**Твердження 1.** В разі, якщо коефіцієнти  $a_k(t)$  ( $k=1, \dots, n$ ) рівняння (12) є неперервними функціями на  $\Delta$ , для будь-яких  $t_0$  та  $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{n-1}$ , задача Коші (12)–(5) має і притому єдиний розв'язок на  $\Delta$ . Розв'язок задачі (12)–(5) є функцією класу  $C^{(n)}(\Delta)$ . ■ (Обміркуйте!)

**Означення.** Нехай  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  – система (числових) функцій класу  $C^{(m-1)}(\Delta)$ . Функція:

$$W(x_1, \dots, x_m) = W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_m(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_m'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(m-1)}(t) & \dots & x_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix}$$

називається "вронскіаном системи функцій  
 $\{x_1(t), \dots, x_m(t)\}$ " (на честь польського математика  
Юзефа Вронського).

**Вправа.** 1. Якщо система функцій  $\{x_1(t), \dots, x_m(t)\}$  –  
лінійно залежна на  $\Delta$ , то  $W(t) \equiv 0$ .

2. Якщо існує  $t_0 \in \Delta$ , в якій  $W(t_0) \neq 0$ , то система  
функцій  $\{x_1(t), \dots, x_m(t)\}$  – лінійно незалежна.

3. Наведіть приклад лінійно незалежної системи  
функцій  $\{x_1(t), x_2(t)\}$ , для якої  $W(t) \equiv 0$  на  $\Delta$ .

Фіксуємо  $t_0 \in \Delta$  і кожному розв'язку  $x(t)$  рівняння

$$(12) \text{ поставимо у відповідь вектор } \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Оскільки  $L$  є лінійним оператором (перевірте!),  
то множина усіх розв'язків рівняння (12) ( $\text{Ker } L$ ) є  
лінійним простором. Відображення

$$B(t_0): x(t) \mapsto \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \text{ є лінійним оператором і, як}$$

виходить з твердження 1, повинно бути ізоморфізмом  
між  $\text{Ker } L$  та  $\mathbb{R}^n$ . Звідси:  $\dim \text{Ker } L = n$ .

Наслідком наведених міркувань є наступне  
твердження:

**Твердження 2.** Нехай  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – система, складена з  $n$  розв'язків рівняння (12). Тоді:

1) Якщо існує точка  $t_0 \in \Delta$ , в якій  $W(t_0) = 0$ , то  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – лінійно залежна система функцій і при цьому для  $\forall t \in \Delta: W(t) = 0$ .

2) Якщо існує  $t_0 \in \Delta$ , в якій  $W(t_0) \neq 0$ , то система розв'язків  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – лінійно незалежна і при цьому для  $\forall t \in \Delta: W(t) \neq 0$ . Така система розв'язків є базисом в просторі розв'язків і називається “фундаментальною системою розв'язків рівняння (12)”. ■

## §5. Формула Остроградського – Ліувілля

Поставимо таку задачу. Є система функцій  $x_1(t), \dots, x_n(t) \in C^{(n)}(\Delta)$ . Відомо, що  $W(t) = W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  для кожної точки  $t \in \Delta$ . Шукаємо однорідне ЛДР  $n$ -го порядку, для якого ці функції  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  утворюють фундаментальну систему розв'язків.

**Твердження 3.** Існує і притому єдине однорідне ЛДР  $n$ -го порядку виду (12) з неперервними коефіцієнтами, для якого функції  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  утворюють фундаментальну систему розв'язків.

**Доведення.** Спочатку перевіримо єдиність такого рівняння. Нехай окрім рівняння (12) таку властивість має і рівняння

$$x^{(n)}(t) + b_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + b_n(t)x(t) = 0. \quad (13)$$

В разі, якщо  $b_1(t) \neq a_1(t)$ , існує проміжок  $\Delta_1 \subset \Delta$ , в кожній точці якого:  $a_1(t) - b_1(t) \neq 0$  (обміркуйте!). Тоді вихідна система функцій є лінійно незалежною системою розв'язків рівняння

$$(a_1(t) - b_1(t))x^{(n-1)}(t) + \dots + (a_n(t) - b_n(t))x(t) = 0$$

на  $\Delta_1$ , яке є рівнянням порядку  $(n-1)$  (після ділення на  $a_1(t) - b_1(t) \neq 0$ ), а тому не може мати  $n$  лінійно незалежних розв'язків.

Тож  $a_1(t) \equiv b_1(t)$  і переходимо до порівняння  $a_2(t)$  з  $b_2(t)$ . Повторення наведених міркувань поступово приводить до висновку про єдиність набору усіх коефіцієнтів.

Існування. Розглянемо рівняння:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) & x(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) & x'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) & x^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Після розкриття визначника за останнім стовпцем, коефіцієнт при  $x^{(n)}(t)$  дорівнює  $W(t)$ . Умова:  $W(t) \neq 0$  в жодній точці  $\Delta$ , дозволяє, після ділення на  $W(t)$ , одержати рівняння вигляду (12). ■

**Теорема 3** (М. Остроградський; Ж. Ліувіль).

Нехай  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – система розв'язків рівняння (12). Тоді на  $\Delta$  виконується рівність:

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}. \quad (15)$$

**Доведення.** Якщо система розв'язків лінійно залежна, то  $W(t) \equiv 0$  і формула (15) очевидна. Нехай система розв'язків  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – лінійно незалежна. Тоді за твердженням 3, рівняння (12) співпадає з (14), а тому:

$$a_1(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}. \quad \text{Тепер застосування}$$

леми 1 приводить до формули:  $a_1(t) = -\frac{W'(t)}{W(t)}$

(обміркуйте!), звідки:  $W(t) = C \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}$ ;  $C = W(t_0)$ . ■

**Вправа.** Виведіть теорему 3 з формули Ліувілля – Якобі (див. теорему 2).

**Застосування.** Розглянемо рівняння другого порядку:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0. \quad (16)$$

Нехай відомий один нетривіальний (ненульовий) розв'язок  $x_1(t)$  рівняння (16). Якщо  $x(t)$  – довільний розв'язок (16), то за формулою (15) маємо:

$$\begin{vmatrix} x(t) & x_1(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{x}_1(t) \end{vmatrix} = C e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds}.$$

Це рівняння 1<sup>го</sup> порядку відносно  $x(t)$ ; лінійне, неоднорідне; при  $C=1$  його частковий розв'язок  $x(t)$

разом з  $x_1(t)$  утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (16).

Інший спосіб розв'язання рівняння (16) при наявності розв'язку  $x_1(t)$ : покладемо  $x(t) = y(t) \cdot x_1(t)$ .

Тоді:  $x'(t) = x_1(t)y'(t) + x_1'(t)y(t)$ ;

$x''(t) = x_1(t)y''(t) + 2x_1'(t)y'(t) + x_1''(t)y(t)$ ; тож підстановка в (16) дає:

$$x_1(t)y''(t) + (2x_1'(t) + a_1(t)x_1(t))y'(t) + (x_1''(t) + a_1(t)x_1'(t) + a_2(t)x_1(t))y(t) = 0.$$

Оскільки  $x_1(t)$  – розв'язок (16), то заміною  $y'(t) = z(t)$  одержимо рівняння 1<sup>го</sup> порядку відносно функції  $z(t)$ :

$$x_1(t)z'(t) + (2x_1'(t) + a_1(t)x_1(t))z(t) = 0.$$

Остання методика припускає узагальнення.

**Твердження 4.** Нехай  $x_1(t), \dots, x_k(t)$  – лінійно незалежна система розв'язків однорідного ЛДР порядку  $n$ ;  $x_1(t) \neq 0$  в кожній точці  $\Delta$ . Тоді підстановка  $x(t) = x_1(t)z(t)$ ;  $\dot{z}(t) = y(t)$  зводить вихідне рівняння до однорідного ЛДР порядку  $(n-1)$  відносно функції  $y(t)$ . Нове рівняння має  $(k-1)$  лінійно

незалежні розв'язки:  $y_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{x_{j+1}(t)}{x_1(t)} \right)$ .

**Доведення.** Підстановка  $x(t) = x_1(t)z(t)$  зведе рівняння (12) до вигляду:

$$x_1(t)z^{(n)}(t) + b_1(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1}(t)z'(t) + L(x_1(t))z(t) = 0.$$

При цьому  $L(x_1(t)) \equiv 0$ .

Це рівняння повинно мати розв'язки  $z_j(t) = \frac{x_j(t)}{x_1(t)}$ .

Після ділення на  $x_1(t)$  і заміни:  $z'(t) = y(t)$  маємо однорідне ЛДР порядку  $(n-1)$  з розв'язками  $y_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{x_{j+1}(t)}{x_1(t)} \right)$ . Залишилось перевірити їх лінійну незалежність.

Нехай  $C_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right) + \dots + C_k \frac{d}{dt} \left( \frac{x_k(t)}{x_1(t)} \right) \equiv 0$  на  $\Delta$ . Тоді існує число  $C$  таке, що:

$$C_2 \frac{x_2(t)}{x_1(t)} + \dots + C_k \frac{x_k(t)}{x_1(t)} \equiv C.$$

Звідки, з лінійної незалежності  $\{x_j(t)\}$ , усі  $C_j = 0$  (обміркуйте!). ■

## **§6. Системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Експонента матриці**

Розглянемо систему:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}. \quad (17)$$

Тут  $A = (a_{ij})$  – числова квадратна матриця.

Розв'язати систему – це знайти фундаментальну систему розв'язків або, що еквівалентно, знайти

матричнозначну функцію  $X(t)$ , таку, що  $\det X(t) \neq 0$  і матриця  $X(t)$  задовольняє рівняння:

$$\frac{d}{dt} X(t) = AX(t). \quad (18)$$

Тоді загальний розв'язок (17) має вид (10) (змінюючи  $\vec{C}$  одержимо усі розв'язки (17)).

В разі, якщо  $n=1$ , рівняння (17) приймає вид:  $\frac{dx}{dt} = ax$ , звідки:  $x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0)$ . Тому вельми логічно буде припустити, що і в загальному випадку розв'язок рівняння (18) матиме вид:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot X(t_0). \quad (19)$$

Виникає проблема коректного означення експоненти матриці. Шлях до розв'язання цієї проблеми виберемо з огляду на його найбільшу користь у побудові подальшої теорії.

**Означення.** лінійний простір  $M$  назовемо нормованим, якщо на ньому визначено функцію  $x \mapsto \|x\|$ , що має такі властивості:

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ ;
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Звичайно, що умови 1) – 3) повинні виконуватись для усіх  $x, y \in M$  та  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Прикладами норм є:

- 1)  $M = \mathbb{C}^n$ ;  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ;



2)  $M$  = простір матриць  $A = (a_{ij})$  розміру  $n \times n$ ;

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{перевірте!}). \quad \text{Це} \quad - \quad \text{так} \quad \text{звана}$$

“евклідова норма матриці”.

При цьому на  $M$  можуть одночасно “співіснувати” різні норми і по відношенню до них у нас будуть різні нормовані простори.

**Означення.** Дві норми  $\|\cdot\|_1$  і  $\|\cdot\|_2$ , визначені на  $M$ , називаються еквівалентними, якщо існують два числа  $C_1, C_2 > 0$  такі, що для кожного  $x \in M$  виконуються дві нерівності:

$$\begin{cases} \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \\ \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \end{cases} \quad (20)$$

Еквівалентність норм гарантує, що послідовність векторів  $x_m$  буде збіжною в сенсі однієї з норм в точності тоді, коли і в сенсі другої:  $(\|x_m - x_0\|_1 \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\|x_m - x_0\|_2 \rightarrow 0)$  (обміркуйте!). Аналогічна властивість і щодо фундаментальної послідовності векторів  $x_m$ :

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 : \|x_m - x_n\|_1 \leq \varepsilon) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall m, n \geq N_1 : \|x_m - x_n\|_2 \leq \varepsilon) \quad (\text{обміркуйте!}). \end{aligned}$$

З курсу математичного аналізу нам відомо, що в просторі  $\square^n$  кожна фундаментальна послідовність збігається. Але - стосовно норми  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$  (така властивість називається “повнотою нормованого

простору"). Якщо інша норма еквівалентна вказаній, то ця ж властивість має місце (перевірте!!). З наступної теореми тепер можна буде зробити висновок, що  $\mathbb{R}^n$  за будь-якої норми буде повним простором (!).

Це ж саме стосується будь-якого скінченновимірного простору, оскільки в ньому можна зафіксувати базис і за одну з норм взяти

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \quad (x_k - \text{координати в фіксованому базисі}).$$

**Теорема 4.** Будь які дві норми в скінченновимірному просторі еквівалентні.

**Доведення.** Нехай  $\dim M = m$ ;  $f_1, \dots, f_m$  - базис в  $M$ ;  $x = x^1 f_1 + \dots + x^m f_m$ . Запровадимо норму  $\|x\|_1 = \max \{ |x^k| \mid 1 \leq k \leq m \}$  (перевірте властивості норми). Доведемо, що будь-яка інша норма  $\|x\|$  еквівалентна  $\|x\|_1$  (цього досить, перевірте!).

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^m x^k f_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m |x^k| \|f_k\| \leq \|x\|_1 \cdot \sum_{k=1}^m \|f_k\| = C_1 \|x\|_1 \quad (21)$$

Звідси:  $(x_n \rightarrow x \text{ за нормою } \|\cdot\|_1) \Rightarrow (x_n \rightarrow x \text{ за нормою } \|\cdot\|)$ . ("З покоординатної збіжності виходить збіжність за нормою" - обміркуйте!).

Припустимо, що не існує  $C > 0$ , такого, що  $\|x\|_1 \leq C \|x\|$ . Тоді існує послідовність  $\{x_n\}$ :  $\|x_n\|_1 = 1$ ;

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{n} \quad (\text{обміркуйте!}). \quad x_n = x_n^1 f_1 + \dots + x_n^m f_m;$$

$\max \{ |x_n^k| \mid k = 1, \dots, m \} = 1$  для кожного  $n$ . Тому модулі всіх

координат векторів  $x_n$  не перевищують 1, а один з них дорівнює 1. Послідовність їх перших координат  $\{x_n^1\}$  є обмеженою числовою послідовністю. За теоремою Больцано – Вейерштрасса існує збіжна підпослідовність  $x_{n_k}^1 \rightarrow x_\infty^1$ . Всі вектори, номери яких не дорівнюють  $n_k$  надалі викинемо геть з послідовності  $\{x_n\}$ . Послідовність, що залишилась (її також позначаємо  $\{x_n\}$ ), має особливість: числова послідовність перших координат є збіжною.

Далі розглядаємо  $\{x_n^2\}$  – також обмежена числова послідовність. Наступне проріджування послідовності векторів  $\{x_n\}$  призводить до того, що вже їх дві перші координати утворюють збіжні послідовності. Після  $m$  проріджувань одержимо послідовність  $\{x_n\}$  таку, що  $\forall k: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = x_\infty^k$ .

Позначимо:  $x_\infty = \sum_{k=1}^m x_\infty^k f_k$ . Тоді  $\|x_n - x_\infty\|_1 \rightarrow 0$

(обміркуйте!)

З (21) тоді маємо:  $\|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0$ , але  $\|x_n - 0\| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

Тож  $x_\infty = 0$  (двох різних границь не буває!), а це призводить до суперечності: якщо  $\forall k: x_n^k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , то існує таке  $N$ , що для кожного  $n \geq N$ :

$$\|x_n\|_1 = \max \left\{ |x_n^k| \mid 1 \leq k \leq m \right\} < \frac{1}{2} \quad (\text{обміркуйте!}) . \blacksquare$$

Лінійний простір квадратних матриць  $n \times n$  також є скінченновимірним, а тому є повним у будь-якій

нормі. За норму матриці можна прийняти, наприклад, суму модулів всіх її елементів:  $\|A\|_1 = \sum_{i,j} |a_{ij}|$  (перевірте аксіоми норми!), можна за норму прийняти  $\|A\| = \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$  (перевірте аксіоми норми!) – “евклідова норма”.

Евклідова норма крім стандартних властивостей норми:  $\|A\| \geq 0$ ;  $(\|A\| = 0) \Leftrightarrow (A = 0)$ , другий  $0$  – нульова матриця;  $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ ;  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ , має ще одну:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Перевіримо останню властивість:

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{i,j} \left( \sum_k a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \sum_{i,j} \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{j,k} b_{kj}^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{j,k=1}^n b_{kj}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

Звідси:  $\|A^2\| \leq \|A\|^2$ ;  $\|A^3\| \leq \|A\|^3$  і для  $\forall m \in \mathbb{N}$ :  $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ . Розглянемо послідовність квадратних

матриць  $B_m = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{m!}A^m$ . Доведемо збіжність

послідовності  $B_m$  (інакше кажучи, збіжність ряду:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ ). З наведених вище міркувань нам достатньо

довести її фундаментальність.

$$\begin{aligned}\|B_{m+p} - B_m\| &= \left\| \frac{1}{(m+1)!} A^{m+1} + \dots + \frac{1}{(m+p)!} A^{m+p} \right\| \leq \frac{1}{(m+1)!} \|A^{m+1}\| + \dots + \\ &+ \frac{1}{(m+p)!} \|A^{m+p}\| \leq \frac{1}{(m+1)!} \|A\|^{m+1} + \dots + \frac{1}{(m+p)!} \|A\|^{m+p}.\end{aligned}$$

Тепер зрозуміло, що фундаментальність послідовності  $\{B_m\}$  є наслідком збіжності числового ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$  (зверніть увагу на ці міркування!

Доведено, що збіжність матричного ряду є наслідком його абсолютної збіжності при належному означенні цих понять).

**Означення.**  $e^A = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$

**Теорема 5.** Вектор-функція

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \vec{x}_0 \quad (22)$$

є розв'язком задачі Коші (17) - (3):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \vec{x}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

на проміжку  $\Delta = (-\infty; +\infty)$ .

**Доведення.** З посиланням на еквівалентність задачі Коші та інтегрального рівняння (9), достатньо довести, що вектор-функція (22) є неперервною та задовольняє рівняння:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t A \vec{x}(s) ds. \quad (23)$$

Ряд  $e^{sA}\vec{x}_0 = \vec{x}_0 + sA\vec{x}_0 + \frac{s^2}{2!}A^2\vec{x}_0 + \dots$  збігається

рівномірно на кожному відрізку  $[a;b] \in \mathbb{R}$ . Це твердження є наслідком відповідної теореми Вейєрштрасса: слід взяти  $c = \max\{|a|, |b|\}$ ; оцінити

$$\left\| \frac{(sA)^n}{n!} \vec{x}_0 \right\| \leq \frac{c^n \|A\|^n}{n!} \|\vec{x}_0\| \quad \text{і скористатись збіжністю}$$

числового ряду:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n \|A\|^n}{n!} \|\vec{x}_0\|$ .

Внаслідок рівномірної збіжності ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n \vec{x}_0$  робимо висновок: а) його сума  $\vec{x}(s) = e^{sA} \vec{x}_0$  є неперервною на кожному відрізку  $[a;b]$ , а тому й на всій числовій осі; б) рівномірно збігається ряд  $A\vec{x}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^{n+1} \vec{x}_0$ , а тому за відомою теоремою аналізу:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t A\vec{x}(s) ds &= \int_{t_0}^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^{n+1} \vec{x}_0 ds = A\vec{x}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \int_{t_0}^t s^n ds \right) A^{n+1} \vec{x}_0 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1} A^{n+1} \vec{x}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n \vec{x}_0. \end{aligned}$$

Підстановка останнього виразу в (23) дає тотожність. ■

### Наслідки.

1. Загальний розв'язок рівняння (1) має вид:  $\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{C}$ .

2. Задача Коші для матричного рівняння (18) з початковою умовою:  $X(t_0) = X_0$  має єдиний розв'язок:  $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$ .

3. Для квадратної матриці  $A$  для кожного  $t \in \mathbb{R}$  має місце рівність:  $\det e^{tA} = e^{t \operatorname{tr} A}$ .

**Доведення** потребує лише наслідок 3.

У формулі Ліувілля - Якобі беремо  $t_0 = 0; Y(0) = I$ .

Тоді маємо  $\det e^{tA} = \det Y(t) = \det Y(0) \cdot e^{\int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds} = e^{t \operatorname{tr} A}$ . ■

**Твердження 5** (властивості матричної експоненти).

$$1) \quad \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

$$2) \quad (AB = BA) \Rightarrow \left( B e^A = e^A B; e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}; (e^A)^{-1} = e^{-A} \right).$$

3) Якщо матриця  $A$  має блочну структуру:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right), \quad \text{то} \quad e^A = \left( \begin{array}{c|c} e^{A_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{A_2} \end{array} \right).$$

$$4) \quad \exp(V^{-1}AV) = V^{-1} \cdot \exp A \cdot V.$$

**Доведення.** 1) Для кожного  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{d}{dt} (e^{tA} \vec{x}_0) = A (e^{tA} \vec{x}_0).$$

2) а)  $\frac{d}{dt} B e^{tA} = B \frac{d}{dt} e^{tA} = A B e^{tA}$ . Тому  $B e^{tA}$  є розв'язок задачі Коші  $\frac{d}{dt} X(t) = A X(t); X(0) = B$ . Але ж він єдиний. Тому  $B e^{tA} = e^{tA} B$ .

$$\text{б) } \frac{d}{dt} e^{tA} e^{tB} = A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = (A+B) e^{tA} e^{tB}. \text{ Тому } e^{tA} e^{tB} \in$$

розв'язок задачі Коші:  $\frac{d}{dt} X = (A+B) X; X(0) = I$ , і

повинен дорівнювати  $e^{t(A+B)}$ ;

$$\text{в) } e^A e^{-A} = e^0 = I.$$

3) Блочну структуру матриці успадковують  $A^2, A^3, \dots$ , а тому й сума відповідного ряду.

$$4) \quad \frac{d}{dt} (V^{-1} e^{tA} V) = V^{-1} A e^{tA} V = (V^{-1} A V) (V^{-1} e^{tA} V). \quad \text{Тому}$$

$V^{-1} e^{tA} V$  – розв'язок задачі Коші:

$$\frac{d}{dt} X(t) = V^{-1} A V X(t); X(0) = I \quad \text{і повинен співпасти з}$$

$$\exp(t V^{-1} A V).$$

## **§7. Обчислення розв'язків системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами**

Розв'язки рівняння (17) мають вид

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{C} \quad (24)$$

і їх пошук щільно пов'язаний з пошуком експоненти матриці  $tA$ . У подальшому будемо вважати, що матриця  $A$  – комплексна (це не є додатковою умовою, бо дійсні числа вкладаються у множину комплексних). В жордановому базисі матриця перетворюється на матрицю блочної структури:



$$A_j = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}; \quad A_j = V^{-1} A V, \quad \text{де } V - \text{ матриця}$$

переходу до жорданова базису: її стовпці є векторами жорданового базису у вихідному (канонічному) базисі. Далі:

$$\exp A_j = \begin{pmatrix} \boxed{\exp J_1} & & 0 \\ & \boxed{\exp J_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}; \quad \exp A = V (\exp A_j) V^{-1}.$$

Залишилось обчислити  $\exp J_k$  для кожного блоку матриці  $A_j$ . Але жорданова клітина

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \quad \text{де матриця } N \text{ має таку}$$

$$\text{особливість: } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \dots; \quad N^m = 0$$

, де  $m$  – розмір клітини. Далі:

$$e^{tJ} = \exp(\lambda tI + tN) = e^{\lambda tI} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN};$$

$$e^{tN} = 1 + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} N^{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \ddots & \ddots \\ & 1 & t & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ 0 & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тому } e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2} e^{t\lambda} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & e^{t\lambda} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

У випадку дійсної матриці  $A$  характеристичні числа матриці  $\lambda_k$  можуть бути уявними; матриця  $V$  також не є дійсною. Але в результаті матриця  $e^{tA}$  обов'язково виявиться дійсною (обміркуйте!).

Практична реалізація цього методу полягає в наступному. Стовпець координат вектора  $\vec{x}$  в жордановому базисі позначимо через  $\vec{x}_J$ . Відомий

зв'язок:  $\vec{x} = V\vec{x}_J$  перетворює вихідне рівняння  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

в таке:  $V \frac{d}{dt} \vec{x}_J = AV\vec{x}_J$ , звідки  $\frac{d}{dt} \vec{x}_J = A_J \vec{x}_J$ . Тому

$\vec{x}(t) = V\vec{x}_J(t) = Ve^{tA_J} \vec{C}$  (тут  $\vec{C}$  - довільний вектор).

Фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

(17) тепер одержимо, якщо за вектор  $\vec{C}$  будемо брати вектори канонічного базису. А це саме стовпці матриці  $Ve^{tA_j}$ .

Найпростіший випадок виникає в тому разі, якщо жорданова матриця  $A_j$  виявиться діагональною.

**Твердження 6.** Якщо  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – власні числа матриці  $A$ , що відповідають лінійно незалежній системі власних векторів  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$ , то  $\{e^{t\lambda_1} \vec{f}_1, \dots, e^{t\lambda_m} \vec{f}_m\}$  – лінійно незалежна система розв'язків системи (17).

**Доведення.**  $\frac{d}{dt} e^{\lambda_k t} \vec{f}_k = \lambda_k e^{\lambda_k t} \vec{f}_k = A(e^{\lambda_k t} \vec{f}_k)$ . Лінійна незалежність цієї системи вектор-функцій є наслідком лінійної незалежності її значень при  $t=0$ . ■

**Приклад.** Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 4x \\ \dot{y} = z - 3x - y \\ \dot{z} = -x - z \end{cases} \quad (25)$$

Матриця системи:  $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  має єдине

характеристичне число  $\lambda = -2$ . Відповідний жорданів базис складається з одного жорданова ланцюжка:

власного вектора  $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  та приєднаних векторів

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ та } \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Жорданова форма: } A_J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{. Звідси: } e^{tA_J} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (25) має вид:  $\vec{x}_1(t) = e^{-2t} \vec{f}_1$ ;

$$\vec{x}_2(t) = e^{-2t} (t\vec{f}_1 + \vec{f}_2); \quad \vec{x}_3(t) = e^{-2t} \left( \frac{t^2}{2} \vec{f}_1 + t\vec{f}_2 + \vec{f}_3 \right). \quad \text{Загальний}$$

розв'язок:  $\vec{x} = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t) + C_3 \vec{x}_3(t)$ , або

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t} \left( C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2} \right) \\ y(t) = e^{-2t} (2C_1 + C_2(2t+1) + C_3(t^2+t)) \\ z(t) = e^{-2t} \left( C_1 + C_2(t+1) + C_3 \left( \frac{t^2}{2} + t + 1 \right) \right) \end{cases} \quad (26)$$

Зверніть увагу на те, що при розв'язанні системи (25) не довелося знаходити значення  $\exp(tA)$ . Але після того, як систему (25) було розв'язано, можна знайти (як "подарунок") точне значення  $\exp(tA)$ . Справа в тому, що стовпці  $\vec{b}_k(t)$  матриці  $B(t) = e^{tA}$  - це розв'язки системи (25) з початковою умовою  $\vec{x}(0) = \vec{e}_k$ , де  $\vec{e}_k$  -  $k$ -й стовець канонічного базису в  $\mathbb{R}^n$ .

Для пошуку першого стовпця  $\vec{b}_1(t)$  матриці  $e^{tA}$  використовуємо (26):  $1 = C_1$ ;  $0 = 2C_1 + C_2$ ;  $0 = C_1 + C_2 + C_3$ .  
Звідси:  $C_1 = 1$ ;  $C_2 = -2$ ;  $C_3 = 1$ ;

$$\vec{b}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t + \frac{t^2}{2} \\ 2 - 2(2t + 1) + t^2 + t \\ 1 - 2(t + 1) + \frac{t^2}{2} + t + 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Аналогічно знаходимо й}$$

інші стовпці матриці  $e^{tA}$ .

**Вправа.** Доведіть до кінця пошук експоненти  $e^{tA}$ .

Природна складність при пошуку розв'язків системи (17) виникає в тому разі, якщо характеристичні числа матриці  $A$  виявляються уявними. Але у випадку дійсної матриці  $A$ , характеристичний многочлен матриці  $A$  має дійсні коефіцієнти, і тому його корені входять парами:  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ;  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ , причому з однаковою кратністю.

У випадку простих комплексних коренів  $\lambda_1; \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  (кратності 1) наступні міркування принципово скорочують розв'язання задачі.

Уявімо собі, що йде пошук комплексних розв'язків системи (17). Тоді у відповідності з твердженням 6, до фундаментальної системи розв'язків входять функції  $\vec{x}_1(t) = e^{t\lambda_1} \vec{f}_1$  та  $\vec{x}_2(t) = e^{t\lambda_2} \vec{f}_2$ . Тут  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ;  $\vec{f}_1, \vec{f}_2$  - власні вектори матриці  $A$  з відповідними власними числами  $\lambda_1; \lambda_2$  (в комплексному

просторі  $\mathbb{C}^n$ ). Нескладно перевірити, що  $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$  (покоординатне комплексне спряження). Тому  $\vec{x}_2(t) = \overline{\vec{x}_1(t)}$ . Тоді розв'язками системи (17) будуть

$$\text{також} \quad \vec{u}(t) = \operatorname{Re} \vec{x}_1(t) = \frac{1}{2}(\vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)) \quad \text{та}$$

$\vec{v}(t) = \operatorname{Im} \vec{x}_1(t) = \frac{1}{2i}(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t))$  і при цьому система вектор-функцій  $\{\vec{u}(t), \vec{v}(t)\}$  еквівалентна системі  $\{\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)\}$ . Тому система  $\{\vec{u}(t), \vec{v}(t)\}$  – лінійно незалежна і в дійсному випадку.

**Приклад.** Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \quad (27)$$

Матриця системи  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  має характеристичні

числа  $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ . В комплексному просторі власному

числу  $\lambda_1 = 2 + i$  відповідає вектор  $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$  і

відповідний розв'язок має вид

$$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{f}_1 = e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ (1+i)(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix}. \quad \text{Загальний}$$

розв'язок:

$$\vec{x}(t) = C_1 \operatorname{Re} \vec{x}_1(t) + C_2 \operatorname{Im} \vec{x}_1(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Додатково можна знайти й експоненту матриці  $tA$ :

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \quad (\text{перевірте!}).$$

## §8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = 0. \quad (28)$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$  – числа (дійсні або комплексні).

Многочлен  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$  –  
характеристичний многочлен оператора  $L$  або  
рівняння (28). Для функції  $x(t) = e^{\mu t}$  нескладно  
перевірити:

$$L(e^{\mu t}) = p(\mu) e^{\mu t}. \quad (29)$$

Тому для коренів  $\lambda_k$  многочлена  $p(\lambda)$  функції  $e^{\lambda_k t}$   
будуть розв'язками.

**Теорема 6.** Нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – повний набір  
(комплексних) коренів многочлена  $p(\lambda)$  кратностей  
відповідно  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . Тоді фундаментальна система  
розв'язків рівняння (28) складається з функцій:

$$e^{\lambda_1 t}; t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}; e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t}; \dots; t^{k_m-1} e^{\lambda_m t}. \quad (30)$$

**Лема 2.**

$$L(y(t) \cdot e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \left( y^{(n)} + \frac{p^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} y^{(n-1)} + \dots + p(\lambda) y \right) = \\ e^{\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(\lambda)}{k!} y^{(k)}. \quad (31)$$

**Доведення леми 2.** Розглянемо оператор  
 $L_\lambda: y \mapsto e^{-\lambda t} L(y \cdot e^{\lambda t})$ . Цей оператор також лінійний і зі  
сталими коефіцієнтами. Шукаємо його  
характеристичний многочлен. Посилаючись на (29),

маємо:  $L_{\lambda} e^{\mu t} = e^{-\lambda t} L(e^{(\lambda+\mu)t}) = e^{-\lambda t} p(\lambda + \mu) e^{(\lambda+\mu)t} = p(\lambda + \mu) e^{\mu t}$ .

Звідси: характеристичний многочлен оператора  $L_{\lambda}$  дорівнює  $q(\mu) = p(\mu + \lambda)$ . Якщо  $L_{\lambda} y = y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y$ , то  $p(\mu + \lambda) = \mu^n + b_1 \mu^{n-1} + \dots + b_n$  і коефіцієнти  $b_k$  можна одержати за формулою Тейлора:

$$p(\mu + \lambda) = p(\lambda) + p'(\lambda)\mu + \frac{p''(\lambda)}{2!}\mu^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(\lambda)}{n!}\mu^n. \blacksquare$$

**Доведення теореми.** Покладемо у формулі (31):  $y(t) = t^k$ ;  $k < k_1$ . За умовами теореми  $p^{(j)}(\lambda_1) = 0$ ,  $0 \leq j \leq k_1 - 1$ . Крім того  $(t_k)^{(j)} = 0$  при  $j > k$ . Тому всі доданки у формулі (31) дорівнюють нулю і  $L(t^k e^{\lambda_1 t}) = 0$  для  $0 \leq k \leq k_1 - 1$ . Аналогічно перевіряється, що усі інші функції системи (30) є розв'язками.

Їх кількість дорівнює порядку рівняння (28). Тож залишилось перевірити лише їх лінійну незалежність.

Лінійна комбінація функцій набору (30) (з комплексними коефіцієнтами) є визначеною на вихідному проміжку  $\Delta$  функцією виду:

$$f(t) = p_1(t)e^{\lambda_1 t} + p_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + p_m(t)e^{\lambda_m t}, \quad (32)$$

де  $p_k(t)$  – многочлени. Покладемо  $f(t) = 0$  на  $\Delta$  і доведемо, що усі многочлени – нульові.

З цією метою розглянемо цілу функцію (аналітичну в  $\square$ ):  $f(z) = p_1(z)e^{\lambda_1 z} + \dots + p_m(z)e^{\lambda_m z}$ . За теоремою єдиності  $f(z) \equiv 0$  в  $\square$ . Тому  $f(t) \equiv 0$  на  $[0, +\infty)$ .



З іншого боку для функції  $f(t)$ , що тепер визначена на півосі  $[0, +\infty)$  формулою (32), можна розглянути перетворення Лапласа

$$\hat{f}(p) = \frac{C_0}{p - \lambda_1} + \frac{C_1 \cdot 2!}{(p - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{C_{k_1-1} \cdot (k_1 - 1)!}{(p - \lambda_1)^{k_1}} + \dots, \quad \text{яке також}$$

дорівнює нулю в  $\square$ . Тому  $\hat{f}$  не повинна мати в  $\square$  особливих точок, тож усі коефіцієнти многочленів  $p_k(t)$  нульові. ■

В тому разі, якщо усі коефіцієнти  $a_k$  рівняння (28) є дійсними, у відповідності до загальної теорії ми маємо підстави стверджувати, що рівняння (28) має фундаментальну систему розв'язків, що складається з дійснозначних функцій. Таку систему розв'язків можна одержати, якщо для кожної пари комплексно спряжених коренів  $\lambda = \alpha + \beta i; \bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  многочлена  $p(\lambda)$  кожну підсистему, що складається з двох розв'язків  $t^k e^{\lambda t}$  та  $t^k e^{\bar{\lambda} t}$  замінити на підсистему  $\{t^k e^{\alpha t} \cos \beta t; t^k e^{\alpha t} \sin \beta t\}$ . Оскільки в разі комплекснозначних функцій нова підсистема еквівалентна вихідній, то після вказаної перебудови, повний набір функцій залишається фундаментальною системою розв'язків рівняння (28) у випадку комплексного поля, а тому й поля  $\square$  (обміркуйте!).

## §9. Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь

Предмет дослідження – система (у матричному вигляді) :

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad (33)$$

Всі елементи матриці  $A(t)$  і компоненти стовпця  $\vec{f}(t)$  припускаються неперервними на фіксованому числовому проміжку.

Якщо до часткового розв'язку  $\vec{x}_q(t)$  системи (33) додати який-небудь розв'язок  $\vec{y}(t)$  відповідної однорідної системи (6), то їх сума  $\vec{x}_q(t) + \vec{y}(t)$  знову буде розв'язком системи (33) (перевірте!). З іншого боку, так можна одержати усі розв'язки (33), бо різниця розв'язків (33) задовольняє систему (6). Одержаний "рецепт" розв'язання системи (33) зазвичай формулюється так:

**Твердження 7.** Загальний розв'язок неоднорідної системи є сума часткового розв'язку цієї системи та загального розв'язку відповідної однорідної системи. ■

Нехай  $X(t)$  – фундаментальна матриця однорідної системи (6). Нагадаємо, її стовпці утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (6).

Тож  $X(t)$  – невироджена при  $\forall t \in \Delta$ ;  $\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t)$

і загальний розв'язок системи (6) має вид:  
 $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}$ .

Метод варіації полягає в тому, що розв'язок системи (33) шукаємо у вигляді:  $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}(t)$ .

Після підстановки у рівняння (33) одержимо:

$$\dot{X}(t)\vec{C}(t) + X(t)\dot{\vec{C}}(t) = A(t)X(t)\vec{C}(t) + \vec{f}(t);$$

звідки:

$$X(t)\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t), \quad (34)$$

Тож  $\vec{C}(t) = \vec{C} + \int_{t_0}^t (X(\tau))^{-1} \vec{f}(\tau) d\tau$  і загальний розв'язок вихідного рівняння (33) має вид:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C} + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \vec{f}(\tau) d\tau = X(t)\vec{C} + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(\tau) \vec{f}(\tau) d\tau.$$

Матричнозначна функція двох змінних  $U(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$  називається еволюційним

оператором (еволюційною матрицею) системи (33), а розв'язок набуває остаточного вигляду:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C} + \int_{t_0}^t U(t, \tau) \vec{f}(\tau) d\tau, \quad (35)$$

(перший доданок є загальним розв'язком відповідної однорідної системи (6)).

### **Властивості еволюційного оператора:**

1)  $U(t, \tau)$  не залежить від вибору фундаментальної матриці  $X(t)$ .

**Доведення.**  $\frac{d}{dt}U(t, \tau) = \frac{d}{dt}X(t)X^{-1}(\tau) = A(t)X(t)X^{-1}(\tau) = A(t)U(t, \tau)$ . Тому при фіксованому  $\tau$ :  $U(t, \tau)$  є розв'язком системи  $\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t)$  з початковою умовою:  $Y(\tau) = I$ . А такий розв'язок єдиний. ■

$$2) U(t, t) = I.$$

$$3) U(t, s)U(s, \tau) = U(t, \tau).$$

$$4) U(t, \tau) = [U(\tau, t)]^{-1}.$$

Властивості 2-4 очевидні (перевірте!).

Матриця  $U(t) = U(t, 0)$  називається матрицею Коші системи (33). Очевидно:  $U(t, \tau) = U(t)U(\tau)^{-1}$ ;

$\frac{d}{dt}U(t) = A(t)U(t); U(0) = I$ . Матрицю  $U(t)$  можна взяти за фундаментальну матрицю і тоді

$$\vec{x}(t) = U(t)\vec{C} + \int_0^t U(t, \tau) \vec{f}(\tau) d\tau$$

буде розв'язком вихідної системи з початковою умовою:  $\vec{x}(0) = \vec{C}$ . В тому разі, якщо коефіцієнти сталі,  $U(t) = e^{tA}; U(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}$ .

**Приклад.** Розв'язати систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 1 \\ \dot{y} = x + \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо відповідну однорідну систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}, \quad (36)$$

Найпростіше: привести систему до одного диференціального рівняння 2<sup>го</sup> порядку:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (37)$$

Звідки  $\begin{cases} x_1 = \cos t \\ x_2 = \sin t \end{cases}$  – фундаментальна система

розв'язків рівняння (37), а тому  $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

– фундаментальна матриця системи (36).

Тож шукаємо  $\vec{C}(t)$  з системи (див. (34)):

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}. \text{Далі:}$$

$$\dot{C}_1(t) = \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}, \quad C_1(t) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) + \tilde{C}_1;$$

$$\dot{C}_2(t) = 0; C_2(t) = \tilde{C}_2; \quad \vec{x}(t) = X(t) \vec{C}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x(t) = \tilde{C}_1 \cos t - \tilde{C}_2 \sin t + \frac{1}{2} \cos t \ln \left( \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) \\ y(t) = \tilde{C}_1 \sin t + \tilde{C}_2 \cos t + \frac{1}{2} \sin t \ln \left( \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right). \end{cases}$$

### §10. Метод варіації сталих для неоднорідного лінійного диференціального рівняння $n$ -го порядку

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t) \quad (38)$$

Так само, як і для неоднорідних систем, має місце аналог твердження 7: загальний розв'язок рівняння (38) складається з часткового розв'язку цього рівняння (38) та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Нагадаємо, що рівнянню (38) можна поставити у відповідь систему рівнянь 1<sup>го</sup> порядку (33), у якій

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (39)$$

і має місце природна взаємно однозначна відповідність між розв'язками системи (33) з урахуванням (39) та рівняння (38).

Якщо  $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$  – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, спорідненого з (38), то фундаментальна матриця системи однорідних рівнянь, спорідненої з (33) має вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad (40)$$

Для розв'язання системи (33) методом варіації розв'язок її шукали у вигляді:  $\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}(t)$ , а  $\vec{C}(t)$  задовольняв рівняння (34). Рівняння (34) з урахуванням (40) приймає вид:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k^{(j)}(t) \dot{C}_k(t) = 0, j = 0; 1; \dots; n-2 \\ \sum_{k=1}^n x_k^{(n-1)}(t) \dot{C}_k(t) = f(t) \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння (38) тепер матиме вид:  $x(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) x_k(t)$ .

## **§11. Метод невизначених коефіцієнтів для неоднорідних лінійних рівнянь**

Цей метод полягає в пошуку часткового розв'язку спеціального виду для неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

$$(Lx)(t) = x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) = e^{\alpha t} (b_0 t^m + \dots + b_m). \quad (41)$$

Права частина рівняння (41) – "квазіполіном". Нехай  $p(\lambda)$  – характеристичний многочлен диференціального оператора  $L$ . Рівняння (41) будемо записувати і так:  $p\left(\frac{d}{dt}\right)x = f$ .

**1. Нерезонансний випадок.** Нехай  $p(\alpha) \neq 0$ .

**Твердження 8.** У разі, якщо  $p(\alpha) \neq 0$  рівняння (41) має і притому єдиний розв'язок виду:  
 $x(t) = e^{\alpha t} (c_0 t^m + \dots + c_m)$ .

**Доведення.** Заміна  $x(t) = e^{\alpha t} y(t)$ . Тоді за лемою 2:

$$\begin{aligned} L(e^{\alpha t} y(t)) &= e^{\alpha t} \left( y^{(n)}(t) + \frac{p^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t) + \dots + \frac{p(\alpha)}{1!} y(t) \right) = \\ &= e^{\alpha t} (b_0 t^m + \dots + b_m). \end{aligned} \quad (42)$$

Оператор  $L_\alpha : y(t) \mapsto e^{-\alpha t} L(e^{\alpha t} y(t))$  переводить многочлен у многочлен; характеристичний многочлен  $q(\lambda)$  оператора  $L_\alpha$  має вид:  $q(\lambda) = p(\lambda + \alpha)$ .

Нехай  $E$  – лінійний простір многочленів степеня не вищого за  $m$ . Позначимо через  $A$  обмеження оператора  $L_\alpha$  на простір  $E$ .

Оператор  $L_\alpha = q\left(\frac{d}{dt}\right)$  має таку особливість: у виразі  $(L_\alpha y)(t) = y^{(n)}(t) + \tilde{a}_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \tilde{a}_n y(t)$  маємо:  $\tilde{a}_n = q(0) = p(\alpha) \neq 0$ . Виберемо в просторі  $E$  базис:  $\bar{e}_k = \frac{t^k}{k!} (k = 0, \dots, m)$ . Матриця оператора  $\frac{d}{dt}$  в цьому базисі має вид:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому матриця оператора  $A$  така:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{a}_{n-2} & \dots \\ 0 & \tilde{a}_n & \tilde{a}_{n-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_n \end{pmatrix}$$

Оскільки  $A$  – невироджена матриця, то рівняння  $L_\alpha y = z$ , яке еквівалентне (42), в просторі  $E$  має, і притому єдиний розв'язок. ■

## 2. Резонансний випадок.

**Теорема 7.** Нехай

$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0; p^{(k)}(\alpha) \neq 0$ . Тоді рівняння (41) має і притому єдиний розв'язок виду:

$$x(t) = e^{\alpha t} t^k (c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m).$$

**Доведення.** За формулою (42) маємо:

$$\begin{aligned} (L_\alpha y)(t) &= e^{-\alpha t} L(y \cdot e^{\alpha t}) = \\ &= y^{(n)}(t) + \frac{p^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t) + \dots + \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} y^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Приходимо до задачі пошуку многочлена  $y(t)$ , для якого:

$$y^{(n)}(t) + \tilde{a}_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \tilde{a}_{n-k} y^{(k)}(t) = b_0 t^m + \dots + b_m \quad (43)$$

і при цьому  $\tilde{a}_{n-k} \neq 0$ .

Якщо зробити заміну:  $y^{(k)}(t) = z(t)$ , то за аналогією з доведенням твердження 8, маємо висновок про існування єдиного многочлена  $z(t)$ , степеня не вищого за  $m$ , для якого

$$(\tilde{L}_\alpha z)(t) = z^{(n-k)}(t) + \tilde{a}_1 z^{(n-k-1)}(t) + \dots + \tilde{a}_{n-k} z(t) = b_0 t^m + \dots + b_m.$$

Тепер  $y(t)$  можна знайти  $k$ -кратним інтегруванням  $z(t)$ . При цьому одержимо (єдиний!) многочлен виду  $t^k (c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m)$  в сумі з многочленом виду  $d_1 t^{k-1} + \dots + d_{k-1} t + d_k$ . Другий доданок задовольняє споріднене з (43) однорідне рівняння і тому рівняння (43) має і притому єдиний розв'язок виду  $y(t) = t^k (c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m)$ , що й доводить теорему. ■

У випадку дійсних коефіцієнтів важливим є узагальнення теореми 7, яке стосується випадку, коли неоднорідність  $f(t)$  має вид:

$$f(t) = e^{\alpha t} (P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t) \quad (44)$$

(тут  $P_1(t), P_2(t)$  - многочлени, максимальний степінь яких дорівнює  $m$ ). В цьому разі запровадимо многочлен  $P(t) = P_1(t) - iP_2(t)$  (степінь  $P(t) = m$ ). Тоді:

$$f(t) = \operatorname{Re} \left( e^{(\alpha + \beta i)t} P(t) \right) \quad (\text{перевірте!})$$

В разі, якщо  $\lambda = \alpha + \beta i$  є коренем характеристичного многочлена оператора  $L$ , кратності  $k$  (а тому й  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ ), рівняння  $(Lx)(t) = e^{(\alpha + \beta i)t} P(t)$  має розв'язок виду  $e^{(\alpha + \beta i)t} t^k \cdot Q(t)$ , де степінь  $Q(t)$  не перевищує  $m$ .

Тоді комплексно спряжена функція  $\bar{x}(t)$  задовольняє рівняння  $(L\bar{x})(t) = \overline{e^{(\alpha+\beta i)t} P(t)}$ , а тому  $L(\operatorname{Re} x(t)) = f(t)$ .

Цим встановлено існування розв'язку рівняння (44) виду:

$$y(t) = \operatorname{Re}\left(e^{(\alpha+\beta i)t} t^k Q(t)\right) = e^{\alpha t} t^k \left(Q_1(t) \cos \beta t + Q_2(t) \sin \beta t\right), \quad (45)$$

де  $Q_1(t) = \operatorname{Re} Q(t); Q_2(t) = -\operatorname{Im} Q(t)$ .

При цьому в формулі (45): степені  $Q_1(t)$  та  $Q_2(t)$  не перевищують  $m$ .

**Вправа.** Доведіть, що серед розв'язків рівняння (44) існує лише єдиний розв'язок виду (45) з умовою: "степені  $Q_1(t)$  та  $Q_2(t)$  не перевищують  $m$ ".

## §12. Метод невизначених коефіцієнтів для неоднорідних систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + e^{\alpha t} \vec{P}(t), \quad (46)$$

де  $\vec{P}(t) = t^m \vec{b}_0 + t^{m-1} \vec{b}_1 + \dots + t \vec{b}_{m-1} + \vec{b}_m$ .

Тут  $A$  – стала матриця; неоднорідність  $\vec{f} = e^{\alpha t} \vec{P}(t)$  – квазіполіном.

### 1. Нерезонансний випадок.

**Твердження 9.** Нехай  $\alpha$  не є коренем характеристичного многочлена матриці  $A$ . Тоді система (46) має і притому єдиний розв'язок виду:  

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t} \left( t^m \vec{c}_0 + t^{m-1} \vec{c}_1 + \dots + t \vec{c}_{m-1} + \vec{c}_m \right).$$

**Доведення.** Покладемо  $\vec{x}(t) = e^{\alpha t} \vec{Q}(t)$ , де  $\vec{Q}(t) = t^m \vec{c}_0 + \dots + \vec{c}_m$ . Тоді  $\dot{\vec{x}}(t) = e^{\alpha t} (\alpha \vec{Q}(t) + \vec{Q}'(t))$  і з (46)

маємо:

$$\alpha \vec{Q}(t) + \vec{Q}'(t) = A \vec{Q}(t) + \vec{P}(t),$$

звідки:

$$\vec{Q}'(t) = (A - \alpha I) \vec{Q}(t) + \vec{P}(t).$$

Порівняємо коефіцієнти при різних степенях  $t$ :

$$\begin{cases} \vec{0} = (A - \alpha I) \vec{c}_0 + \vec{b}_0 \\ m \vec{c}_0 = (A - \alpha I) \vec{c}_1 + \vec{b}_1 \\ \dots \\ \vec{c}_{m-1} = (A - \alpha I) \vec{c}_m + \vec{b}_m \end{cases} \quad (47)$$

Оскільки  $\det(A - \alpha I) \neq 0$ , то система (47) покроково однозначно розв'язується. ■

**2. Резонансний випадок.** Нехай  $\alpha$  – корінь характеристичного многочлена матриці  $A$ . Перейдемо до жорданова базиса. При цьому коефіцієнти многочлена  $\vec{P}(t)$  змінюються (зауважимо, що ненульові коефіцієнти переходять в ненульові). А оскільки жорданова форма матриці розкладається на клітини, то зосередимо увагу на дослідженні одноклітинної матриці. Тож нехай система має вид:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}}_B \vec{x}(t) + e^{\alpha t} \vec{P}(t) \quad (48)$$

В разі, якщо  $\lambda \neq \alpha$ , то як і раніше приходимо до розв'язку  $e^{\alpha t} \vec{Q}(t) = e^{\alpha t} (\vec{c}_0 t^m + \dots + \vec{c}_m)$ .

Якщо ж  $\lambda = \alpha$ , то також покладемо:  $\vec{x}(t) = e^{\alpha t} \vec{Q}(t)$ .  
Тоді:  $\alpha \vec{Q}(t) + \vec{Q}'(t) = B \vec{Q}(t) + \vec{P}(t)$ ;

$$\vec{Q}'(t) = (B - \alpha I) \vec{Q}(t) + \vec{P}(t); \quad (49)$$

$$B - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай порядок клітини  $B$  дорівнює  $k$ . Тоді  $(B - \alpha I)^k = 0$ . З (49) маємо:

$\vec{Q}''(t) = (B - \alpha I) \vec{Q}'(t) + \vec{P}'(t) = (B - \alpha I)^2 \vec{Q}(t) + (B - \alpha I) \vec{P}(t) + \vec{P}'(t)$   
і т.д. Наприкінці:

$$\begin{aligned} \vec{Q}^{(k)}(t) &= \underbrace{(B - \alpha I)^k \vec{Q}(t)}_{=0} + (B - \alpha I)^{k-1} \vec{P}(t) + \\ &+ (B - \alpha I)^{k-2} \vec{P}'(t) + \dots + \vec{P}^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (50)$$

З рівняння (50)  $\vec{Q}(t)$  знаходимо  $k$ -кратним інтегруванням.  $\vec{Q}(t) = t^{m+k} \vec{c}_0 + t^{m+k-1} \vec{c}_1 + \dots + \vec{c}_{m+k}$ .

Оскільки вихідна система (46) в жордановому базисі розкладається поблочно на системи виду (48), то приходимо до загального алгоритму пошуку часткового розв'язку системи (46): розв'язок слід шукати у вигляді:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t} (\vec{c}_0 t^{m+k} + \dots + \vec{c}_{m+k}); \quad (51)$$

де  $k$  – порядок найбільшої жорданової клітини, що відповідає власному числу  $\alpha$ . При цьому ми не можемо гарантувати єдиність розв'язку виду (51).

**Узагальнення** (без доведення). Для систем виду

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + e^{\alpha t} (\vec{P}_1(t) \cos \beta t + \vec{P}_2(t) \sin \beta t)$$

розв'язок слід шукати у вигляді:

$$\vec{x}_q(t) = e^{\alpha t} (\vec{Q}_1(t) \cos \beta t + \vec{Q}_2(t) \sin \beta t);$$

степені  $\vec{Q}_1(t)$ ,  $\vec{Q}_2(t)$  не перевищують  $m+k$ , де  $m = \max(n P_1; \dots; P_2)$ , а  $k$  дорівнює максимальному розміру жорданової клітини матриці  $A$ , що відповідає числу  $\alpha + \beta i$ .

**Приклад.** Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (52)$$

Матриця системи  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  має жорданову форму

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а матриця переходу } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\vec{x}_{одн}(t) = V e^{tA_J} \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{C} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Частковий розв'язок системи (52) шукаємо у вигляді:

$$\vec{x}_q(t) = e^t (\vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}), \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x(t) = e^t (a_1 t^2 + b_1 t + c_1) \\ y(t) = e^t (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \end{cases}.$$

Після підстановки в (52) одержимо систему з 6 лінійних рівнянь на коефіцієнти  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ . Її розв'язок:

$$\vec{x}_q(t) = e^t \left( t^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{перевірте!})$$

Остаточно:  $\vec{x}(t) = \vec{x}_{одн}(t) + \vec{x}_q(t)$ , тобто:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^t (t+1) + e^t \left( \frac{1}{2} t^2 + t \right) \\ y = -C_1 e^t - C_2 t e^t - \frac{1}{2} t^2 e^t. \end{cases}$$

## РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 2<sup>го</sup> ПОРЯДКУ

### §1. Якісні властивості розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0.$$

1. Жоден з ненульових розв'язків рівняння

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (1)$$

з неперервними на проміжку  $\Delta \subset \mathbb{R}$  коефіцієнтами  $p(t)$  та  $q(t)$ , не може дотикатись осі  $OX$ ; розв'язки рівняння (1) можуть перетинатись, але не дотикатись.

Цей факт є очевидним наслідком твердження 1, §2.4 (обміркуйте!)

2. Рівняння (1) припускає зниження порядку. Заміна  $x' = xz$  дає:  $x'' = x'z + xz' = x(z' + z^2)$ ;  $x(z' + z^2 + p(t)z + q(t)) = 0$ ;  $z' + z^2 + p(t)z + q(t) = 0$ . Це є рівняння Ріккаті і заміною  $z = u + z_1$ , в разі відомого розв'язку  $z_1$ , воно може бути зведене до рівняння Бернуллі (обміркуйте).

Інший спосіб - вже відома заміна  $x = x_1 \cdot u$  в разі, якщо відомий розв'язок  $x_1$  рівняння (1). Подальша заміна  $u' = z$  приводить до лінійного рівняння 1<sup>го</sup> порядку. (перевірте!)

**3. Твердження 1.** Кожний нетривіальний розв'язок (тобто  $x(t) \neq 0$ ) рівняння (1) не може мати нескінченну кількість нулів на відріzkу  $\Delta$ .



**Доведення.** Нехай розв'язок  $x(t)$  має нескінченну кількість нулів на обмеженому відрізку  $\Delta$ . Тоді за теоремою Больцано-Вейерштрасса існує збіжна послідовність  $t_n \in \Delta$ ;  $t_n \rightarrow t_0 \in \Delta$ ;  $x(t_n) = 0$ . Тоді  $x(t_0) = 0$ . Але без втрати загальності можна  $t_n$  вважати монотонною послідовністю (обміркуйте!) і між кожною послідовною парою  $t_n$  та  $t_{n+1}$  за теоремою Ролля існує точка (позначимо її  $\tilde{t}_n$ ), в якій  $x'(\tilde{t}_n) = 0$ . При цьому  $\tilde{t}_n \rightarrow t_0$  і тому  $x'(t_0) = 0$ . Тепер за результатом твердження 1, §2.4,  $x(t) \equiv 0$ . ■

4. Множимо обидві частини рівняння (1) на функцію  $b(t)$ . Нехай  $b(t)$  задовольняє тотожність:  $b(t)p(t) = b'(t)$ . Тоді рівняння (1) приймає вид:

$$(b(t)x'(t))' + Q(t)x(t) = 0, \quad (2)$$

де  $b(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right) > 0$ ;  $Q(t) = b(t)q(t)$  (тож знак  $Q(t)$  в кожній точці  $t$  співпадає зі знаком  $q(t)$ ). Надалі запис (2) рівняння (1) домовимось називати „самоспряженим видом рівняння (1)“.

5. Розглянемо окрім рівняння (2) ще аналогічне рівняння

$$(b(t)y'(t))' + Q_1(t)y(t) = 0 \quad (3)$$

Нехай  $x(t)$  та  $y(t)$  - відповідні розв'язки цих рівнянь. Тоді

$$(b(t)x'y)' - (b(t)xy')' = y(b(t)x')' - x(b(t)y')' = (Q_1(t) - Q(t))x(t)y(t).$$

Після інтегрування одержимо „формулу Гріна“:

$$b(t)(x'y - xy')(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (Q_1(t) - Q(t))x(t)y(t)dt \quad (4)$$

## 6. Твердження 2 („теорема порівняння”).

Нехай  $t_1$  і  $t_2$  – сусідні нулі розв’язку  $x(t)$  рівняння (2) і на інтервалі  $\Delta$  між  $t_1$  та  $t_2$  виконується нерівність  $Q_1(t) \geq Q(t)$ , причому  $Q_1(t) \not\equiv Q(t)$ . Тоді кожний розв’язок  $y(t)$  рівняння (3) має на  $\Delta$  принаймні один нуль.

**Доведення.** Нехай  $x(t)$  – розв’язок рівняння (2), для якого  $x(t_1) = x(t_2) = 0$ ;  $t_1 < t_2$  і для кожного  $t \in (t_1, t_2)$  виконується нерівність  $x(t) > 0$  (аналогічно розглядається випадок:  $x(t) < 0$ ). Нехай  $y(t)$  – розв’язок рівняння (3), для якого  $y(t) > 0$  на  $\Delta$ .

Тоді  $\int_{t_1}^{t_2} (Q_1(t) - Q(t))x(t)y(t)dt > 0$ , а з іншого боку,  $b(t)(x'y - xy')(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = b(t_2)x'(t_2)y(t_2) - b(t_1)x'(t_1)y(t_1) \leq 0$ , оскільки  $b(t) > 0$  для кожного  $t$ ;  $x'(t_2) < 0$ ;  $x'(t_1) > 0$ ;  $y(t_2) \geq 0$ ;  $y(t_1) \geq 0$  (обміркуйте). Одержані нерівності несумісні, зважаючи на формулу Гріна (4). ■

**Наслідок 1.** Якщо  $Q(t) \leq 0$  і  $Q(t) \not\equiv 0$  на кожному інтервалі, то кожний розв’язок рівняння (2) не може мати більше одного нуля.

**Доведення.** Візьмемо  $Q_1(t) \equiv 0$ . Тоді рівняння (3) приймає вид:

$$(b(t)y'(t))' = 0 \quad (5)$$

і має загальний розв’язок:

$$y(t) = C_1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{b(t)} + C_2 \quad (6)$$

Оскільки функція  $u(t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{b(t)}$  строго монотонна, то функції виду (6) не можуть мати більше одного нуля.

Нехай  $x(t)$  – розв’язок рівняння (2), який має два нуля  $t_1$  і  $t_2$ . Тоді беремо такий розв’язок  $y(t)$  рівняння (5), для якого  $y(t_1) = 0$  (підбором  $C_1, C_2$ ). Тоді за теоремою порівняння,  $y(t)$  має ще один нуль між  $t_1$  і  $t_2$ . Суперечність. ■

**7. Теорема 1 (теорема Штурма).** Між кожними двома нулями будь-якого розв’язку рівняння (2) (або (1)) міститься в точності один нуль будь-якого лінійно незалежного з ним розв’язку.

**Доведення.** Два лінійно незалежні розв’язки рівняння (2) не можуть мати спільний нуль, бо інакше в цій точці детермінант Вронського цих розв’язків приймає нульове значення. Застосуємо формулу Гріна в ситуації:  $Q(t) \equiv Q_1(t)$ . Нехай  $x(t_1) = x(t_2) = 0$ ;  $x(t) > 0$  для  $t \in (t_1; t_2)$ . Припустимо:  $y(t) > 0$  на  $[t_1; t_2]$ . Тоді  $x'(t_2) < 0$ ;  $x'(t_1) < 0$  (за п.°1) і маємо:

$$b(t)(x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} = b(t_2)x'(t_2)y(t_2) - b(t_1)x'(t_1)y(t_1) < 0,$$

а з іншого боку, права частина у формулі (4) дорівнює нулю. Суперечність. ■

## §2. Крайова задача

Крайова задача для рівняння

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad (7)$$

в якому функції  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $f(t)$  визначені і неперервні на відрізку  $\Delta=[a;b]$ , полягає в пошуку такого розв'язку рівняння (7) на відрізку  $\Delta$ , що задовольняє у кінцях  $\Delta$  фіксовані умови.

Зазвичай розглядають три типи умов:

$$\begin{cases} x(a)=\gamma_1 \\ x(b)=\gamma_2 \end{cases} \quad - \text{ умови першого роду; } \quad \begin{cases} x'(a)=\gamma_1 \\ x'(b)=\gamma_2 \end{cases} \quad - \text{ умови}$$

$$\text{другого роду і більш загальні: } \begin{cases} \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = \gamma_2 \end{cases} -$$

умови третього роду.

У всіх цих умовах  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$  - наперед фіксовані числа, причому  $|\alpha_1|+|\beta_1| \neq 0$ ;  $|\alpha_2|+|\beta_2| \neq 0$ .

В разі, якщо  $\gamma_1=\gamma_2=0$ , то умови називаються „однорідними”; якщо  $f(t) \equiv 0$ ;  $\gamma_1=\gamma_2=0$ , то крайова задача називається „однорідною”. Звичайна антитеза - „неоднорідна”.

Розв'язувати загальну крайову задачу можна за таким сценарієм. Спочатку знайти функцію  $\varphi(t)$ , що задовольняє лише крайові умови. При пошуку цієї функції можна обмежитись, наприклад, розглядом многочленів з невизначеними коефіцієнтами. Після заміни  $x(t)=\varphi(t)+y(t)$  одержимо функцію  $y(t)$ , що повинна задовольняти рівняння (7), але з іншою неоднорідністю, а відповідні крайові умови для  $y(t)$  повинні стати однорідними (перевірте!). Ці міркування приводять до висновку, що досить навчитись розв'язувати крайові задачі з однорідними крайовими умовами.

Надалі рівняння (7) приведемо до „самоспряженого виду”. Це досягається множенням обох частин на функцію  $P(t) > 0$ , а саме

$$P(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)ds\right) \text{ і рівняння (7) замінюємо на}$$

еквівалентне:

$$(P(t)x'(t))' + Q(t)x(t) = g(t), \quad (8)$$

де  $Q(t) = P(t)q(t)$ ;  $g(t) = P(t)f(t)$ .

Розглянемо спочатку однорідну крайову задачу:

$$\begin{cases} (P(t)x'(t))' + Q(t)x(t) = 0 \\ \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = 0 \\ \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Ця задача обов'язково має нульовий розв'язок. В тому разі, якщо вона не має інших (нетривіальних) розв'язків, домовимось казати, що відповідна крайова задача для рівняння (8) є „невиродженою”.

Розглянемо нетривіальний розв'язок  $x_1(t)$  однорідного рівняння

$$(P(t)x'(t))' + Q(t)x(t) = 0, \quad (10)$$

що задовольняє першу крайову умову. Наприклад,

$$\begin{cases} x_1(a) = -\beta_1 \\ x_1'(a) = \alpha_1 \end{cases} \text{ . За теорією, такий розв'язок існує і}$$

задовольняє першу крайову умову:  $\alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = 0$ .

Він ненульовий, оскільки  $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ . Так само, нехай  $x_2(t)$  – нетривіальний розв'язок рівняння (10), що задовольняє другу крайову умову.

**Твердження 3.** Нехай  $x_k(t)$  ( $k=1,2$ ) – нетривіальні розв'язки (10), кожен з яких задовольняє одну з

двох (відповідну) крайових умов. Тоді крайова задача (9) має нетривіальний розв'язок в тому і тільки в тому разі, якщо  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  - лінійно залежні.

**Доведення.** Якщо задача (9) має нетривіальний розв'язок  $x(t)$ , то він повинен разом з  $x_1(t)$ , задовольняти першу крайову умову, тож їх вронскіан  $W(x_1; x)$  в точці  $a$  дорівнює 0, а тому вони лінійно залежні. Аналогічно,  $x(t)$  та  $x_2(t)$  також лінійно залежні. Тому лінійно залежні і  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  (продумайте!). Навпаки, якщо  $x_1(t)$  та  $x_2(t)$  - лінійно залежні, то кожен з них є нетривіальним розв'язком задачі (9), бо вони обидва нетривіальні. А тому задача (9) має нетривіальний розв'язок (наприклад,  $x_1(t)$ ). ■

**Твердження 4.** Якщо в невідродженому випадку розв'язок крайової задачі з однорідними крайовими умовами існує, то він єдиний.

**Доведення.** Різниця цих розв'язків є розв'язком задачі (9). ■

Розв'яжемо невідроджену крайову задачу для неоднорідного рівняння (7) (або, для еквівалентного йому рівняння (8)) з однорідними крайовими умовами.

Розв'язок рівняння (8) шукаємо методом варіації сталих:  $x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$ , де  $\{x_1(t), x_2(t)\}$  фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння (10).

Функції  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$  шукаємо з системи:

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) = \frac{g(t)}{P(t)} \end{cases} \quad (11)$$

Детермінант цієї системи:

$$\Delta = W(x_1, x_2) = W(t) = W(a) \exp\left(-\int_a^t \frac{P'(s)}{P(s)} ds\right); \quad W(t) = W(a) \frac{P(a)}{P(t)}; \quad \text{а}$$

тому  $P(t)W(t)$  – стала функція на  $[a; b]$ .

З системи (11) маємо:

$$C_1'(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ \frac{g(t)}{P(t)} & x_2'(t) \end{vmatrix} = -\frac{g(t)x_2(t)}{W(a)P(a)};$$

$$\text{аналогічно: } C_2'(t) = \frac{g(t)x_1(t)}{W(a)P(a)};$$

$$C_1(t) = C_1 - \int_a^t \frac{g(s)x_2(s)}{W(a)P(a)} ds; \quad C_2(t) = C_2 + \int_a^t \frac{g(s)x_1(s)}{W(a)P(a)} ds \quad (12)$$

З самого початку розв'язки рівняння (10)  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  можна було б вибрати так, щоб  $x_1(t)$  задовольняв першу крайову умову, а  $x_2(t)$  – другу. Ми знаємо вже, що це можна зробити і при цьому система  $\{x_1(t), x_2(t)\}$  буде лінійно незалежною (див. твердження 3). Тому якщо в (12) покласти  $C_2 = 0$ , то відповідний розв'язок рівняння (8):

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) = \\ &= \left(C_1 - \int_a^t \frac{g(s)x_2(s)}{W(a)P(a)} ds\right)x_1(t) + \left(\int_a^t \frac{g(s)x_1(s)}{W(a)P(a)} ds\right)x_2(t) \end{aligned} \quad (13)$$

задовольнить першу крайову умову.

За аналогією з (12) формули для  $C_1(t)$  та  $C_2(t)$  можна було б написати так:

$$C_1(t) = \tilde{C}_1 + \int_t^b \frac{g(s)x_2(s)}{W(a)P(a)} ds; \quad C_2(t) = \tilde{C}_2 - \int_t^b \frac{g(s)x_1(s)}{W(a)P(a)} ds.$$

Тоді функція

$$\left(\int_t^b \frac{g(s)x_2(s)}{W(a)P(a)} ds\right)x_1(t) + \left(\tilde{C}_2 - \int_t^b \frac{g(s)x_1(s)}{W(a)P(a)} ds\right)x_2(t) \quad (14)$$

є розв'язком рівняння (8) та задовольняє другу крайову умову. Шуканий розв'язок одержимо підбором  $C_1$  і  $\tilde{C}_2$  у формулах (13) та (14), при яких ці розв'язки співпадуть.

$$\text{Досить взяти: } C_1 = \int_a^b \frac{g(s)x_2(s)}{W(a)P(a)} ds; \quad \tilde{C}_2 = \int_a^b \frac{g(s)x_1(s)}{W(a)P(a)} ds.$$

Шуканий розв'язок прийме вид:

$$x(t) = \int_t^b \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(a)P(a)} g(s) ds + \int_a^t \frac{x_1(s)x_2(t)}{W(a)P(a)} g(s) ds \quad \text{або:}$$

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)g(s)ds, \quad (15)$$

де

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{W(a)P(a)} x_1(t)x_2(s), & a \leq t \leq s \leq b; \\ \frac{1}{W(a)P(a)} x_1(s)x_2(t), & a \leq s \leq t \leq b \end{cases} \quad (16)$$

Функція  $G(t,s)$ , що визначена за формулою (16), має такі властивості:

1.  $G(t,s)$  неперервна в квадраті  $K = [a;b] \times [a;b]$  і має неперервні часткові похідні  $\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)$  і  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(t,s)$



в трикутниках  $\{(t,s) | a \leq t \leq s \leq b\} \setminus \{(a,a)\}$  та  $\{(t,s) | a \leq s \leq t \leq b\} \setminus \{(b,b)\}$ .

2. Для кожного  $s_0 \in [a;b]$  функція  $G(t,s_0)$  задовольняє відповідне лінійне однорідне рівняння на  $[a;b]$  крім точки  $t=s_0$  та задовольняє крайові умови.

3. На діагоналі квадрата  $K$  похідна  $\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)$  має розрив першого роду зі стрибком

$$G'_t(s+0,s) - G'_t(s-0,s) = \frac{1}{P(s)} \quad (17)$$

(перевірте!)

$$4. G(t,s) = G(s,t).$$

Можна довести, що в разі, якщо існує функція  $G(t,s)$ , яка має властивості 1-3, ця функція (вона називається функцією Гріна) обов'язково має вид (16) і задає розв'язок крайової задачі (для неоднорідного рівняння (8)) за формулою (15).

**Приклад.** Для рівняння  $x'' + x = f(t)$  розв'язати крайову задачу:  $x'(0) = 0$ ;  $x(\pi) = 0$ .

**Розв'язання.** Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $x'' + x = 0$  має вид:  $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Функція  $x_1(t) = \cos t$  задовольняє першу умову;  $x_2(t) = \sin t$  - другу. Вони лінійно незалежні, тож крайова задача не вироджена.

Функція Гріна має вид:  $G(t,s) = \begin{cases} Cx_1(t)x_2(s), & t \leq s \\ Cx_1(s)x_2(t), & t \geq s \end{cases}$ . Для

визначення константи  $C$  можна, наприклад,

скористатись властивостями 1-3 функції  $G(t, s)$ , а саме формулою (17):

$$1 = \frac{\partial G}{\partial t}(s+0, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(s-0, s) = C(x_1(s)x_2'(s) - x_2(s)x_1'(s)) = C \quad (\text{тут } P(s) \equiv 1).$$

Звідси:

$$x(t) = \int_0^\pi G(t, s) f(s) ds = \left( \int_0^\pi \cos s \cdot f(s) ds \right) \sin t + \left( \int_t^\pi \sin s \cdot f(s) ds \right) \cos t.$$

### **§3. Поняття про крайову задачу на власні числа (задача Штурма-Ліувілля)**

Задача полягає в тому, щоб знайти числа  $\lambda$  (вони називаються власними числами задачі), при яких рівняння

$$Lx = \lambda x \quad (18)$$

(тут  $(Lx)(t) = (P(t)x'(t))' + Q(t)x(t)$ ) з умовами:

$$\begin{cases} \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = 0 \\ \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

має нетривіальний розв'язок.

Припустимо, що крайова задача є невиродженою. Тоді число  $\lambda = 0$  не є власним числом задачі. В цьому разі рівняння (18) разом з умовами (19) еквівалентне інтегральному рівнянню:

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) \lambda x(s) ds = \lambda \int_a^b G(t, s) x(s) ds.$$

Таким чином,  $\lambda$  – власне число (однорідної) крайової задачі в тому й тільки тому разі, якщо існує нетривіальний розв'язок інтегрального рівняння:

$$x(t) = \lambda \int_a^b G(t,s)x(s)ds .$$

**Приклад.** Знайти власні числа і власні функції крайової задачі:

$$Lx = x'' = \lambda x \quad (20)$$

з крайовими умовами:

$$x(0) = 0 ; \quad x'(l) = 0 . \quad (21)$$

**Розв'язання.** При  $\lambda = 0$ :  $x(t) = C_1 + C_2 t \Rightarrow$  крайові умови задовольняються лише для  $x \equiv 0$ . Тож  $\lambda = 0$  не є власним числом  $\Rightarrow$  маємо невироджений випадок.

Для  $\lambda > 0$ : розв'язки рівняння (20):  
 $x(t) = C_1 e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda}}$ . Умови (21) задовольняє лише  $x(t) \equiv 0$ .

Для  $\lambda < 0$  маємо: власні числа:  $\lambda_n = -\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\right)^2$ ;  
 власні функції:  $x_n(t) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\frac{t}{l}\right)$  (перевірте!).

#### **§4. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих та узагальнених степеневих рядів.**

Функція  $f(t)$  дійсного аргументу називається дійсно аналітичною в точці  $t_0$ , якщо  $f$  визначена в околі  $U$  точки  $t_0$  і в цьому околі функція  $f$  дорівнює сумі степеневого ряду:  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$ .  
 Тоді, як відомо з курсу математичного аналізу, в околі  $U$  функція  $f$  має похідні усіх порядків і

при цьому:  $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0)$ . При цьому похідні та первісну функції  $f$  можна знайти почленним диференціюванням або інтегруванням степеневого ряду.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння:

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = h(t). \quad (22)$$

**Теорема 2.** Нехай  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $h(t)$  – дійсно аналітичні функції в точці  $t_0$  і відповідні ряди збігаються до цих функцій в околі точки  $t_0$  радіуса  $r$ . Тоді кожний розв'язок рівняння (22) є дійсно аналітичним і може бути представлений сумою степеневого ряду, що збігається в околі точки  $t_0$  радіуса  $r$ .

**Ідея доведення.** Для спрощення формул припустимо, що  $t_0 = 0$ . Нехай  $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ ;  $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ ;

$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n$ . Шукаємо розв'язок як суму ряду:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \quad \text{Тоді} \quad x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n;$$

$x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n$  і, після підстановки в рівняння (22) одержимо:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n c_{j+1} p_{n-j} (j+1) \right) t^n + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n c_j q_{n-j} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n. \end{aligned} \quad (23)$$

Для того, щоб виконувалась рівність (23) достатньо (і необхідно також) співпадіння коефіцієнтів при кожному степені  $t$ . Маємо систему:

$$\begin{aligned} 2c_2 + p_0c_1 + q_0c_0 &= h_0 \\ 6c_3 + 2p_0c_2 + (p_1 + q_0)c_1 + q_1c_0 &= h_1 \\ &\dots \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо довільним чином задати  $c_0, c_1$ , то поступово знаходимо з системи (24) і всі інші коефіцієнти  $c_n$  (до речі, єдиним чином). Одержимо (при відповідних  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ ):

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1\left(-\frac{1}{2}p_0\right) + c_0\left(-\frac{1}{2}q_0\right) + \frac{1}{2}h_0 \\ c_3 &= c_1 \cdot \alpha_3 + c_2 \cdot \beta_3 + \gamma_3 \\ c_4 &= c_1 \cdot \alpha_4 + c_2 \cdot \beta_4 + \gamma_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Звідси:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n + c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n. \quad (25)$$

Тож одержимо загальний розв'язок рівняння (22). Складність полягає лише в перевірці того, що радіуси збіжності рядів, що стоять у правій частині (25) не менші за  $r$ . ■

В разі, якщо лінійне рівняння не є зведеним (коефіцієнт при старшій похідній не дорівнює 1) і коефіцієнт при старшій похідній дорівнює 0 в точці  $t_0$ , теорема 2 не спрацьовує. Але в цьому разі виявляється доцільним пошук розв'язку рівняння у

вигляді „узагальненого степеневого ряду” (далі покладемо для спрощення  $t_0 = 0$ ) :

$$x(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n . \quad (26)$$

Розглянемо дію цього методу на прикладі рівняння Бесселя:

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \vartheta^2)x = 0 \quad (27)$$

( $\vartheta > 0$ ) .

Нехай  $t > 0$  .

Шукаємо розв'язок рівняння (27) у вигляді

(26) . Маємо:  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\lambda} ; \quad tx'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) t^{n+\lambda} ;$

$$t^2 x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) t^{n+\lambda} ;$$

$$(t^2 - \vartheta^2)x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\lambda+2} - \vartheta^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\lambda} , \text{ звідки:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n ((n+\lambda)^2 - \vartheta^2) t^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^n = 0 .$$

Одержимо систему:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \vartheta^2)c_0 &= 0 \\ ((\lambda+1)^2 - \vartheta^2)c_1 &= 0 \\ ((\lambda+2)^2 - \vartheta^2)c_2 + c_0 &= 0 \\ ((\lambda+3)^2 - \vartheta^2)c_3 + c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

...

Шукаємо ненульові розв'язки. Тому в системі (28) одне з двох перших рівнянь повинно дати ненульовий розв'язок. Покладемо  $\lambda = \vartheta$  . Тоді з

$$(28): \quad c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0; \quad c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 \cdot n \cdot (\vartheta + n)} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad \text{Тоді:}$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (\vartheta + 1)(\vartheta + 2) \dots (\vartheta + n)};$$

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0 t^{2n+\vartheta}}{2^{2n} n! (\vartheta + 1)(\vartheta + 2) \dots (\vartheta + n)}. \quad (29)$$

За ознакою Даламбера ряд (29) збігається на обмежених відрізках в  $(0; +\infty)$ . Якщо прийняти:

$$c_0 = \frac{1}{2^\vartheta \Gamma(\vartheta + 1)}, \quad \text{то за властивістю гамма-функції:}$$

$$(\vartheta + n) \Gamma(\vartheta + n) = \Gamma(\vartheta + n + 1) \quad \text{і тому}$$

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\vartheta + n + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\vartheta} \quad (30)$$

Функція  $x_1(t)$ , що визначена формулою (30), називається функцією Бесселя 1<sup>го</sup> роду (з індексом  $\vartheta$ ) і позначається:  $J_\vartheta(t)$ .

Нехай у подальшому:  $\vartheta \notin \mathbb{N}$ . Покладемо:  $\lambda = -\vartheta$ . Тоді з системи (28) аналогічно отримаємо:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (-\vartheta + 1)(-\vartheta + 2) \dots (-\vartheta + n)}; \quad c_{2n+1} = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

(31)

(умова:  $\vartheta \notin \mathbb{N}$  унеможливлує у формулі (31) нулі у знаменнику)

$$\text{Покладемо } c_0 = \frac{2^\vartheta}{\Gamma(-\vartheta + 1)} \quad \text{і одержимо:}$$

$$x_2(t) = J_{-\vartheta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\vartheta + n + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-\vartheta}.$$

Нескладно побачити, що  $J_g(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0+0$ ;  $I_{-g}(t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow 0+0$  (відслідкуйте!). Тому  $J_g(t)$ ,  $J_{-g}(t)$  – лінійно незалежні і на  $(0; +\infty)$  загальний розв’язок рівняння (27) має вид:  

$$x(t) = C_1 J_g(t) + C_2 J_{-g}(t).$$

В разі, якщо  $g \in \mathbb{R}$ , функцію  $J_{-g}(t)$  не вдається розглядати. В цьому разі, для цілих  $g$ , запроваджується у вжиток інша, так звана функція Бесселя другого роду  $Y_g(t)$  (Ханкель, Вебер, Шлефлі), яка лінійно незалежна з  $J_g(t)$  і загальний розв’язок рівняння (27) приймає вид:  

$$x(t) = C_1 J_g(t) + C_2 Y_g(t).$$

**Приклад.** Розв’язати рівняння  $x'' + tx' + x = 0$ .

**Розв’язання.** Шукаємо розв’язок виду:  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_n t^n = 0; \quad (n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

( $n=0,1,2,\dots$ ). Покладемо:  $c_0=1$ ;  $c_1=0$ . Маємо:  $c_{2n+1}=0$

$$; \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}; \quad x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Покладемо:  $c_0=0$ ;  $c_1=1$ . Маємо:  $c_{2n}=0$ ;  $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$ ;

$$x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Загальний розв’язок:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t).$$



## РОЗДІЛ 4. АВТОНОМНІ СИСТЕМИ. ТЕОРІЯ ПЕРШИХ ІНТЕГРАЛІВ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

### §1. Початкові поняття

В §1.1 було одержано теорему Пікара про існування та єдиність (локального) розв'язку (нелінійної) системи диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases},$$

або, у векторному запису:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (1)$$

Системи виду (1) (які є розв'язними відносно похідної) називають „нормальними системами”, а в разі, якщо функція  $\vec{f}$  явно від  $t$  не залежить, називають „автономними” або „динамічними”. Тож автономні системи мають вид:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (2)$$

При цьому простір  $\square^n = \{< x_1, \dots, x_n >\}$  називають фазовим простором, а  $\square^{n+1} = \{< t, x_1, \dots, x_n >\}$  – розширеним фазовим простором (це означення не зовсім строге і надалі буде уточнено). Нормальну систему можна перетворити на автономну, фазовий простір якої має розмірність на одиницю більше, якщо покласти:  $x_0 = t$  і додати ще одне рівняння:  $\dot{x}_0 = 1$ .

Розв'язок  $\vec{x}(t)$  системи (1) визначає криву в  $\square^{n+1}$  (графік відповідної функції; інтегральна крива), а

її проекція на  $\mathbb{R}^n$  – „траєкторія” (або „фазова крива”) розв’язку у фазовому просторі.

У подальшому в цьому розділі будемо розглядати саме автономні системи. Рівняння виду

$$x^{(n)} = f(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}), \quad (3)$$

які розв’язні відносно старшої похідної і права частина яких не залежить явно від  $t$ , після запровадження допоміжних функцій  $x_1(t) = x(t)$ ;  $x_2(t) = x'(t)$ ; ... ;  $x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$ , за методикою §2.1, перетворюється у автономну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (4)$$

Рівняння виду (3) також називають автономними.

Паралель між рівнянням (3) та системою (4) дозволяє із загальних результатів для систем (2) одержувати змістовні наслідки для рівнянь виду (3).

Надалі припускаємо, що функція  $\vec{f}$  в системі (2) є функцією класу  $C^1$  в  $\mathbb{R}^n$  або в області  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Це дозволяє застосовувати теорему 1.2.

**Твердження 1.** Нехай  $\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t)$  – розв’язок автономної системи (2). Тоді  $\forall s \in \mathbb{R} : \vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t+s)$  також є розв’язком системи (2).

**Доведення.** 
$$\frac{d\vec{\psi}}{dt}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}(t+s) = \vec{f}(\vec{\varphi}(t+s)) = \vec{f}(\vec{\psi}(t)). \blacksquare$$

Тут і надалі з метою спрощення вважаємо, що область визначення  $D$  функції  $\vec{f}$  (уточнюємо: саме

$D$  слід вважати фазовим простором) така, що всі розв'язки системи (2) нескінченно продовжувані.

**Вправа.** Який результат є аналогом твердження 1 для рівнянь виду (3)?

**Твердження 2.** Для автономної системи через кожну точку фазового простору проходить в точності одна траєкторія.

**Доведення.** За теоремою Пікара через кожну точку розширеного фазового простору (тобто через  $\langle t_0, \vec{x}_0 \rangle \in \mathbb{R} \times D$ ) проходить інтегральна крива, а тому при проектуванні на  $\mathbb{R}^n$  вона переходить у траєкторію, що проходить через точку  $x_0 \in D$ .

Нехай  $\vec{\phi}_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\vec{\phi}_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  – два розв'язки системи (2), траєкторії яких перетинаються в точці  $\vec{x}_0$ , тобто  $\vec{\phi}_1(t_1) = \vec{x}_0 = \vec{\phi}_2(t_2)$ . Для  $s = t_1 - t_2$  розглянемо  $\vec{\psi}(t) = \vec{\phi}_1(t + s)$  – розв'язок системи (2) за твердженням 1 (і до того ж траєкторії  $\vec{\psi}$  та  $\vec{\phi}_1$  співпадають). При цьому  $\vec{\psi}(t_2) = \vec{\phi}_1(t_1) = \vec{\phi}_2(t_2)$ . Тоді за теоремою Пікара:  $\vec{\psi}(t) = \vec{\phi}_2(t)$  для кожного  $t \in \mathbb{R}$ . Тож траєкторії розв'язків  $\vec{\phi}_1$  і  $\vec{\phi}_2$  співпадають. ■

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)} \quad (5)$$

Параметричне завдання кожної інтегральної кривої рівняння (5) задовольняє рівняння

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{g(x(t), y(t))}{f(x(t), y(t))}, \quad \text{а тому серед можливих}$$

параметризацій є така, що задовольняє систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (6)$$

(Чому? Обміркуйте!)

Тож будь-яка інтегральна крива рівняння (5) є траєкторією системи (6). Аналогічні міркування показують, що всі інтегральні криві системи

$$\frac{dx_1}{f_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{f_2(\vec{x})} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(\vec{x})} \quad (7)$$

є траєкторіями системи (2).

Навпаки. Кожний розв'язок системи (2) є параметризацією траєкторії цієї ж системи. Але з іншого боку цей розв'язок  $\vec{x}(t)$  може бути тлумачений і як параметричне завдання розв'язку системи (7), тому що для нього виконується співвідношення:

$$\frac{dx_1}{dt} : \frac{dx_2}{dt} : \dots : \frac{dx_n}{dt} = f_1(\vec{x}(t)) : f_2(\vec{x}(t)) : \dots : f_n(\vec{x}(t)) \quad (8)$$

Ці міркування показують, що траєкторії системи (2) (траєкторії – це множини в  $\mathbb{R}^n$ ; їх параметризація нас зараз не цікавить) в точності співпадають з інтегральними кривими системи (7).

Домовимось систему рівнянь (7) називати „симетричною формою завдання” системи (2).

## §2. Перші інтеграли

**Означення.** Функція  $\Phi$  класу  $C^1(D)$ , що визначена на фазовому просторі автономної системи (2) називається першим інтегралом системи (2), якщо вона приймає сталі значення на кожній траєкторії системи (2).

**Твердження 3.**  $\Phi \in C^1(D)$  – перший інтеграл системи (2) тоді й тільки тоді, коли задовольняє тотожно в  $D$  рівність:

$$\sum_{k=1}^n f_k(\vec{x}) \frac{\partial \Phi(\vec{x})}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (9)$$

**Доведення.** Необхідність умови (9). Нехай  $\vec{x}(t)$  – траєкторія системи (2) і при цьому  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ . Оскільки  $\Phi(\vec{x}(t)) \equiv C$  (при  $t \in \square$ ), то

$$0 = \frac{d}{dt} \Phi(\vec{x}(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{dx_k}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(\vec{x}(t)) \cdot f_k(\vec{x}(t)).$$

Залишилось нагадати, що через кожну точку фазового простору  $D$  проходить інтегральна крива, а тому тотожно в  $D$  має місце рівність (9).

Достатність умови (9). Нехай виконується (9) і  $\vec{x}(t)$  – розв'язок системи (2). Тоді для функції  $\varphi(t) = \Phi(\vec{x}(t))$  маємо:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{dx_k}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(\vec{x}(t)) \cdot f_k(\vec{x}(t)) \equiv 0. \quad \text{Тож } \Phi(\vec{x})$$

стала на траєкторії  $\{\vec{x}(t)\}$ . ■

**Приклад 1.** Вільне падіння тіла під дією сили тяжіння Землі.

Якщо прийняти за  $\vec{x}(t)$  висоту тіла над поверхнею Землі в момент часу  $t$ , то, як відомо з механіки,  $\ddot{x}(t) = -g$  ( $g$  – прискорення сили тяжіння). Відповідна система приймає вид (тут  $v$  – швидкість):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -g \end{cases} \quad (10)$$

Перевіримо, що функція  $\Phi(x,v) = mgx + \frac{mv^2}{2}$  є першим інтегралом системи (10). Застосуємо критерій (9):  

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}v + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(-g) = mgv - mgv = 0.$$
 Тож, на кожній траєкторії:  $\Phi(x(t),v(t))$  є сталою величиною (закон збереження енергії).

Криві  $\Phi(x,v) = C$  визначають в площині  $\{<x,v>\}$  криві, що є траєкторіями системи (10). Для автономної системи з  $n$  рівнянь траєкторії можна було б одержати як сумісний перетин  $(n-1)$  поверхонь рівня функцій  $\Phi_k(\vec{x}) = C_k$ . Звичайно, в ситуації, коли в перетині дійсно утворюється крива. Достатньою умовою для цього є лінійна незалежність градієнтів функцій  $\Phi_k(\vec{x})$  у всіх точках сумісного перетину. Цей факт є наслідком теореми про неявну функцію. Ми не будемо його доводити.

В разі, якщо знайдено сім'ю  $\Phi_1(\cdot), \dots, \Phi_m(\cdot)$  перших інтегралів системи (2), то для будь-якої гладкої функції  $v(p_1, \dots, p_m)$  класу  $C^1$ , що визначена на множині  $\{<\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_m(\vec{x})> \subset \mathbb{R}^m \mid \vec{x} \in D\}$ , функція  $\Phi(\vec{x}) = v(\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_m(\vec{x}))$  також буде першим інтегралом системи (2) (перевірте!)

Наступна теорема майже повністю буде доведена в §10.

**Теорема 1.** Нехай  $\vec{f} \in C^1(D)$ ;  $\vec{x}_0 \in D$ ;  $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$  (точка  $\vec{x}_0$  не є „точкою рівноваги” динамічної системи (2)). Тоді в достатньо малому околі  $V$

точки  $\vec{x}_0$  існує  $n-1$  незалежних перших інтегралів  $\{\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_{n-1}(\vec{x})\}$  системи (2) (система функцій  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}$  вважається незалежною в  $V$ , якщо в кожній точці  $\vec{x} \in V$  система градієнтів  $\{\overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1(\vec{x}), \dots, \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_m(\vec{x})\}$  є лінійно незалежною). Крім того, якщо  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}\}$  довільна система незалежних перших інтегралів системи (2) в околі  $W$  точки  $\vec{x}_0$ , то будь-який інший перший інтеграл  $\Phi$  можна локально виразити через  $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ , тобто в достатньо малому околі точки  $\vec{x}_0$   $\Phi(\vec{x})$  має вид:  $\Phi(\vec{x}) = v(\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_{n-1}(\vec{x}))$  з деякою гладкою функцією  $v$ .

**Приклад 2.** Система  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$  – це лінійна система,

загальний розв'язок якої має вид:  $\begin{cases} x_1 = C_1 e^t \\ x_2 = C_2 e^t \end{cases}$ .

Перевірте, що ця система не має жодного першого інтеграла на всьому  $\mathbb{R}^2$  крім сталих функцій. Як цей результат узгоджується з результатом теореми 1?

**Приклад 3.** Нехай  $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  – неперервно диференційовна функція  $2n$  змінних. Доведіть, що вона є першим інтегралом „системи канонічних рівнянь Гамільтона”:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} & (i=1, 2, \dots, n) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} & (i=1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

### §3. Диференціальні рівняння першого порядку з частковими похідними

Для функцій  $u(x_1, \dots, x_n)$  кількох змінних під диференціальним рівнянням першого порядку (з частковими похідними) розуміємо таке:

$$F(x_1, \dots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (11)$$

(тут  $F$  – функція  $2n+1$  змінної).

Розв'язок рівняння (11) – це функція  $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ , така, що після підстановки її в (11) на певній області  $D \subset \mathbb{R}^n$  виконується тотожність:

$$F(x_1, \dots, x_n; \varphi(x_1, \dots, x_n); \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$$

Геометрично розв'язок – це поверхня в  $\mathbb{R}^{n+1}$  („інтегральна поверхня“). Будемо розглядати:

–однорідне лінійне рівняння:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}) = 0; \quad (12)$$

–неоднорідне лінійне рівняння:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}) = b(\vec{x})u + c(\vec{x});$$

–квазілінійне рівняння:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\vec{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}) = b(\vec{x}, u) \quad (13)$$

Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння (12) і пов'яжемо з ним систему лінійних рівнянь:



$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(\vec{x}) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_n(\vec{x}) \end{cases} \quad (14)$$

Автономна система (14) називається системою характеристик рівняння (12), а її траєкторії називаються характеристиками рівняння (12).

**Твердження 4.** Функція  $u(x_1, \dots, x_n)$  є розв'язком рівняння (12) тоді й тільки тоді, коли  $u(\vec{x})$  – перший інтеграл системи (14).

**Доведення.** Очевидно, бо твердження еквівалентне твердженню 3. ■

Звідси метод розв'язання рівняння (12): слід знайти незалежні перші інтеграли  $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$  системи (14) – у відповідності до теореми 1, в кількості  $n-1$ ; тоді загальний вид першого інтеграла системи (14) (а це і є розв'язок рівняння (12)) такий:  $u(\vec{x}) = v(\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_{n-1}(\vec{x}))$ . Тут ми дещо зневажливо ставимось до умов локальності в теоремі 1; насправді область визначення розв'язку  $u$  співпадає з областю тих  $\vec{x}$ , в яких система градієнтів функцій  $\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_{n-1}(\vec{x})$  лінійно незалежна, тобто ранг матриці  $(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1(\vec{x}), \dots, \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_{n-1}(\vec{x}))$  дорівнює  $n-1$ .

**Приклади.** 1.  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . (15)

Система характеристик має вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 1 \end{cases}; \quad (16)$$

загальний розв'язок:  $\begin{cases} x = t + C_1 \\ y = t + C_2 \end{cases}$ , а тому функція

$\Phi(x, y) = x - y$  є першим інтегралом системи (16);

$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Загальний розв'язок рівняння (15):

$u(x, y) = v(x - y)$ . Перший інтеграл системи (16) можна було б знайти і з інших міркувань. Система (16) в симетричній формі приймає вид:  $dx = dy$ , звідки:  $x - y = \text{const}$  і тому  $\Phi(x, y) = x - y$  – стала на інтегральних кривих останнього рівняння.

$$2. (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

Відповідна система характеристик:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (18)$$

Цю лінійну систему можна розв'язувати різними способами.

Спосіб 1. Техніка розв'язання лінійних однорідних систем дає:

$$\vec{x}(t) = V e^{tA_j} \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тож  $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ ;  $y = -C_2 e^{-t}$ . Звідси:

$(x + y)y = -C_1 C_2 = \text{const}$ ;  $\Phi(x, y) = (x + y)y$  – перший інтеграл системи (18), при цьому

$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x+2y \end{pmatrix}$  і в області

$\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} y \neq 0 \\ x+2y \neq 0 \end{cases} \right\} = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 0 \}$  функція

$\Phi(x, y) = v((x+y)y)$  дає загальний розв'язок рівняння (17).

Спосіб 2. Оскільки нас цікавлять не самі розв'язки системи (18), а лише траєкторії системи, то можна застосувати симетричну форму системи (18):

$$\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y} \quad (19)$$

Рівняння (19) у свою чергу можна розв'язувати або зведенням до лінійного рівняння  $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}x - 2$ ,

або до однорідного:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}$  із заміною  $y = u \cdot x$ ,

або перейти до еквівалентного:  $\frac{dy}{-y} = \frac{d(x+y)}{x+y}$ ,

звідки:  $\ln|y| + \ln|x+y| = C$ ;  $y(x+y) = C_1$  і далі, як у способі 1.

$$3. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Система характеристик:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{dz}{dt} = z \end{cases} \quad (21)$$

має розв'язок:  $x = C_1 e^t$ ;  $y = C_2 e^t$ ;  $z = C_3 e^t$ . Звідси:

перші інтеграли  $\Phi_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$ ;  $\Phi_2(x, y, z) = \frac{x}{z}$ .

Відповідна матриця  $(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1(\cdot), \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_2(\cdot)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ -\frac{x}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{z^2} \end{pmatrix}$

має ранг 2 в усьому просторі крім площин  $x=0; y=0; z=0$ . Тому в кожному октанті простору  $\mathbb{R}^3$  система перших інтегралів  $\{\Phi_1, \Phi_2\}$  незалежна. Тож, загальний розв'язок рівняння (20) в кожному з октантів має вид:  $u(x, y, z) = v(\frac{x}{y}, \frac{x}{z})$ , де  $v$  - довільна

функція класу  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Інший спосіб пошуку перших інтегралів: з симетричної форми системи (21):

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

маємо:  $y = Cx$ ;  $z = C_1 x$ ; і т.д.

Розглянемо тепер квазілінійне рівняння (13). Шукаємо його розв'язок в неявному вигляді:

$F(\vec{x}, u) = 0$ . Тоді:  $\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial u}}$ , а тому приходимо до

рівняння:

$$\sum_{k=1}^n a_k(\vec{x}, u) \frac{\partial F}{\partial x_k} + b(\vec{x}, u) \frac{\partial F}{\partial u} = 0. \quad (22)$$

Останнє рівняння є лінійним однорідним відносно функції  $F$ . Тому  $F$  – перший інтеграл системи

$$\begin{cases} \frac{\partial x_k}{\partial t} = a_k(\vec{x}, u), k = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial u}{\partial t} = b(\vec{x}, u) \end{cases} \quad (23)$$

Автономна система (23) називається системою характеристик рівняння (13), а її траєкторії – характеристиками рівняння (13). Якщо  $\{\Phi_1(\vec{x}, u), \dots, \Phi_n(\vec{x}, u)\}$  – незалежна система перших інтегралів системи (23), то загальний розв'язок рівняння (13) задається (неявно) формулою:

$$v(\Phi_1(\vec{x}, u), \dots, \Phi_n(\vec{x}, u)) = 0,$$

де  $v$  – (довільна) функція класу  $C^1$ , визначена на фазовому просторі системи (23), що співпадає з сумісною областю визначення всіх коефіцієнтів  $a_k(\vec{x}, u)$  та правої частини  $b(\vec{x}, u)$  рівняння (13).

**Приклад.** Розв'язати рівняння:

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \quad (24)$$

Система характеристик рівняння (24) має вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy \\ \frac{dy}{dt} = -y^2 \\ \frac{du}{dt} = x^2, \end{cases} \quad (25)$$

або в симетричному вигляді:  $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{du}{x^2}$ . Маємо:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}, \text{ звідки: } xy = C_1; \quad \frac{dx}{y} = \frac{du}{x}; \quad \frac{xdx}{C_1} = \frac{du}{x}; \quad du = \frac{x^2 dx}{C_1}$$

;  $u = \frac{x^3}{3C_1} + C_2 = \frac{x^2}{3y} + C_2$ . Тому перші інтеграли системи

$$(25): \quad \Phi_1(x, y, u) = xy; \quad \Phi_2(x, y, u) = u - \frac{x^2}{3y}. \quad \text{Матриця}$$

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1, \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_2) = \begin{pmatrix} y & -\frac{2x}{3y} \\ x & \frac{x^2}{3y^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{В областях, на які}$$

розкладається  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x=0) \vee (y=0)\}$  ця матриця має ранг 2; перші інтеграли  $\Phi_1, \Phi_2$  - незалежні і загальний розв'язок рівняння (24) в цих областях (неявно) можна представити рівнянням:

$$v(x, y, u - \frac{x^2}{3y}) = 0. \quad (26)$$

За відповідних умов неявне рівняння (26) розв'язку  $u(x, y)$  припустимо переписати в явному

вигляді:  $u - \frac{x^2}{3y} = f(xy)$ , або  $u = \frac{x^2}{3y} + f(xy)$ , де  $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

**Зауваження.** В цьому і наступному параграфі ми цілком свідомо припускаємось деякої недбалості і не обтяжуємо себе ретельною перевіркою усіх перетворень. Наша мета – демонстрація ефективного застосування теорії звичайних диференціальних рівнянь при розв’язанні певного класу рівнянь у часткових похідних.

#### **§4. Задача Коші для диференціальних рівнянь 1<sup>го</sup> порядку в часткових похідних**

Кожний розв’язок диференціального рівняння (13) у часткових похідних для функції  $u = u(\vec{x})$   $n$  дійсних змінних в геометричному сенсі – це поверхня в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , графік функції  $u$ . Ця поверхня, в разі її не виродженості, повинна локально представляти собою клаптик викривленого  $n$ -вимірного простору, бути за відповідними означеннями,  $n$ -вимірною. Виявляється, що кожна з цих поверхонь цілком складається з характеристик (траєкторій системи (23)). Задача „з початковими умовами” (або „задача Коші”) для рівняння (13) полягає в пошуку розв’язку, що містить наперед задану поверхню  $S$  (розмірності  $n-1$ ). Виявляється, що цей розв’язок (в геометричному сенсі) складається з характеристик, що проходять через точки поверхні  $S$ . Звичайно, ми припускаємось, що ці

характеристики не дотикаються поверхні  $S$  і наші міркування локальні.

**Твердження 5.** Функція  $u(\vec{x})$  класу  $C^1$  тоді й тільки тоді є розв'язком квазілінійного рівняння (13), коли її графік цілком складається з характеристик рівняння (тобто траєкторій системи (23)).

**Доведення.** Нехай поверхня  $S$  цілком складається з характеристик і задається рівнянням:  $u = \varphi(\vec{x})$  або, в неявному виді,  $F(\vec{x}, u) = \varphi(\vec{x}) - u = 0$ . Для кожної точки  $(\vec{x}, u)$  поверхні  $S$  вектор  $\vec{\xi} = (a_1(\vec{x}, u), a_2(\vec{x}, u), \dots, a_n(\vec{x}, u), b(\vec{x}, u))$  є дотичним до характеристики, що виходить з цієї точки (див. (23)), а тому є дотичним і до поверхні  $S$  в цій точці. З іншого боку, вектор

$\vec{\eta} = \overrightarrow{\text{grad}} F(\vec{x}, u) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\vec{x}), -1 \right)$  є вектором нормалі

до  $S$  в точці  $(\vec{x}, u)$ . Умова:  $(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = 0$  в координатах

дає рівність: 
$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{x}) \cdot a_k(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) - b(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) = 0.$$

Залишилось зауважити, що  $(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))$  – це і є загальне завдання точок поверхні  $S$ , а тому функція  $u = \varphi(\vec{x})$  є розв'язком рівняння (13).

Навпаки. Нехай  $u = \varphi(\vec{x})$  – розв'язок рівняння (13);  $S$  – відповідна інтегральна поверхня і  $(\vec{x}_0, \varphi(\vec{x}_0)) \in S$ . Розглянемо допоміжну систему:

$$\frac{dx_k}{dt} = a_k(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (27)$$



і нехай  $\vec{x}(t)$  – її (єдиний) розв'язок, для якого  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ .

Покладемо:  $u(t) = \varphi(\vec{x}(t))$ . Тоді крива  $(\vec{x}(t), \varphi(\vec{x}(t)))$  цілком лежить на поверхні  $S$ . Але з іншого боку:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{x}(t)) \frac{dx_k}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{x}(t)) \cdot a_k(\vec{x}(t), \varphi(\vec{x}(t))) = \\ &= b(\vec{x}(t), \varphi(\vec{x}(t))). \end{aligned}$$

Тож крива  $(\vec{x}(t), \varphi(\vec{x}(t)))$  задовольняє систему характеристик (23). Тому характеристика, що проходить через довільно взяту точку  $(\vec{x}_0, \varphi(\vec{x}_0)) \in S$ , розташована саме на цій поверхні. ■

На підставі твердження 5 маємо метод розв'язання задачі Коші: через кожну точку поверхні  $S$  слід провести характеристику і таким чином утворити поверхню розв'язку (інтегральну поверхню).

**Приклад.** Розв'язати рівняння

$$-x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (y > 0) \quad (28)$$

з початковою умовою:  $\begin{cases} x + y = 1 \\ u = y \end{cases}$ .

**Розв'язання** Спосіб 1. Початкова умова задає криву (пряму) в  $\square^3$  (тут  $n=2$ ), яку можна параметризувати, наприклад, так:  $y=s$ ;  $x=1-s$ ;  $u=s$ .

Система характеристик має вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = \frac{u}{2y} \\ \frac{du}{dt} = u \end{cases} \quad (29)$$

Розв'язок системи (29):  $x = C_1 e^{-t}$ ;  $u = C_2 e^t$ ;  $y = \sqrt{C_2 e^t + C_3}$ . Шукаємо ті характеристики, що перетинають криву (початкову умову) в точці, що відповідає значенню параметра  $t_0 = 0$ . Маємо:  $C_2 = s$ ;  $C_1 = 1 - s$ ;  $C_3 = s^2 - s$ . Отже, шуканий розв'язок у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = (1 - s)e^{-t} \\ y = \sqrt{se^t + s^2 - s} \\ u = se^t \end{cases}$$

Спосіб 2 Запишемо систему характеристик (29) у симетричному вигляді:

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy \cdot 2y}{u} = \frac{du}{u}.$$

Звідси:  $\left(\frac{dx}{-x} = \frac{du}{u}\right) \Rightarrow (xu = C_1)$ ;  $(2ydy = du) \Rightarrow (u - y^2 = C_2)$ ;

$F(xu, u - y^2) = 0$  - загальний розв'язок вихідного рівняння (28). З початкової умови ( $x = 1 - y$ ;  $u = y$ ) маємо:  $F(y(1 - y), y - y^2) = 0$ . Тому рівняння  $F(p, q) = 0$  перетворюється в таке:  $p - q = 0$ , звідки  $xu - u + y^2 = 0$ ;

$$u = \frac{y^2}{1 - x}.$$

## §5. Дослідження фазових кривих

Ми розглядаємо автономні (динамічні) системи

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}); \quad (30)$$

$\vec{f}$  - класу  $C^1$  на області  $D$ .  $D$  - „фазовий простір”.

$\vec{x}_0$  називається „особливою точкою” системи (30) або „станом рівноваги”, якщо  $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ . Надалі, аби уникнути можливих ускладнень, будемо вважати, що кожний розв’язок системи (30) нескінченно продовжуваний.

Нам вже відомо два твердження про розв’язки та траєкторії системи (30) (це твердження 1 та 2). Наступне питання: чи може траєкторія автономної системи мати самоперетини.

Якщо траєкторія проходить через точку  $\vec{x}_0$ , що є станом рівноваги, то вона просто складається з однієї точки (відповідний розв’язок:  $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$ ).

Нехай  $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ . Тоді розв’язок  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  з початковою умовою  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  має в точці  $\vec{x}_0$  ненульову похідну. При цьому умова  $\vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{0}$  виконується і в деякому околі точки  $\vec{x}_0$ , а тому в деякому проколеному околі точки  $t_0$  маємо:  $\vec{x}(t) \neq \vec{x}_0$ .

Обґрунтуємо останнє твердження. Оскільки  $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ , то, не втрачаючи загальності, можемо вважати, що саме перша координата вектора  $\vec{f}(\vec{x}_0)$  не дорівнює нулю і при цьому додатня:  $f_1(\vec{x}_0) = c > 0$ . Тоді (за неперервністю  $\vec{f}(\cdot)$ ) існує окіл  $V$  точки  $\vec{x}_0$

в  $\mathbb{R}^n$ , в якому  $f_1(\bar{x}) > \frac{c}{2}$ . Оскільки  $\bar{x}(t)$  неперервна функція (і навіть неперервно диференційовна), то існує  $\varepsilon$ -окил точки  $t_0$ , в якому  $\bar{x}(t) \in V$ . Тоді для кожного  $t$  з цього окола точки  $t_0$  маємо:  $\frac{dx_1}{dt}(t) = f_1(\bar{x}(t)) > \frac{c}{2}$ , а це й гарантує нерівність  $\bar{x}(t) \neq \bar{x}_0$  в проколеному  $\varepsilon$ -околі  $t_0$ .

Нехай тепер траєкторія розв'язку  $\bar{x}(t)$  має самоперетин в точці  $\bar{x}_0$ , тобто існують  $t_1 \neq t_2$  такі, що  $\bar{x}(t_1) = \bar{x}(t_2) = \bar{x}_0$ . За  $t_0$  візьмемо менше з цих чисел і розглянемо множину  $Z = \{t > t_0 \mid \bar{x}(t) = \bar{x}_0\} \subset \mathbb{R}$ . Ця множина непорожня і обмежена знизу числом  $t_0 + \varepsilon$  (існування такого  $\varepsilon > 0$  виходить з наведених вище міркувань). Тож вона має точну нижню межу. Позначимо її через  $\tilde{t}$ . Очевидно,  $\tilde{t} > t_0$ . З неперервності відображення  $\bar{x}(\cdot)$  виходить, що множина  $Z$  замкнена. Тож  $\tilde{t} = \min Z$ ;  $\bar{x}(\tilde{t}) = \bar{x}_0$ . Покладемо  $\tilde{t} - t_0 = T$ .

Розглянемо  $\bar{y}(t) = \bar{x}(t + T)$ . Це також розв'язок (див. твердження 1). При цьому  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0 + T) = \bar{y}(t_0)$ . За теоремою єдиності розв'язку:  $\bar{x}(t) \equiv \bar{y}(t)$  для кожного  $t \in \mathbb{R}$ . Тому для кожного  $t$ :  $\bar{x}(t + T) = \bar{x}(t)$  ( $T$  - період). Звідси:  $\bar{x}(t + nT) = \bar{x}(t)$  для кожного  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $t \in \mathbb{R}$ .

Доведемо, що в разі співпадіння:  $\bar{x}(t_1 + s) = \bar{x}(t_1)$  при деяких  $t_1, s \in \mathbb{R}$ , неодмінно  $s = nT$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Дійсно,

$\vec{y}(t) = \vec{x}(t+s)$  співпадає з  $\vec{x}(t)$  за теоремою єдиності, оскільки  $\vec{y}(t_1) = \vec{x}(t_1)$ . Тому  $\vec{x}(t_0) = \vec{y}(t_0) = \vec{x}(t_0 + s)$ . Якщо  $s = nT + s_1$ , де  $0 < s_1 < T$ , то  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_0 + s) = \vec{x}(t_0 + nT + s_1) = \vec{x}(t_0 + s_1)$ , а це суперечить вибору  $T$ .

Висновок. Фазові криві автономної системи можуть бути лише трьох типів.

- 1) точки (стани рівноваги);
- 2) замкнені криві - цикли;
- 3) незамкнені криві без самоперетину.

## **§6. Фазова площина лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами**

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (31)$$

Тут  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  - сталі числа. Коротше: система має вид:  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ . Точка  $(0,0)$  для системи (31) завжди є станом рівноваги.

Випадок 1. Характеристичні числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матриці  $A$  дійсні;  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ;  $\lambda_1 \neq 0$ ;  $\lambda_2 \neq 0$ . Загальний розв'язок такої системи:  $\vec{x}(t) = C_1 e^{t\lambda_1} \vec{f}_1 + C_2 e^{t\lambda_2} \vec{f}_2$ , де  $\vec{f}_1$  і  $\vec{f}_2$  - відповідні власні вектори.

а)  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Якщо перейти до системи координат, що визначена власними векторами (в цьому базисі

матриця  $A$  приймає вид:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , то розв'язок

буде такий:  $\begin{cases} x = C_1 e^{t\lambda_1} \\ y = C_2 e^{t\lambda_2} \end{cases}$ . Тоді  $\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)}$ ;  $y = kx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ .

При  $t \rightarrow -\infty$ :  $\begin{cases} x(t) \rightarrow 0 \\ y(t) \rightarrow 0 \end{cases}$ ; при  $t \rightarrow +\infty$ :  $\begin{cases} x(t) \rightarrow \infty \\ y(t) \rightarrow \infty \end{cases}$ . Якщо,

для спрощення, прийняти, що власні вектори утворюють ортонормований базис, то розташування траєкторій має вигляд:

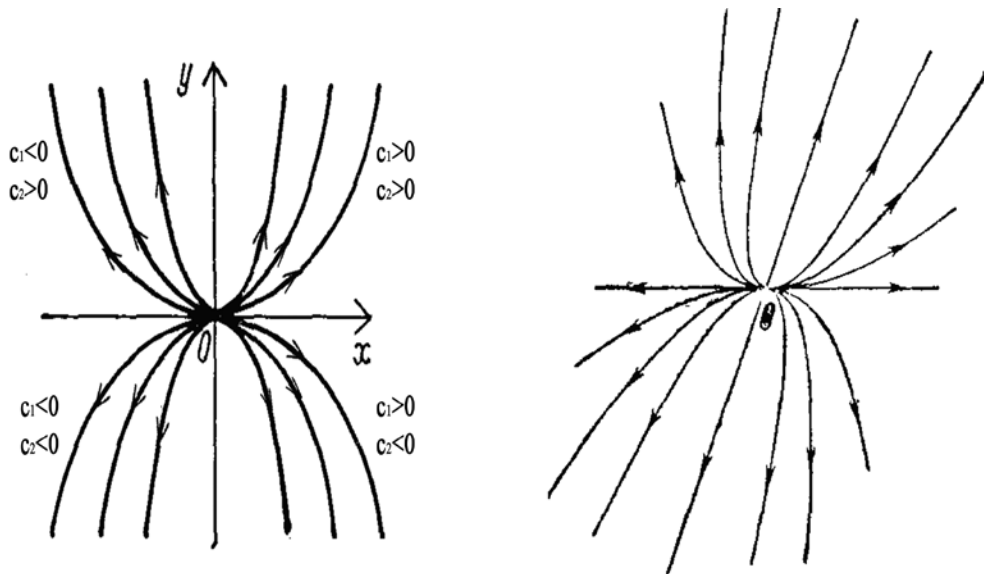


Рис.3, а точніше: Рис.4

Одержаний „фазовий портрет” називається „нестійким вузлом”.

б)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Аналогічно. Також:  $y = kx^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ , але

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow 0 \\ y(t) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ при } t \rightarrow +\infty; \quad \begin{cases} x(t) \rightarrow \infty \\ y(t) \rightarrow \infty \end{cases} \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Відповідний малюнок - рис.5. Цей фазовий портрет - „стійкий вузол”.

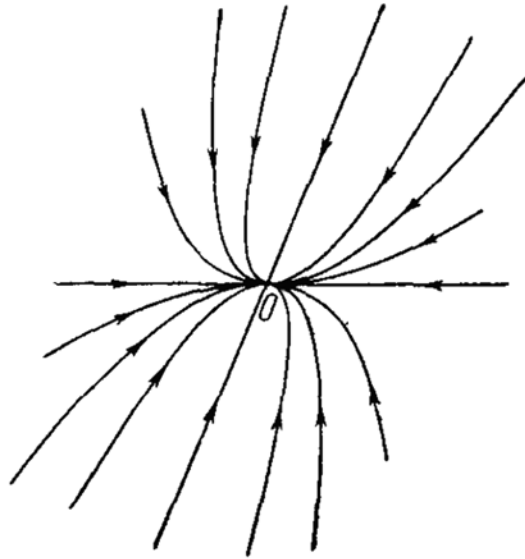


Рис.5

в)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Розв'язок (у відповідному базисі) має також вид:  $\begin{cases} x = C_1 e^{t\lambda_1} \\ y = C_2 e^{t\lambda_2} \end{cases}$ . Але при  $t \rightarrow +\infty$ :  $\begin{cases} x(t) \rightarrow 0 \\ y(t) \rightarrow \infty \end{cases}$ ; при  $t \rightarrow -\infty$ :  $\begin{cases} x(t) \rightarrow \infty \\ y(t) \rightarrow 0 \end{cases}$ ; на кожній траєкторії  $x(t)$ ,  $y(t)$  зберігають знак. Відповідний малюнок: „сідло“.

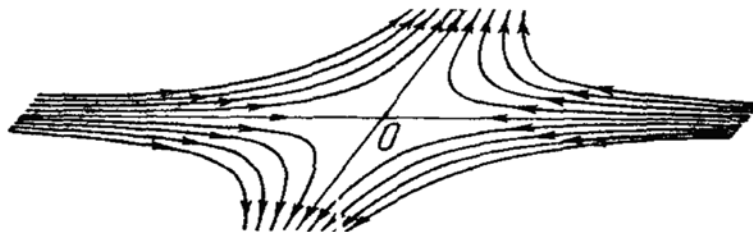


Рис.6

Випадок 2. Характеристичні числа матриці  $A$  – комплексні:  $\lambda = \alpha + \beta i$ ;  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ . В комплексному просторі  $\mathbb{C}^2$   $\lambda_1, \lambda_1$  є власними числами і їм відповідають власні вектори  $\vec{f}$  та  $\vec{g}$ . Тут

$(\lambda I - A)\vec{f} = \vec{0}; \quad (\bar{\lambda} I - A)\vec{g} = \vec{0}.$  Тому  $\vec{g} = \vec{\bar{f}}.$  Загальний розв'язок системи (31) (в комплекснозначних функціях) має тоді вид:

$$\vec{u}(t) = C_1 e^{t\lambda} \vec{f} + C_2 e^{t\bar{\lambda}} \vec{g} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C}).$$

Тоді  $\vec{x}(t) = \text{Re} \vec{u}(t)$  буде також розв'язком системи (31) і притому дійсним. Нескладно зрозуміти, що  $\vec{x}(t)$  - загальний дійсний розв'язок (обміркуйте!)

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \frac{1}{2}(\vec{u}(t) + \vec{\bar{u}}(t)) = \frac{1}{2}C_1 e^{\lambda t} \vec{f} + \frac{1}{2}C_2 e^{\bar{\lambda} t} \vec{\bar{f}} + \frac{1}{2}\bar{C}_1 e^{\bar{\lambda} t} \vec{\bar{f}} + \frac{1}{2}\bar{C}_2 e^{\lambda t} \vec{f} = \\ &= \frac{1}{2}(C_1 + \bar{C}_2) e^{\lambda t} \vec{f} + \frac{1}{2}(\bar{C}_1 + C_2) e^{\bar{\lambda} t} \vec{\bar{f}} = C e^{\lambda t} \vec{f} + \bar{C} e^{\bar{\lambda} t} \vec{\bar{f}}. \end{aligned}$$

Тут ми поклали:  $C = \frac{1}{2}(C_1 + \bar{C}_2).$  Покладемо також:

$$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{h}_1 - i\vec{h}_2); \quad \vec{\bar{f}} = \frac{1}{2}(\vec{h}_1 + i\vec{h}_2) \quad (\text{тут } \vec{h}_k - \text{стовпці з}$$

дійсними координатами). Оскільки  $\vec{f}, \vec{\bar{f}}$  - лінійно незалежні, то й  $\vec{h}_1, \vec{h}_2$  - лінійно незалежні (над  $\mathbb{R}$ , а тому й над  $\mathbb{C}$  - обміркуйте!) Крім того, представимо число  $C$  у вигляді:  $C = Re^{i\varphi_0}; \quad \bar{C} = Re^{-i\varphi_0};$  а також:  $e^{\lambda t} = e^{(\alpha + \beta i)t}; \quad e^{\bar{\lambda} t} = e^{(\alpha - \beta i)t}.$  Тож після цього матимемо:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= Re^{i\varphi_0} e^{(\alpha + \beta i)t} \frac{1}{2}(\vec{h}_1 - i\vec{h}_2) + Re^{-i\varphi_0} e^{(\alpha - \beta i)t} \frac{1}{2}(\vec{h}_1 + i\vec{h}_2) = \\ &= Re^{\alpha t} \cdot \frac{1}{2} \left( e^{i(\beta t + \varphi_0)} + e^{-i(\beta t + \varphi_0)} \right) \vec{h}_1 - Re^{\alpha t} \frac{i}{2} \left( e^{i(\beta t + \varphi_0)} - e^{-i(\beta t + \varphi_0)} \right) \vec{h}_2 = \\ &= Re^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi_0) \vec{h}_1 + Re^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \vec{h}_2. \end{aligned}$$

В координатах, що відповідають базису  $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$  матимемо:

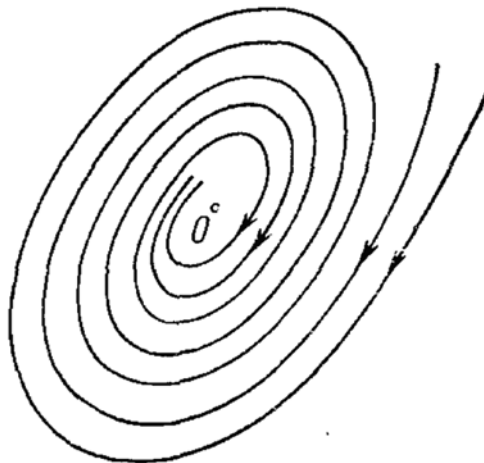


$$\begin{cases} x(t) = Re^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi_0) \\ y(t) = Re^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \end{cases} \quad (32)$$

Якби вектори  $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$  утворювали б ортонормовану систему, то у відповідній полярній системі координат розв'язок (32) можна було б записати у вигляді:

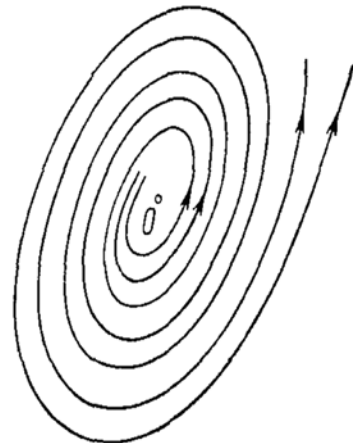
$$\begin{cases} \rho(t) = Re^{\alpha t} \\ \varphi(t) = \beta t + \varphi_0 \end{cases}$$

Для  $\alpha < 0$  маємо:  $\rho(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$ . При  $\alpha > 0$ :  $\rho(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty$ . Відповідні малюнки:



$\alpha < 0 \quad (\beta < 0)$

Рис.7 стійкий фокус



$\alpha > 0 \quad (\beta > 0)$

Рис.8 нестійкий фокус

При  $\alpha = 0$  траєкторії - цикли; концентричні еліпси. Відповідний фазовий портрет називається „центром”.

Випадок 3. Вироджені випадки.

а)  $\lambda_1 \neq 0; \quad \lambda_2 = 0; \quad \vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{f}_1 + C_2 \vec{f}_2$ ; або у відповідних

координатах: 
$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = C_2 \end{cases}.$$

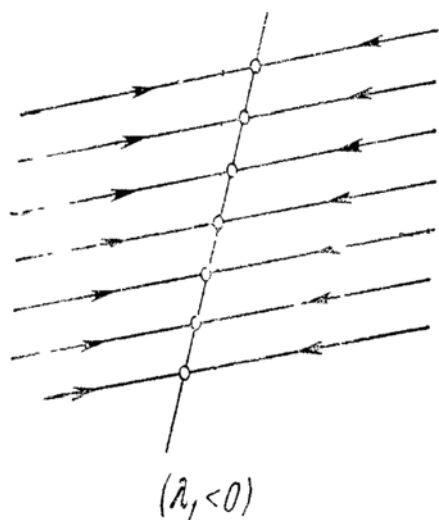


Рис. 9  $\lambda_1 < 0$

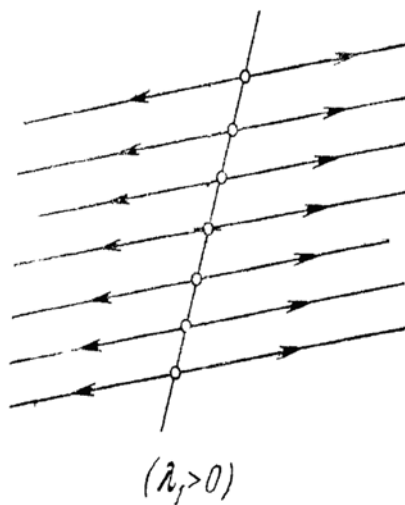


Рис. 10  $\lambda_1 > 0$

б)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Жорданова форма  $A_J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{x}_0$   
 („дискритичний вузол“)

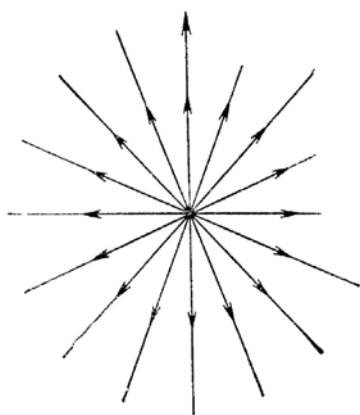


Рис. 11  $\lambda > 0$  - нестійкий

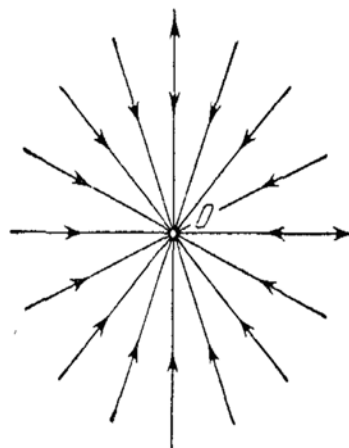


Рис. 12  $\lambda < 0$  - стійкий

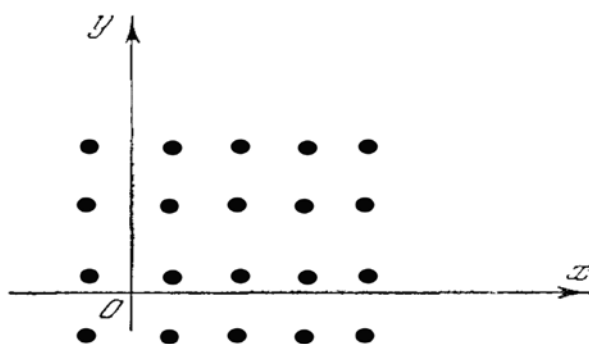


Рис. 13  $\lambda = 0$

в)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Жорданова форма  $A_J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ;

$$e^{tA_J} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} \\ y = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

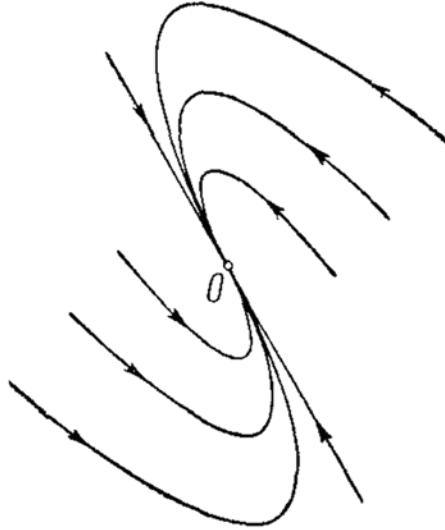


Рис.14  $\lambda < 0$  - „стійкий вироджений вузол”;

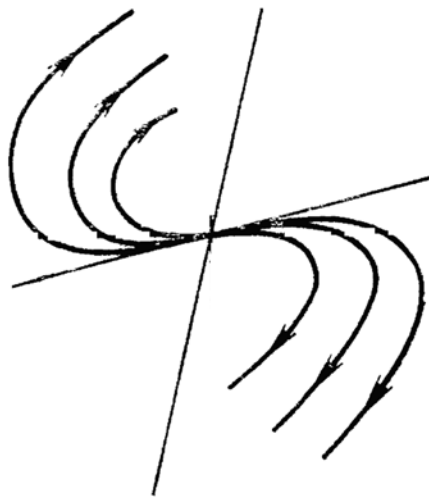


Рис.15  $\lambda > 0$  - „нестійкий вироджений вузол”;

при  $\lambda = 0$  маємо:  $e^{tA_J} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x = C_1 + C_2 t \\ y = C_2 \end{cases}.$

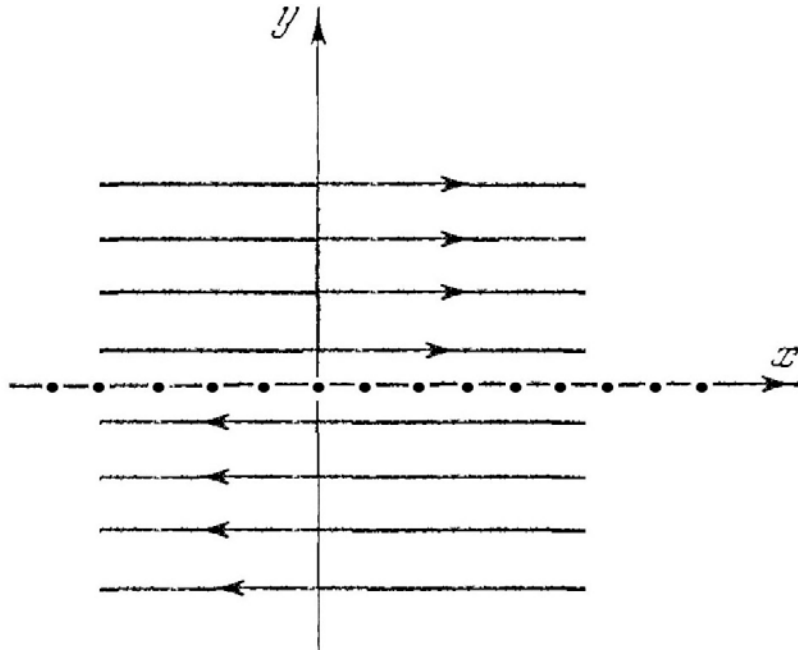


Рис.16

Існує досить складний результат (теорема Гробмана-Хартмана), яка дозволяє одержати уявлення про локальний характер траєкторій нелінійної автономної системи другого порядку в околі особливої точки. В разі, якщо  $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ ;  $A = \vec{f}'(\vec{x}_0)$  і характеристичні числа матриці  $A$  мають ненульові дійсні частини, траєкторії нелінійної системи  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  в околі  $\vec{x}_0$  мають той самий характер, що й траєкторії системи (31) в околі  $(0,0)$ .

**Приклад 1.** Точка  $(0,0)$  є особливою точкою системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -2x^3 + y \end{cases} \quad (33)$$

При цьому  $\vec{f}'(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Тоді з теореми Гробмана-Хартмана можна зробити висновок про те, що в околі  $(0,0)$  траєкторії системи (33) мають характер нестійкого дикритичного вузла.

Цей факт нескладно перевірити. Траєкторії системи (33) – це інтегральні криві диференціального рівняння  $\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{-2x^3 + y}$ , або

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y - 2x^2$ . Його розв'язки:  $y = Cx - x^3$  з додатковою інформацією про напрям руху по траєкторіям, яку ми маємо з огляду на перше рівняння системи (33), дають фазовий портрет:

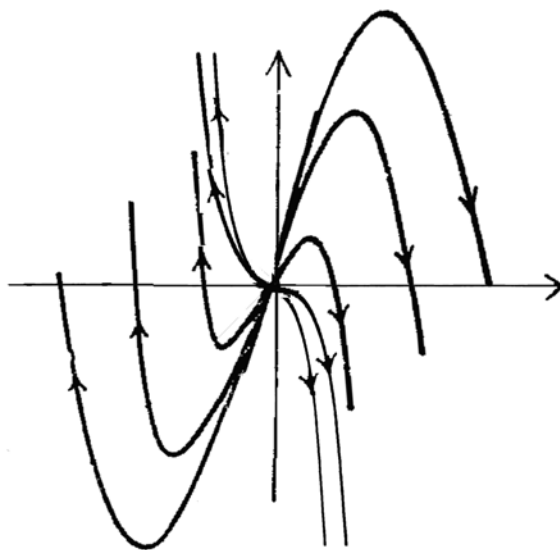


Рис.17

**Приклад 2.** Малі коливання маятника.

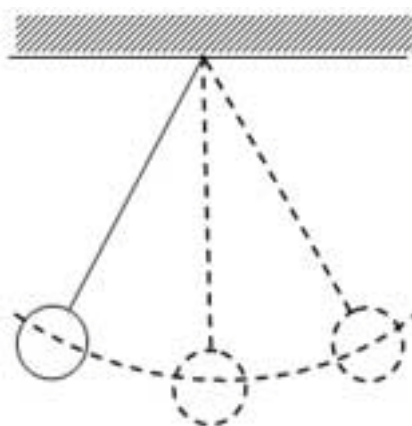


Рис.18

Нехай  $x$  - кут відхилення маятника від вертикального положення. Відповідне рівняння:  $\ddot{x} = -x$ ,

або із замінами:  $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$ , маємо систему:  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$ .

Тут  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ; фазовий портрет - „центр”.

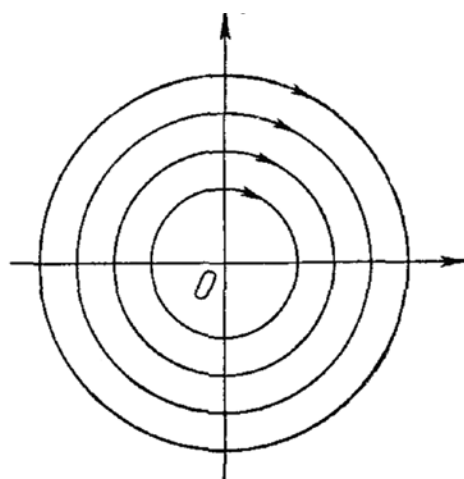


Рис.19

**Приклад 3.** Малі коливання маятника з тертям.

$\ddot{x} = -x - k\dot{x}$ ;  $k > 0$  ( $k$  - коефіцієнт тертя). Відповідна

система:  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2 \end{cases}$ ;  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$ ; характеристичне

рівняння матриці  $A$ :  $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$  при  $k < 2$  (випадок малого тертя) має комплексні корені  $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$  і відповідний фазовий портрет – стійкий фокус (намалюйте його!) При  $k > 2$  (випадок великого тертя):  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}; \lambda_{1,2} < 0$  – маємо стійкий вузол (маятник не перетинає вертикальну вісь і асимптотично до неї наближається).

## **§7. Консервативні системи з одним ступенем вільності**

Диференціальне рівняння руху матеріальної частинки має вид:  $m\ddot{x} = F(x)$  (тут  $x$  – числова змінна – „один ступінь вільності”). Відповідна система має вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F(x_1) \end{cases} \quad (34)$$

$$T(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2} \quad - \quad \text{„кінетична енергія”};$$

$$U(x_1, x_2) = - \int_{x_0}^{x_1} F(\tau) d\tau \quad - \quad \text{„потенціальна енергія”};$$

$E = T + U$  – повна енергія.

**Твердження 6** (закон збереження енергії).  $E$  – перший інтеграл системи (34) (тому її називають „консервативною”).

**Доведення.** За критерієм першого інтеграла:

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial E}{\partial x_2} \cdot F(x_1) = -F(x_1) \cdot x_2 + x_2 \cdot F(x_1) = 0. \blacksquare$$

Тому фазові криві системи (34) повністю розташовані на лініях рівня повної енергії.

**Твердження 7.** Множина рівня повної енергії:

$$\left\{ (x_1, x_2) \mid \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = C \right\} \text{ є гладкою кривою в околі кожної}$$

своїї точки (крім станів рівноваги).

**Доведення.**  $E(x_1, x_2)$  є гладкою функцією;

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -F(x_1); \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2. \text{ Якщо точка } (x_1^0, x_2^0) \text{ не є станом}$$

рівноваги, то або  $F(x_1^0) \neq 0$  або  $x_2^0 \neq 0$ . Якщо  $F(x_1^0) \neq 0$ , то за теоремою про неявну функцію крива рівня в околі точки  $(x_1^0, x_2^0)$  є графіком гладкої функції  $x_2 = \varphi(x_1)$ . Якщо ж  $x_2^0 \neq 0$ , то за тієї ж причини в околі  $(x_1^0, x_2^0)$  крива рівня – графік гладкої функції  $x_2 = \psi(x_1)$ . ■

Стани рівноваги системи (34) – це стаціонарні точки повної енергії. Оскільки кінетична енергія невід'ємна:  $T(x_1, x_2) \geq 0$ , то потенціальна не перевищує повної. Фіксуємо  $E$  ( $E(x_1, x_2) = C$ ). Крива рівня має рівняння:  $x_2 = \pm 2\sqrt{C - U(x_1)}$ . Відповідний малюнок кривих рівня доцільно будувати користуючись графіком потенціальної енергії.

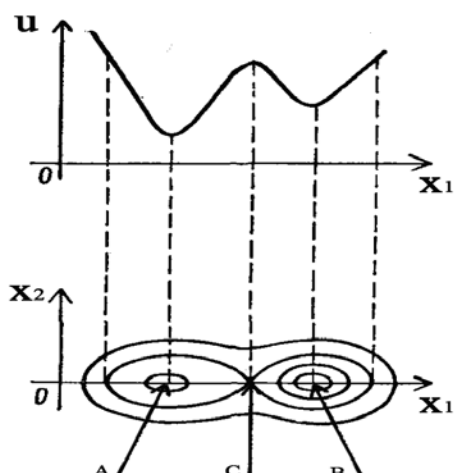




Рис.20

Траєкторії системи (34) при цьому повністю визначені, оскільки вони цілком належать кривим рівня повної енергії та підлягають класифікації §5. Крім того, напрямок руху по траєкторіям відслідковується за першим рівнянням системи (34).

Характер фазового портрета в околах особливих точок  $A, B, C$ , з одного боку, відслідковується з одержаного малюнку, а, з іншого, є ілюстрацією дії теореми Гробмана-Хартмана.

$$\vec{f}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x_1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & 0 \end{pmatrix}$$

В точках  $A; B$ :  $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} > 0$  і тому характеристичне рівняння  $\lambda^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 0$  має чисто уявні корені. І хоча теорема у цьому випадку не завжди дає

стверджувальну відповідь, все ж таки в околі цих точок фазовий портрет має характер „центра”.

В точці  $C$ :  $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0$ ; корені характеристичного рівняння дійсні, різних знаків і, за теоремою, локальний фазовий портрет в точці  $C$  є сідлом, що відповідає малюнку.

### **§8. Граничні цикли динамічних систем (теорія Пуанкаре-Бендіксона)**

В цьому параграфі  $n=2$ . Тож система має вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (35)$$

Траєкторію, що відповідає періодичному розв'язку називаємо циклом. Граничний цикл - це ізольований періодичний розв'язок. Точніше: траєкторія  $\Gamma$ , що відповідає розв'язку  $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$  є граничним циклом, якщо  $\exists \delta > 0$  таке, що  $\forall \vec{x}$ , що знаходиться від  $\Gamma$  на відстані менше за  $\delta$  і не лежить на самому  $\Gamma$ , траєкторія, що проходить через  $\vec{x}$ , не є циклом. Виявляється, що для траєкторій, внутрішніх (зовнішніх) по відношенню до цикла є дві взаємовиключні можливості: всі внутрішні (всі зовнішні) траєкторії асимптотично прямують до  $\Gamma$  („намотуються на  $\Gamma$ ”) як спіралі при  $t \rightarrow +\infty$  або при  $t \rightarrow -\infty$ . В разі, якщо всі вони намотуються на цикл  $\Gamma$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то цикл називається „стійким”; якщо при  $t \rightarrow -\infty$ , то цикл - „нестійкий”. Якщо ж зовнішні - при  $t \rightarrow +\infty$ , а

внутрішні при  $t \rightarrow -\infty$  (або навпаки), то цикл – напівстійкий.

**Приклад.** 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (36)$$

Запровадимо полярні координати: 
$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \varphi(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \varphi(t) \end{cases}.$$

Маємо: 
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}.$$

Звідси:  $x\dot{x} + y\dot{y} = \rho\dot{\rho}$ ;  $x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\varphi}$  (перевірте!) Тому (крім точки  $\rho=0$ ) система (36) переходить в еквівалентну (перевірте!!)

$$\begin{cases} \rho\dot{\rho} = \rho^2(1 - \rho^2) \\ \rho^2\dot{\varphi} = \rho^2 \end{cases} \quad (37)$$

Точка  $\rho=0$  – особлива точка системи (37).

Для  $\rho \neq 0$  система (37) перетворюється на таку:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}. \text{ Звідси при } \rho > 1: \begin{cases} \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}} \quad (C < 0) \\ \varphi(t) = t + t_0 \end{cases}$$

$$; \text{ при } 0 < \rho < 1: \begin{cases} \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}} \quad (C > 0) \\ \varphi(t) = t + t_0 \end{cases} \quad (\text{перевірте!}).$$

Цикл:  $\rho=1$  є стійким циклом.

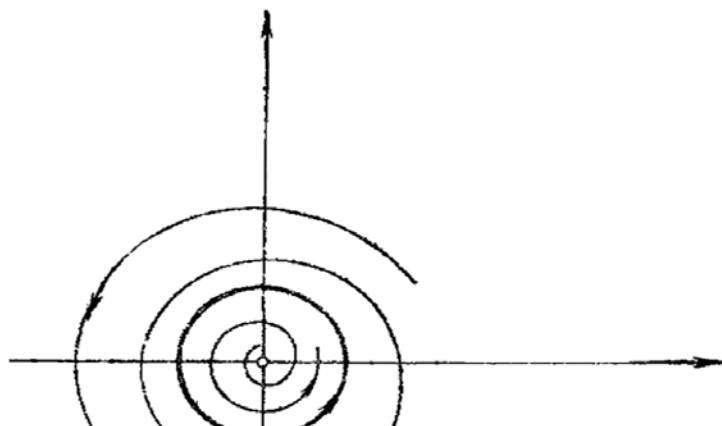


Рис.21

Точка  $(0,0)$  є особливою точкою системи (36). Лінеаризована система, тобто система

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \cdot y \\ \dot{y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \cdot y \end{cases} \quad \text{має вид:} \quad \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases};$$

відповідна матриця  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  має характеристичні числа  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ ; за теорією ця точка є нестійким фокусом. І це відповідає малюнку.

Наступні міркування мають деякий недолік строгості.

Нехай  $\Gamma$  – граничний цикл; точка  $\vec{a}$  знаходиться всередині, а точка  $\vec{b}$  – ззовні цикла. Відрізок, що з'єднує ці точки, перетинає цикл рівно в одній точці і не дотикається в цій точці цикла  $\Gamma$ . Існування такого відрізка очевидно з геометричних міркувань і не супроводжується ретельним доведенням. Точки відрізка параметризуємо:

$\vec{x} = \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{\psi}(u)$ ; значення параметра  $u_0$  відповідає точці перетину відрізка з циклом:  $\vec{\psi}(u_0) \in \Gamma$ .

Нехай значення параметра  $u$  близьке до  $u_0$ ;  $u < u_0$  (відповідна точка  $\vec{\psi}(u)$  лежить всередині цикла). Через точку  $\vec{\psi}(u)$  проводимо траєкторію. Інтуїція підказує, що ця траєкторія не може далеко відступити від цикла  $\Gamma$  (пізніше ми обґрунтуємо цей тезис). Через деякий час (що близький до періода цикла  $\Gamma$ ) ця траєкторія перетне вдруге відрізок  $[\vec{a}, \vec{b}]$ . При цьому, оскільки траєкторії не перетинаються, значення параметра в точці перетину (позначимо його через  $\chi(u)$ ) також менше за  $u_0$ :  $\chi(u) < u_0$ . Оскільки  $\Gamma$  є граничним циклом, то  $\chi(u) \neq u$  і ця нерівність повинна виконуватись для всіх  $u$ , достатньо близьких до  $u_0$ .

Далі буде доведено, що функція  $\chi$  є неперервною в околі точки  $u_0$  і тому в цілому лівому півколі параметра  $u_0$  виконується нерівність  $\chi(u) > u$  або  $\chi(u) < u$ . Перша нерівність вказує на те, що зі зростанням часу, траєкторія наближується до циклу  $\Gamma$ , а, у випадку другої нерівності, траєкторія зі зростанням часу віддаляється від циклу  $\Gamma$ . Одержуємо послідовність  $u_{n+1} = \chi(u_n)$ , яка (в ситуації  $\chi(u) > u$ ) за теоремою Вейерштрасса про границю монотонної послідовності має границю  $u_\infty$ , а з неперервності функції  $\chi$  виходить, що  $\chi(u_\infty) = u_\infty$ .

Тобто  $u_{\infty} = u_0$ . Тож досліджувана траєкторія при  $t \rightarrow +\infty$  „притискається” до граничного цикла.

Ситуація  $\chi(u) < u$  досліджується аналогічно, але слід розглядати асимптотику  $t \rightarrow -\infty$ : при  $t \rightarrow -\infty$  траєкторія „притискається” до граничного цикла (обміркуйте). Дослідження траєкторій, що знаходяться ззовні граничного цикла  $\Gamma$ , аналогічне.

Два питання залишилися без обґрунтування. Насамперед це гарантія близькості двох траєкторій, що виходять з близьких точок („неперервна залежність розв’язку від початкової умови”). Це питання складає предмет дослідження наступного параграфу. І по-друге – це питання про неперервність функції  $\chi$ .

Неперервність (і навіть диференційовність) функції  $\chi$  обґрунтовується з посиланням на теорему про неявну функцію.

Розв’язок системи (35) з початковою умовою  $\vec{\phi}(0) = \vec{x} = \vec{\psi}(u)$  позначимо через  $\vec{\phi}(t, \vec{x})$ . Відповідна траєкторія перетинає при  $t = t_0$  відрізок  $[\vec{a}, \vec{b}]$  в точці  $\vec{\psi}(\chi(u))$ , тобто

$$\vec{\phi}(t_0, \vec{\psi}(u)) = \vec{\psi}(\chi(u))$$

Тоді рівняння

$$\vec{\phi}(t, \vec{\psi}(u)) - \vec{\psi}(v) = \vec{0}, \quad (38)$$

або покоординатно:

$$\begin{cases} F_1(t, u, v) = \phi_1(t, \psi_1(u), \psi_2(u)) - \psi_1(v) = 0 \\ F_2(t, u, v) = \phi_2(t, \psi_1(u), \psi_2(u)) - \psi_2(v) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

є неявним завданням вектор-функції  $\begin{cases} v = \chi(u) \\ t = t(u) \end{cases}$ , якщо

спрацьовує теорема про неявну функцію щодо рівняння (38) (або, в координатах, (39)). Крім гладкості функцій  $\vec{\varphi}$  та  $\vec{\psi}$  для цього потрібна невиродженість (при  $t=0$ ;  $u=v=u_0$ ) відповідної матриці Якобі. Але ця матриця співпадає з матрицею

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi'_1(v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, \psi_1(u), \psi_2(u)) \\ -\psi'_2(v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, \psi_1(u), \psi_2(u)) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & f_1(\vec{\varphi}(t, \psi_1(u), \psi_2(u))) \\ a_2 - b_2 & f_2(\vec{\varphi}(t, \psi_1(u), \psi_2(u))) \end{pmatrix}$$

невиродженість якої при  $t=0$ ;  $u=v=u_0$  є очевидним наслідком вихідної умови про те, що відрізок  $[\vec{a}, \vec{b}]$  не дотикається до цикла  $\Gamma$  в спільній точці  $\vec{\psi}(u_0)$ .

**Зауваження.** Наведені міркування містять недолік: диференційовність функцій  $F_1(t, u, v)$ ,  $F_2(t, u, v)$  є наслідком теореми про диференційовність розв'язку  $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$  за сукупністю аргументів  $\langle t, \vec{x} \rangle$ . Факт гладкої залежності розв'язку від початкової умови справедливий, але його не буде доведено в межах нашого семестрового курсу.

## **§9. Неперервна залежність розв'язку системи диференціальних рівнянь від початкової умови**

**Теорема 2.** Нехай вектор-функція  $\vec{f}(t, \vec{x})$  є неперервно диференційовною функцією (за сукупністю

аргументів) в області  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ;  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  – розв’язок системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (40)$$

з початковою умовою:  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  (тож  $\vec{\varphi}(t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ ) і цей розв’язок визначено на відрізку  $\Delta = [t_1, t_2]$ . Тоді: 1) існує  $\alpha > 0$  таке, що для всіх  $\vec{x}$ , що задовольняють нерівність:  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \alpha$ , відповідний розв’язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$  також визначено на  $\Delta$ ; 2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\delta < \alpha)$  таке, що

$$(\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta) \Rightarrow (\forall t \in \Delta : \|\vec{\varphi}(t, \vec{x}) - \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\| < \varepsilon).$$

**Доведення.** Крок 1. Доведення потребує лише друге твердження. Дійсно, інтегральна крива  $\gamma$  розв’язку  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  знаходиться всередині  $D$ . Ця крива є неперервним образом відрізка  $\Delta = [t_1, t_2]$  і складається з внутрішніх точок області  $D$ . Відстань кожної точки  $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  цієї кривої від замкненої множини  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus D$  позначимо через  $r(\vec{x})$ . Функція  $r(\vec{x}) = r(\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0))$  є неперервною (перевірте!) додатною функцією аргументу  $t$  і тому на відрізку  $\Delta$  досягає свого найменшого значення  $\varepsilon > 0$ . Тож  $r(\vec{x}) \geq \varepsilon$  для кожного  $\vec{x} \in \gamma$ .

Тому  $\delta > 0$ , що буде одержане при доведенні другого твердження теореми, має ту властивість, що відповідні інтегральні криві (тобто  $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$  для  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ ) знаходяться в  $\varepsilon$ -околі кривої  $\gamma$ . Тож відповідні розв’язки визначені при всіх  $t \in \Delta$ .



Крок 2. Як і раніше, із задачею Коші для системи (40) пов'яжемо інтегральне рівняння. Розв'язок  $\vec{\varphi}_0(t) = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  системи (40), де для зручності покладемо  $t_0 = 0$ , задовольняє інтегральне рівняння

$$\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau)) d\tau,$$

а розв'язок  $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t, \vec{x})$  з початковою умовою  $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}$ , задовольняє рівняння:

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x} + \int_0^t \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) d\tau,$$

звідки:

$$\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_0(t) = \vec{x} - \vec{x}_0 + \int_0^t (\vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))) d\tau \quad (41)$$

Не втрачаючи загальності можна вважати, що  $\vec{f}$  неперервно диференційовна за другим аргументом в замиканні  $\bar{D}$  області  $D$  - для цього треба лише дещо зменшити область  $D$ , а тому  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$  обмежена в  $D$  і  $\vec{f}$  задовольняє в  $D$  умову Ліпшиця відносно другого аргумента.

Мається на увазі існування такого  $M > 0$ , що для кожної пари точок  $(t, \vec{x}_1), (t, \vec{x}_2) \in D$  таких, що відрізок, що їх сполучає, також належить  $D$ , виконується нерівність:  $\|\vec{f}(t, \vec{x}_1) - \vec{f}(t, \vec{x}_2)\| \leq M \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$  (перевірте!). Тоді з (41) маємо:

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_0(t)\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \left| \int_0^t M \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\varphi}_0(\tau)\| d\tau \right| \quad (42)$$

Крок 3. Лема (нерівність Гронуолла).

Нехай  $u, v \in C[a, b]$ ;  $u(t) \geq 0$ ;  $v(t) \geq 0 (\forall t)$ ;  $C \geq 0$ ; для  $\forall t \in [a, b]$  виконується нерівність:

$$v(t) \leq C + \int_a^t v(s)u(s)ds.$$

Тоді для всіх  $t \in [a, b]$ :

$$v(t) \leq C \exp \int_a^t u(s)ds.$$

**Доведення.** 1)  $C > 0$ . Позначимо:

$$V(t) = C + \int_a^t v(s)u(s)ds. \quad \text{Тоді} \quad V(t) \geq C > 0; \quad v(t) \leq V(t).$$

$$V'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)V(t). \quad \text{Тому} \quad \frac{V'(t)}{V(t)} \leq u(t); \quad V(a) = C.$$

Інтегруванням на  $[a, b]$  маємо:  $\ln V(t) - \ln C \leq \int_a^t u(s)ds$ ;

$$V(t) \leq C \exp \int_a^t u(s)ds. \quad \text{Звідси:} \quad v(t) \leq C \exp \int_a^t u(s)ds.$$

2)  $C = 0$ . Тоді для  $\forall \varepsilon > 0$  маємо:

$$v(t) \leq \varepsilon + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad \text{а} \quad \text{тому:} \quad v(t) \leq \varepsilon \cdot \exp \int_a^t u(s)ds.$$

Довільність  $\varepsilon > 0$  приводить до рівності:  $v(t) \equiv 0$ . ■

Крок 4. Використаємо лему Гронуолла. При  $t > 0$  з (42) маємо:

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_0(t)\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \exp \int_0^t M d\tau = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| e^{tM}$$

Якщо  $\Delta = [t_1, t_2]$  (тут  $t_1 < 0 < t_2$ ), то при  $t \in [0, t_2]$ :

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_0(t)\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| e^{t_2 M}.$$

Для дослідження відрізка  $[t_1, 0]$  розглянемо  $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(-t)$  (тут вже  $t > 0$ ). Тоді

$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = -\frac{d\vec{\varphi}}{dt}(-t) = -\vec{f}(-t, \vec{\varphi}(-t)) = \vec{f}_1(t, \vec{\psi}(t)); \quad \vec{\psi}(0) = \vec{x}.$$

За аналогією маємо:  $\|\vec{\varphi}(-t) - \vec{\varphi}_0(-t)\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| e^{|t_1| M}.$

Остаточно за  $\delta$  можна взяти: 
$$\delta = \frac{\varepsilon}{\max\{e^{-t_1 M}; e^{t_2 M}\}}$$

(перевірте!) ■

**Зауваження.** Насправді відображення  $\langle t, \vec{x} \rangle \mapsto \vec{\varphi}(t, \vec{x})$ , що ставить у відповідь парі  $\langle t, \vec{x} \rangle$  розв'язок з початковою умовою  $\vec{\varphi}(0, \vec{x}) = \vec{x}$ , не тільки неперервне, але навіть є класу  $C^1$  (в умовах теореми 2). Але цей факт доводити не будемо.

## §10. Існування повної системи перших інтегралів

Доведемо сформульовану в §2 теорему 1 про існування локальної повної системи перших інтегралів для автономної системи диференціальних рівнянь.

Крок 1. Нехай  $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$  – розв'язок автономної системи

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{43}$$

з початковою умовою:  $\vec{\varphi}(0, \vec{x}) = \vec{x}$ . Доведемо, що для всіх  $t, s$ :

$$\vec{\varphi}(t+s, \vec{x}) = \vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(s, \vec{x})). \tag{44}$$

Фіксуємо  $s$ . Тоді при  $t=0$  обидві частини рівності (44) співпадають. Права частина (44) є розв'язком рівняння (43). Ліва також:

$\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t+s, \vec{x}) = \frac{d}{d\tau}\vec{\varphi}(\tau, \vec{x})|_{\tau=t+s} = \vec{f}(\vec{\varphi}(t+s, \vec{x})).$  Тому рівність (44) виконується за теоремою Пікара.

**Наслідок:**  $\vec{\varphi}(-s, \vec{\varphi}(s, \vec{x})) = \vec{x}$  (покласти в (44):  $t=-s$ ).

Крок 2. За припущенням:  $\vec{x}_0$  не є особливою точкою системи (43), тобто  $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ . Нехай саме остання координата вектора  $\vec{f}(\vec{x}_0)$  не дорівнює нулю:  $f_n(\vec{x}_0) \neq 0$ . Припустимо, для визначеності,  $f_n(\vec{x}_0) > 0$ . З неперервності поля  $\vec{f}(\cdot)$  виходить, що в достатньо малому околі  $U$  точки  $\vec{x}_0$  виконується нерівність:  $f_n(\vec{x}) > \alpha > 0$ . Цей факт разом із результатом доведеної в §9 теореми 2, приводить до висновку про взаємно однозначну відповідність між траєкторіями системи (43), що знаходяться в малому околі точки  $\vec{x}_0$  та точками їх перетину з гіперплощиною  $K_0 = \{\vec{x} | x^n = x_0^n\}$  ( $n$ -та координата точки  $\vec{x}$  гіперплощини  $K_0$  така ж, як у точки  $\vec{x}_0$ ); одна і та ж траєкторія не може перетнути цю гіперплощину поблизу  $\vec{x}_0$  в двох різних точках і кожна з близьких до  $\vec{x}_0$  траєкторій обов'язково перетне цю гіперплощину (обміркуйте!).

Координати (від 1-ї до  $(n-1)$ -ї) точок перетину цих траєкторій зі вказаною гіперплощиною і приймемо за перші інтеграли. Так одержимо систему

$\Phi_1(\vec{x}), \dots, \Phi_{n-1}(\vec{x})$  функцій, кожна з яких приймає, вочевидь, сталі значення на будь-якій з траєкторій системи (43) в околі точки  $\vec{x}_0$ .

Перевіримо наступне: всі функції  $\Phi_k(\vec{x})$  – гладкі; система функцій  $\Phi_1(\cdot), \dots, \Phi_{n-1}(\cdot)$  – незалежна; кожний перший інтеграл системи (43) можна (локально) через них виразити.

Крок 3. Гладкість функцій  $\Phi_k(\vec{x})$  доводимо на базі теореми про неявну функцію.

Позначимо через  $\tilde{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$  скорочений стовпець

координат вектора  $\vec{x}$ . Розглянемо функцію  $\vec{F}(t, \tilde{\vec{x}}, \vec{y}) = \vec{\varphi}(t, \tilde{\vec{x}}, x_0^n) - \vec{y}$  (тут  $\vec{\varphi}(t, \tilde{\vec{x}}, x_0^n)$  – розв’язок, траєкторія якого при  $t=0$  перетинає гіперплощину  $K_0$ ) і застосуємо до рівняння  $\vec{F}(t, \tilde{\vec{x}}, \vec{y}) = \vec{0}$  теорему про неявну функцію. Гладкість  $\vec{F}$  є наслідком зауваження наприкінці §9.

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \langle t, \tilde{\vec{x}} \rangle}(0, \tilde{\vec{x}}_0, \vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}_0) & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 1 \\ f_n(\vec{x}_0) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

є невиродженою матрицею, оскільки  $f_n(\vec{x}_0) \neq 0$ .

Тому за теоремою про неявну функцію рівняння

$$\vec{F}(t, \tilde{\vec{x}}, \vec{y}) = \vec{0} \quad (45)$$

локально еквівалентне рівнянню:  $\langle t, \tilde{\vec{x}} \rangle = \vec{V}(\vec{y})$  і при цьому  $\vec{V}(\vec{y})$  є функцією класу  $C^1$  (тут  $t = V^1(\vec{y})$ ). Але

згідно з рівнянням (45):  $\bar{y} = \bar{\varphi}(t, \tilde{x}, x_0^n)$ , тобто  $\bar{y}$  належить траєкторії, що виходить із точки  $\langle \tilde{x}, x_0^n \rangle \in K_0$  і, як виходить з наслідка, одержаного в кроці 1,  $\langle \tilde{x}, x_0^n \rangle = \bar{\varphi}(-V^1(\bar{y}), \bar{y})$ ;  $\tilde{x} = \bar{\varphi}(-V^1(\bar{y}), \bar{y})$  є вектор-функцією класу  $C^1$ . Але її координати і є функціями  $\Phi_1(\bar{y}), \dots, \Phi_{n-1}(\bar{y})$ , що розглядаються.

Крок 4. Перевіримо незалежність системи функцій  $\Phi_1(\cdot), \dots, \Phi_{n-1}(\cdot)$ . Достатньо перевірити лінійну незалежність градієнтів вказаних функцій в точці  $\bar{x}_0$  (тоді, з неперервності, вона успадковується і в малому околі).

Це значить, що треба довести, що матриця

$$A = \frac{d}{d\bar{y}} \bar{\varphi}(-V^1(\bar{y}), \bar{y})|_{\bar{y}=\bar{x}_0} \quad (46)$$

має максимальний ранг ( $r(A) = n-1$ ), оскільки вказані градієнти є рядками цієї матриці.

Відображення  $\bar{y} \mapsto \langle t, \tilde{x} \rangle = \langle V^1(\bar{y}), \bar{\varphi}(-V^1(\bar{y}), \bar{y}) \rangle$  та  $\langle t, \tilde{x} \rangle \mapsto \bar{y} = \bar{\varphi}(t, \tilde{x}, x_0^n)$  взаємно обернені в околі точки  $\bar{x}_0$ . Тому перше з них в точці  $\bar{x}_0$  повинно мати невироджену матрицю Якобі. Але матриця  $A$  є підматрицею цієї матриці Якобі (див. (46)). Тому  $r(A) = n-1$ .

Крок 5. Перевіримо, що кожний перший інтеграл системи (43) можна функціонально виразити (локально) через одержану систему  $\{\Phi_1(\cdot), \dots, \Phi_{n-1}(\cdot)\}$  (для довільної незалежної системи  $(n-1)$ -го перших інтегралів цей факт перевіряти не будемо).

Якщо  $x^k = \Phi_k(\vec{y})$  ( $k=1, \dots, n-1$ ) наша система перших інтегралів (тут  $x^k$  –  $k$ -та координата точки перетину відповідної траєкторії з гіперплощиною  $K_0$ ), а  $\Phi$  – довільний перший інтеграл системи (43), то його обмеження на гіперплощину  $K_0$  дає функцію  $v(x^1, \dots, x^{n-1})$ . Тоді функції  $\Phi(\vec{y})$  та  $v(\Phi_1(\vec{y}), \dots, \Phi_{n-1}(\vec{y}))$  співпадають на кожній траєкторії, а тому і тотожно в околі точки  $\vec{x}_0$ . ■

## РОЗДІЛ 5. ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

### §1. Постановка задачі. Приклади

Як і раніше, для системи

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (1)$$

розв'язок з початковою умовою  $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$  позначимо через  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ . За теоремою про неперервну залежність розв'язку від початкової умови, на обмеженому відрізку  $\Delta = [t_0, T]$  за відповідних умов досягається нерівність  $\|\vec{\varphi}(t, \vec{x}) - \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$  в разі, якщо  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$  (теорема 4.2). Але цей результат було одержано лише для обмеженого відрізку  $\Delta$ . В цьому розділі буде досліджено умови, за яких відрізок  $\Delta$  можна замінити на необмежену піввісь  $[t_0, +\infty)$ .

Припустимо надалі, що розв'язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  визначено на півосі  $[t_0, +\infty)$ .

**Означення.** Розв'язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  називається стійким за Ляпуновим, якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  таке, що  $\forall \vec{x}$ , для якого:  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ , розв'язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x})$  визначено на всьому  $[t_0, +\infty)$  і при цьому при всіх  $t \geq t_0$ :  $\|\vec{\varphi}(t, \vec{x}) - \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\| < \varepsilon$ .

Якщо крім цього  $\exists \delta > 0$  таке, що при  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ :  $\|\vec{\varphi}(t, \vec{x}) - \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то розв'язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  називається асимптотично стійким.



**Приклад 1.** Розглянемо рівняння  $\dot{x} = kx$ . Його загальний розв'язок:  $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$ .

При  $k \leq 0$ :  $|x_1 e^{k(t-t_0)} - x_0 e^{k(t-t_0)}| \leq |x_1 - x_0|$  ( $t \geq t_0$ ), а тому кожний розв'язок цього рівняння є стійким.

При  $k < 0$  крім стійкості є ще властивість:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_1 e^{k(t-t_0)} - x_0 e^{k(t-t_0)}| = 0$ , тобто кожний розв'язок є асимптотично стійким.

Якщо  $k > 0$ , то кожний розв'язок є нестійким (перевірте!)

**Приклад 2.** Для системи

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

де  $A$  – квадратна дійсна матриця  $2 \times 2$ , в разі стійкого фокуса або стійкого вузла нульовий розв'язок є асимптотично стійким; в разі центра – нульовий розв'язок є стійким, але не асимптотично стійким (обміркуйте).

Дослідження стійкості (асимптотичної стійкості) розв'язку  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  системи (1) можна звести до дослідження стійкості (асимптотичної стійкості) нульового розв'язку спорідненої з нею нової системи (3) за таких міркувань.

Нехай  $\vec{\varphi}(t)$  – розв'язок системи (1), стійкість якого досліджується. Покладемо

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t). \quad (2)$$

Тоді:

$$\dot{\vec{y}}(t) = \dot{\vec{x}}(t) - \dot{\vec{\varphi}}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t)) = \vec{f}(t, \vec{y}(t) + \vec{\varphi}(t)) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$$

Тож, поклавши:  $\vec{g}(t, \vec{y}) = \vec{f}(t, \vec{y}(t) + \vec{\varphi}(t)) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$ , одержимо систему

$$\dot{\vec{y}} = \vec{g}(t, \vec{y}). \quad (3)$$

Між розв'язками  $\vec{x}(t)$  системи (1) та розв'язками  $\vec{y}(t)$  системи (3) існує взаємно однозначна відповідність, що визначена співвідношенням (2). При цьому розв'язку  $\vec{\varphi}(t)$  системи (1) відповідає нульовий розв'язок системи (3) і при цьому  $\|\vec{y}(t) - \vec{0}\| = \|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\|$ , а тому  $\vec{\varphi}(t)$  є стійким (асимптотично стійким) розв'язком системи (1) в тому й тільки тому разі, якщо ця властивість має нульовий розв'язок системи (3).

Тому в подальшому зосередимось на дослідженні стійкості (асимптотичної стійкості) нульового розв'язку систем.

## **§2. Дослідження стійкості нульового розв'язку однорідної лінійної системи зі сталими коефіцієнтами**

Маємо систему

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \quad (4)$$

$\vec{x}_0 = \vec{0}$  – точка рівноваги. Тож існує тотожно нульовий розв'язок. Нехай  $\lambda_k = \mu_k + i\vartheta_k$  – характеристичні числа матриці  $A$ .

**Лема 1.** Якщо всі характеристичні числа  $\lambda_k$  матриці  $A$  мають від'ємні дійсні частини, то існують  $\alpha > 0$ ;  $M > 0$  такі, що для кожного розв'язку  $\vec{\varphi}(t)$  системи (4) при всіх  $t \geq 0$  маємо:

$$\|\varphi(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \|\varphi(0)\| \quad (5)$$

**Доведення.** Спочатку розглянемо випадок комплексної системи (комплекснозначні функції).

Нехай  $\alpha > 0$  визначено з умови:  $\forall k: \operatorname{Re} \lambda_k < -2\alpha$  (тобто  $\alpha < \frac{1}{2} \min_k |\operatorname{Re} \lambda_k|$ ). Ми знаємо, що у просторі квадратних матриць  $n \times n$  всі норми еквівалентні. Фіксуємо  $\{f_1, \dots, f_n\}$  – жорданів базис матриці  $A$ . Поставимо у відповідь кожній квадратній  $n \times n$  комплексній матриці  $B$  (мислимо її як лінійний оператор в  $\mathbb{C}^n$ ) спочатку її матрицю  $\hat{B} = (b_{ij})$  в базисі  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , а потім число

$$\|B\|_1 = \sum_{i,j=1}^n \alpha^{|i-j|} |b_{ij}| \quad (6)$$

Перевірте: формула (6) задає норму в просторі квадратних матриць  $n \times n$  (її аналог в  $\mathbb{R}^n$ :  $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n c_k |x^k|$ , де  $c_1, \dots, c_n > 0$ ).

Якщо  $\|B\|$  – евклідова норма матриці, то вона еквівалентна нормі  $\|\cdot\|_1$ , тому існує таке додатне  $K$ , що для всіх матриць  $B$  виконується нерівність:  $\|B\| \leq K \|B\|_1$ .

Для матриці  $A$  відповідна матриця  $\hat{A}$  є жордановою. Тому матриця  $\exp(t\hat{A})$  має вид (схематично):

$$e^{t\hat{A}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & te^{t\lambda_1} & \dots & \dots \\ 0 & e^{t\lambda_1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тож для  $t \geq 0$ :  $\|e^{tA}\|_1 \leq \sum_{k=1}^n |e^{t\lambda_k}| e^{\lambda t} \leq ne^{-\lambda t}$ . Оскільки

розв'язки системи (4) мають вид:  $\vec{\phi}(t, \vec{x}_0) = \exp(tA)\vec{x}_0$ , то  $\|\vec{\phi}(t, \vec{x}_0)\| \leq \|e^{tA}\| \|\vec{\phi}(0)\| \leq K \|e^{tA}\|_1 \|\vec{\phi}(0)\| \leq Me^{-\alpha t} \|\vec{\phi}(0)\|$  (тут  $M = K \cdot n$  і використано той факт, що для евклідової норми виконується нерівність:  $\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$  (перевірте!))

У випадку дійсної матриці  $A$  можна мислити дійсний розв'язок як комплексний, тому нерівність (5) зберігається. ■

**Теорема 1.** Нульовий розв'язок  $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$  системи (4) є асимптотично стійкий тоді й тільки тоді, коли всі характеристичні числа матриці  $A$  мають від'ємні дійсні частини.

**Доведення.** Достатність умови – внаслідок леми.

Необхідність. Нехай  $\operatorname{Re} \lambda_1 \geq 0$ . Якщо система (4) комплексна, то  $\lambda_1$  – власне число;  $\vec{f}_1$  – відповідний власний вектор ( $A\vec{f}_1 = \lambda_1 \vec{f}_1$ ). Тоді  $e^{t\lambda_1} \vec{f}_1$  – розв'язок системи (4) і  $\|e^{t\lambda_1} \vec{f}_1\| = e^{t\operatorname{Re} \lambda_1} \|\vec{f}_1\| \not\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Оскільки за власний вектор  $\vec{f}_1$  можна взяти вектор як завгодно малої норми, то в будь-якому околі  $\vec{0}$  є початкова умова  $\vec{x}$ , для якої  $e^{tA}\vec{x} \not\rightarrow \vec{0}$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .

У випадку поля  $\square$ ,  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ;  $\vec{f}_1 = \vec{h}_1 + i\vec{h}_2$  і система (4) має розв'язок:  
 $\vec{x}(t) = \operatorname{Re}(e^{t\lambda_1} \vec{f}_1) = e^{\alpha t} (\vec{h}_1 \cos \beta t - \vec{h}_2 \sin \beta t) \not\rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Останнє твердження очевидне при  $\beta = 0$ . Якщо ж  $\beta \neq 0$ , то

достатньо взяти послідовність  $t_n = \frac{2\pi n}{\beta} > 0$ . Тоді

$\vec{x}(t_n) = e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}n}$  (а що далі?). І знову міркування щодо можливості брати  $\vec{f}_1$ , а тому й  $\vec{h}_1$  якомога маленьким (обміркуйте!) ■

**Зауваження.** Щодо стійкості нульового розв'язку системи (4), то нескладно побачити з наведених вище міркувань, що умова  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0 (\forall k)$  є необхідною (обміркуйте!!). Але ця умова не є достатньою.

Візьміть матрицю  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Для неї  $e^{tA}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + tx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , а тому нульовий розв'язок не є стійким (перевірте!)

### §3. Лема Ляпунова

Нехай  $\vec{x}(t) \equiv \vec{0}$  є розв'язком системи (1) (тобто  $\vec{f}(t, \vec{0}) = \vec{0}$ ).

**Теорема 2.** Нехай функція  $\vec{f}(t, \vec{x})$  визначена при  $\|\vec{x}\| \leq r$ ;  $t \geq t_0$  і є неперервно диференційовною. Нехай в кулі  $\|\vec{x}\| \leq r$  визначена числова функція  $V(\vec{x})$  класу  $C^1$ , для якої  $V(\vec{0}) = 0$ ;  $V(\vec{x}) > 0$  при  $\vec{x} \neq \vec{0}$  і

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}) f_i(t, \vec{x}) \leq 0 \quad (7)$$

при  $\|\vec{x}\| \leq r$ ;  $t \geq t_0$ .

Тоді нульовий розв'язок системи (1) є стійким.

Якщо ж на додачу існує неперервна в кулі  $\|\vec{x}\| \leq r$  числова функція  $W(\vec{x})$ , для якої  $W(\vec{0})=0$ ;  $W(\vec{x}) > 0$  при  $\vec{x} \neq \vec{0}$  і нерівність

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}) f_i(t, \vec{x}) \leq -W(\vec{x}) \quad (8)$$

виконується при  $\|\vec{x}\| \leq r$ ;  $t \geq t_0$ , то нульовий розв'язок системи (1) асимптотично стійкий.

**Доведення.** Крок 1. Візьмемо  $\varepsilon \in (0, r)$  і нехай  $V_\varepsilon = \min_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} V(\vec{x})$ . Звичайно,  $V_\varepsilon > 0$  і тому існує таке  $\delta > 0$ , що в кулі  $\|\vec{x}\| < \delta$  виконується нерівність:  $V(\vec{x}) < V_\varepsilon$ . Очевидно,  $\delta < \varepsilon$ . Доведемо:  $\forall \vec{x}_0$ , що задовольняє нерівність  $\|\vec{x}_0\| < \delta$ , розв'язок  $\vec{\varphi}(t)$  системи (1) з початковою умовою  $\vec{x}_0$  визначено при всіх  $t \geq t_0$  і при цьому  $\|\vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon$  для всіх  $t \geq t_0$ .

Насправді, достатньо перевірити лише друге твердження, бо з нього, спираючись на техніку побудови неперервного розв'язку з розділу 1, робимо висновок про існування розв'язку  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$  для всіх  $t \geq t_0$  при  $\|\vec{x}_0\| < \delta$ .

Тож нехай існує  $t > t_0$ , при якому  $\|\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)\| \geq \varepsilon$  і нехай  $t_1 = \inf \{t \mid \|\vec{\varphi}(t)\| \geq \varepsilon\}$ . Тоді при  $t < t_1$ :  $\|\vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon$  і  $\|\vec{\varphi}(t_1)\| \leq \varepsilon$ . З іншого боку,  $\|\vec{\varphi}(t_1)\| \geq \varepsilon$  (неперервність!). Тож  $\|\vec{\varphi}(t_1)\| = \varepsilon$ . (обміркуйте!)

Тоді з (7) маємо (при  $t \in [t_0, t_1]$ ):

$$\frac{d}{dt} V(\vec{\varphi}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{\varphi}(t)) \dot{\varphi}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{\varphi}(t)) f_i(t, \vec{\varphi}(t)) \leq 0$$

Звідси:  $V_\varepsilon > V(\vec{\varphi}(t_0)) \geq V(\vec{\varphi}(t_1)) \geq V_\varepsilon$ . Суперечність.

Крок 2. Переходимо до перевірки умови асимптотичної стійкості.

Залишаємо  $\varepsilon > 0$ ;  $\delta > 0$  такими ж, як і в кроці 1. Оскільки, як і раніше для  $t \in [t_0; +\infty)$   $\frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t)) \leq 0$ , але  $V(\vec{\varphi}(t)) \geq 0$  для  $t \geq t_0$ , то існує  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\vec{\varphi}(t)) = C \geq 0$ .

Припустимо, що  $C > 0$ . Тоді для  $t \geq t_0$ :  $V(\vec{\varphi}(t)) > \frac{C}{2}$ .

З цього виходить, що  $\exists \alpha > 0$  таке, що для кожного  $t \geq t_0$ :  $\|\vec{\varphi}(t)\| \geq \alpha$  (пригадайте умови, накладені на функцію  $V$ :  $V(\vec{0}) = 0$ ; неперервність  $V$ ). Аналогічні умови на функцію  $W(\vec{x})$  приводять до висновків:  $W(\vec{x})$  строго додатна в кільці  $\alpha \leq \|\vec{x}\| \leq \varepsilon$  і тому  $\inf \{W(\vec{x}) \mid \alpha \leq \|\vec{x}\| \leq \varepsilon\} = \beta > 0$ .

Далі, посилаючись на (8), при  $t \geq t_0$  маємо:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{\varphi}(t)) f_i(t, \vec{\varphi}(t)) \leq -W(\vec{\varphi}(t)) \leq -\beta;$$

$$V(\vec{\varphi}(t)) - V(\vec{\varphi}(t_0)) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t)) dt \leq -\beta(t - t_0), \quad \text{а} \quad \text{тому}$$

$V(\vec{\varphi}(t)) \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Суперечність.

Тож,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\vec{\varphi}(t)) = 0$ . А тепер доведемо, що  $\vec{\varphi}(t) \rightarrow \vec{0}$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Дійсно, якщо  $\vec{\varphi}(t) \not\rightarrow \vec{0}$ , то існує послідовність  $t_n \rightarrow +\infty$ , для якої  $\|\vec{\varphi}(t_n)\| \geq \gamma > 0$ . Але в кільці  $\gamma \leq \|\vec{x}\| \leq \varepsilon$ :  $\inf \{V(\vec{x}) \mid \gamma \leq \|\vec{x}\| \leq \varepsilon\} > 0$  і тому  $V(\vec{\varphi}(t_n)) \not\rightarrow 0$ . Суперечність. ■

### Приклад 3. Система

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases} \quad (9)$$

Функція      Ляпунова       $V(x, y) = x^2 + y^2$ .      Дійсно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot f_2(x, y) = 2(-(x - y)^2 - y^4) \leq 0. \quad \text{Нульовий}$$

розв'язок системи (9) є стійким. При цьому функція  $W(x, y) = 2((x - y)^2 + y^4)$  є такою, що задовольняє умову теореми (перевірте!). Тож нульовий розв'язок системи (9) навіть асимптотично стійкий.

### §4. Асимптотична стійкість розв'язку диференціального рівняння вищого порядку

Існуючий зв'язок між диференціальними рівняннями порядку  $n$  (розв'язними відносно старшої похідної):

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (10)$$

та (нормальними) системами диференціальних рівнянь  $1^{\text{го}}$  порядку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = F(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

дозволяє природним чином перенести поняття стійкості (асимптотичної стійкості) на випадок одного рівняння порядку  $n$ .

Нехай  $x(t)$  – розв'язок рівняння (10), який визначено на півосі  $[t_0; +\infty)$ . Цей розв'язок



називаємо стійким за Ляпуновим, якщо: 1)  $\exists \delta > 0$ , для якого будь-який розв'язок  $y(t)$  рівняння (10), що задовольняє систему:

$$|x^{(k)}(t_0) - y^{(k)}(t_0)| < \delta \quad (k = 0; \dots; n-1), \quad (11)$$

також визначено на півосі  $[t_0; +\infty)$ ; 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , що для будь-якого розв'язку, який задовольняє систему (11), при  $\forall t \geq t_0$  задовольняється система нерівностей:

$$|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)| < \varepsilon \quad (k = 0; 1; \dots; n-1).$$

Якщо виконується додаткова властивість:  $\forall k \in \{0; 1; \dots; n-1\}: x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то розв'язок  $x(t)$  називаємо асимптотично стійким.

Зокрема будемо розглядати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_n x = 0 \quad (12)$$

Рівняння (12) має нульовий розв'язок, а його стійкість (асимптотична стійкість) - це, власне, стійкість (асимптотична стійкість) нульового розв'язку відповідної лінійної системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n. \end{cases} \quad (13)$$

Відповідне питання досліджувалось у §2 і ми знаємо, що критерієм асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (13) є умова:  $\text{Re} \lambda_k < 0$  для всіх характеристичних чисел матриці системи (13). Але характеристичний многочлен системи (13)

і рівняння (12) співпадають (перевірте!) і приходимо до висновку: нульовий розв'язок рівняння (12) асимптотично стійкий тоді й тільки тоді, коли усі корені многочлена  $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  належать півплощині:  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

Є різні методи перевірки останньої умови. Найефективніший серед них – використання „критерія Рауса-Гурвіца”.

**Факт.** Усі корені многочлена  $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  належать півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  тоді й тільки тоді, коли додатні всі головні мінори наступної матриці  $n \times n$ :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(тут припускається:  $a_k = 0$  при  $k > n$ ).

**Приклад.** Для многочлена  $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$  відповідна матриця має вид:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{4} & 2 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{3} & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix}$$

Її головні мінори окреслено на малюнку. Їх значення: 2; 5; 7; 14 – усі додатні. Критерій виконується.

## §5. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням

**Теорема 3** (О.М. Ляпунов). Розглянемо автономну систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (14)$$

Нехай  $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ ;  $\vec{f}$  задовольняє умову теореми Пікара в околі точки  $\vec{x}_0$  і  $\vec{f}$  диференційовна в точці  $\vec{x}_0$ .

Якщо дійсні частини усіх характеристичних чисел матриці Якобі  $\vec{f}'(\vec{x}_0)$  від'ємні, то розв'язок  $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$  є асимптотично стійким.

**Доведення.** Доведемо цю теорему лише для точки  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  (загальна ситуація відрізняється від цієї лише незначним ускладненням позначень). Тож  $\vec{f}(0) = \vec{0}$ . Оскільки  $\vec{f}$  диференційовна в точці  $\vec{0}$ , то

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \quad (15)$$

де  $A = \vec{f}'(\vec{0})$ ;

$$\|\vec{F}(\vec{x})\| = o(\|\vec{x}\|) \text{ при } \vec{x} \rightarrow \vec{0}. \quad (16)$$

Нагадаємо, що всі норми в скінченновимірному лінійному просторі попарно еквівалентні. Тому співвідношення (16) виконується в будь-якій нормі. Цю норму  $(\|\cdot\|_1)$  виберемо пізніше і вона буде породжена скалярним добутком  $(\vec{x}, \vec{y})_1$ , що відрізняється від канонічного. При доведенні асимптотичної стійкості нульового розв'язку

використаємо лему Ляпунова. За функцію Ляпунова приймаємо  $V(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_1^2 = (\vec{x}, \vec{x})_1$ .

Сума  $\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\vec{x}) f_k(\vec{x})$  у формулі (7) є не що інше, як

значення похідної функції  $V(\vec{x})$  у напрямку  $\vec{f}(\vec{x})$ .

Похідну  $V(\vec{x})$  у напрямку  $\vec{h}$  в точці  $\vec{x}$  одержимо с формули

$$V(\vec{x} + \vec{h}) - V(\vec{x}) = (\vec{x} + \vec{h}, \vec{x} + \vec{h})_1 - (\vec{x}, \vec{x})_1 = 2(\vec{x}, \vec{h})_1 + \|\vec{h}\|_1^2. \quad \text{Тоді}$$

$V'(\vec{x})\vec{h} = 2(\vec{x}, \vec{h})_1$ . Це доводить неперервну диференційовність функції  $V(\vec{x})$  і маємо формулу:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\vec{x}) f_k(\vec{x}) = 2(\vec{x}, f_k(\vec{x}))_1 = 2(\vec{x}, A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}))_1. \quad (17)$$

Власне, до формули (17) можна прийти більш коротким шляхом з інших міркувань. Для розв'язку  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  маємо:

$$\frac{d}{dt} V(\vec{x}(t)) = \frac{d}{dt} (\vec{x}(t), \vec{x}(t))_1 = 2(\dot{\vec{x}}(t), \vec{x}(t))_1 = 2(A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \vec{x}(t))_1.$$

$$\text{Але } |(\vec{x}, \vec{F}(\vec{x}))_1| \leq \|\vec{F}(\vec{x})\|_1 \cdot \|\vec{x}\|_1 = o(\|\vec{x}\|_1^2).$$

Якщо буде доведено існування  $\beta > 0$  такого, що  $(A\vec{x}, \vec{x})_1 \leq -\beta \|\vec{x}\|_1^2$  для всіх  $\vec{x}$ , то, оскільки в достатньо малому околі  $\vec{0}$  матимемо:  $|o(\|\vec{x}\|_1^2)| \leq \frac{\beta}{2} \|\vec{x}\|_1^2$ , в цьому ж околі буде виконуватись нерівність:

$$2[(\vec{x}, A\vec{x})_1 + (\vec{x}, \vec{F}(\vec{x}))_1] \leq -\beta \|\vec{x}\|_1^2. \quad (18)$$

Тому, якщо прийняти за  $W(\vec{x})$  функцію  $\beta \|\vec{x}\|_1^2$ , нерівність (18) переводить рівність (17) у формулу

(8), що є підставою, за лемою Ляпунова, стверджувати про асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (14).

Залишилось знайти скалярний добуток, в якому (при деякому  $\beta > 0$ ) виконується нерівність:

$$(A\vec{x}, \vec{x})_1 \leq -\beta \|\vec{x}\|_1^2$$

Нагадаємо, що за умов теореми, за лемою 1, існують  $M > 0$ ;  $\alpha > 0$  такі, що для кожного розв'язку  $\vec{\varphi}(t)$  лінеаризованої системи  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  виконується нерівність:  $\|\varphi(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \|\varphi(0)\|$  (тут  $\|\cdot\|$  – канонічна норма в  $\mathbb{R}^n$ ).

Покладемо:

$$(\vec{x}, \vec{y})_1 = \int_0^{\infty} (e^{tA}\vec{x}, e^{tA}\vec{y}) dt \quad (19)$$

Інтеграл у формулі (19) збігається, тому що

$$|(e^{tA}\vec{x}, e^{tA}\vec{y})| \leq \|e^{tA}\vec{x}\| \cdot \|e^{tA}\vec{y}\| \leq M^2 e^{-2\alpha t} \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Властивості скалярного добутку для  $(\cdot, \cdot)_1$  зрозумілі (а студенти нехай перевірять!).

З урахуванням еквівалентності норм матимемо:

$$(A\vec{x}, \vec{x})_1 = \int_0^{\infty} (e^{tA}A\vec{x}, e^{tA}\vec{x}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \|e^{tA}\vec{x}\|^2 dt = -\frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 \leq -\beta \|\vec{x}\|_1^2$$

(пояснення останньої нерівності:  $\exists C : \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n :$

$$\|\vec{x}\| \geq C \|\vec{x}\|_1 ; \text{ тому } -\frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 \leq -\frac{1}{2} C^2 \|\vec{x}\|_1^2 ; \beta = \frac{1}{2} C^2 ). \blacksquare$$

### §6. Достатня умова нестійкості

**Теорема 4** (М.Г. Четаєв). Нехай система

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (20)$$

має нульовий розв'язок, що визначений при  $t \geq t_0$  (тобто  $\vec{f}(t, \vec{0}) = \vec{0}$  при  $t \geq t_0$ );  $\vec{f}$  задовольняє умову теореми Пікара на  $[t_0; +\infty) \times \{\vec{x} | \|\vec{x}\| \leq r\}$ . Нехай в замкненому  $r$ -околі  $\vec{0}$  визначена диференційовна числова функція  $V$ , що має такі властивості:

1) множина  $\{\vec{x} | V(\vec{x}) > 0\} \cap \{\|\vec{x}\| \leq r\}$  непорожня і  $\vec{0}$  належить її замиканню.

2) існує додатня і неперервна на множині  $\{\vec{x} | V(\vec{x}) > 0\}$  функція  $W$  така, що скрізь в  $[t_0; +\infty) \times \{\vec{x} | V(\vec{x}) > 0\}$  виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\vec{x}) f_k(t, \vec{x}) \geq W(\vec{x}) > 0. \quad (21)$$

Тоді нульовий розв'язок рівняння (20) нестійкий.

**Доведення.** За умовою 1) на функцію  $V$ , в будь-якому околі  $\vec{0}$  є точка  $\vec{x}_0$ , в якій  $V(\vec{x}_0) > 0$ . Нехай  $\vec{\varphi}(t)$  – розв'язок з початковою умовою:  $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$ .

Множина  $G = \{\vec{x} | V(\vec{x}) \geq V(\vec{x}_0)\} \cap \{\vec{x} | \|\vec{x}\| \leq r\}$  замкнена та обмежена і є частиною множини  $\{\vec{x} | V(\vec{x}) > 0\}$ . Тому існує  $\beta = \min_G W > 0$  (використання умови 2).

Посилаючись на нерівність (21) можна стверджувати, що для всіх  $t \geq t_0$ , для яких  $\vec{\varphi}(t) \in \{\vec{x} | V(\vec{x}) > 0\}$ , виконується наступна нерівність:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t)) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\vec{\varphi}(t)) \frac{d\varphi_k}{dt}(t) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\vec{\varphi}(t)) f_k(t, \vec{\varphi}(t)) \geq W(\vec{\varphi}(t)) > 0.\end{aligned}\tag{22}$$

Але з міркувань неперервності:  $\vec{\varphi}(t) \in \{\vec{x} | V(\vec{x}) > 0\}$  для  $t$  з малого півокола  $t_0$ :  $(t \in [t_0, t_0 + \delta))$ . Тому при всіх  $t > t_0$ :  $V(\vec{\varphi}(t)) > V(\vec{x}_0)$  (обміркуйте цей тезис!) і крива  $\vec{\varphi}(t)$  при  $t \geq t_0$  знаходиться в  $G$  аж поки не вийде за межі кулі  $\{\vec{x} | \|\vec{x}\| \leq r\}$ . Припущення про те, що нерівність  $\|\vec{\varphi}(t)\| \leq r$  виконується при всіх  $t \geq t_0$  приводить (див. (22)), у свою чергу, до нерівності:

$$\frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t)) \geq W(\vec{\varphi}(t)) \geq \beta > 0,$$

звідки:  $V(\vec{\varphi}(t)) \geq V(\vec{\varphi}(t_0)) + \beta(t - t_0)$ .

Остання нерівність суперечить обмеженості неперервної функції  $V$  в замкненій кулі  $\{\vec{x} | \|\vec{x}\| \leq r\}$ . Тож крива  $\vec{\varphi}(t)$  повинна вийти за межі кулі  $\{\|\vec{x}\| \leq r\}$ . Цим доведена нестійкість нульового розв'язку (чому?) ■

**Приклад.** Система

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}\tag{23}$$

має нульовий розв'язок. Функція  $V(x, y) = x^4 - y^4$  задовольняє умову 1) на функцію  $V$  в теоремі 4, оскільки  $(0, 0)$  належить межі області

$$\{(x, y) | |x| > |y|\} = \{(x, y) | V(x, y) > 0\}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot (y^3 + x^5) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot (x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8).$$

Тому, якщо за функцію  $W(x, y)$  прийняти  $4(x^8 - y^8)$ , то виконується умова 2) на функцію  $V$  з теореми 4. Отже, нульовий розв'язок системи (23) є нестійким.

## **§7. Теорема Ляпунова про нестійкість за першим наближенням**

**Теорема 5** (О.М. Ляпунов).

Нехай  $\vec{x}_0$  – особлива точка системи (14);  $\vec{f}$  задовольняє умову теореми Пікара в околі точки  $\vec{x}_0$  і  $\vec{f}$  диференційовна в точці  $\vec{x}_0$ .

Якщо серед характеристичних чисел матриці Якобі  $\vec{f}'(\vec{x}_0)$  є таке, для якого  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , то стан нерухомості  $\vec{x}_0$  є нестійким.

**Доведення.** Для спрощення викладок покладемо:  $\vec{x}_0 = \vec{0}$ .

Крок 1. Доведемо теорему спираючись на результат теореми 4 і функцію Четаєва  $V(\vec{x})$  шукаємо як квадратичну форму  $(B\vec{x}, \vec{x})$ , де  $B$  – самоспряжений лінійний оператор в  $\mathbb{R}^n$ .

Як і при доведенні теореми 3, маємо формулу (15):

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \quad (15)$$

в якій  $A = \vec{f}'(\vec{0})$ ;

$$\|\vec{F}(\vec{x})\| = o(\|\vec{x}\|) \text{ при } \vec{x} \rightarrow \vec{0}. \quad (16)$$



Для довільного розв'язку  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  системи (14) матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\vec{x}(t)) &= (B\dot{\vec{x}}(t), \vec{x}(t)) + (B\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) = (B(A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x})), \vec{x}) + \\ &+ (B\vec{x}, A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x})) = ((BA + A^*B)\vec{x}, \vec{x}) + 2(B\vec{x}, \vec{F}(\vec{x})) \end{aligned} \quad (24)$$

Крок 2. Припустимо, що вдалось знайти такий самоспряжений оператор  $B$ , для якого виконуються 2 умови:

$$1) \quad B \not\leq 0 \quad (\text{тобто } \exists \vec{x} \neq \vec{0} : (B\vec{x}, \vec{x}) \geq 0) \quad (25)$$

$$2) \quad \exists \gamma > 0 \quad \text{таке, що}$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : ((A^*B + BA)\vec{x}, \vec{x}) = \gamma(B\vec{x}, \vec{x}) + \|\vec{x}\|^2 \quad (26)$$

Доведемо, що в цьому разі функція  $V(\vec{x}) = (B\vec{x}, \vec{x})$  буде функцією Четаєва.

Спочатку перевіримо, що  $\vec{0}$  є граничною точкою області  $D$ , в якій  $V(\vec{x}) > 0$ . Оскільки  $B \not\leq 0$ , то (в будь-якому околі  $\vec{0}$ ) існує ненульовий вектор  $\vec{x}_0$ , в якому  $(B\vec{x}_0, \vec{x}_0) \geq 0$ . В разі, якщо  $(B\vec{x}_0, \vec{x}_0) > 0$ ,  $\vec{0}$  – гранична точка  $D$  (обміркуйте!). Якщо ж  $(B\vec{x}_0, \vec{x}_0) = 0$ , то, спираючись на (26) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(e^{tA}\vec{x}_0) &= \frac{d}{dt}(Be^{tA}\vec{x}_0, e^{tA}\vec{x}_0) = (BAe^{tA}\vec{x}_0, e^{tA}\vec{x}_0) + (Be^{tA}\vec{x}_0, Ae^{tA}\vec{x}_0) = \\ &= ((A^*B + BA)e^{tA}\vec{x}_0, e^{tA}\vec{x}_0) = \gamma(Be^{tA}\vec{x}_0, e^{tA}\vec{x}_0) + \|e^{tA}\vec{x}_0\|^2. \end{aligned}$$

Звідси:  $\frac{d}{dt}|_{t=0} V(e^{tA}\vec{x}_0) = \|\vec{x}_0\|^2 > 0$ , а тому при малих додатних  $t$  маємо:  $V(e^{tA}\vec{x}_0) > 0$ . Тож і в цьому разі в кожному околі  $\vec{0}$  є точка  $\vec{x}$ , в якій  $V(\vec{x}) > 0$ .

Стосовно другої умови теореми Четаєва. З (24) маємо (як і при доведенні теореми 3):

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(\vec{x}) f_k(\vec{x}) = ((BA + A^*B)\vec{x}, \vec{x}) + 2(B\vec{x}, \vec{F}(\vec{x})). \quad (27)$$

Оскільки, в достатньо малому околі  $\vec{0}$  на підставі (16) маємо:  $2|(B\vec{x}, \vec{F}(\vec{x}))| < \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2$  (неодмінно обміркуйте цю нерівність!), то можна покласти:

$$W(\vec{x}) = \gamma(B\vec{x}, \vec{x}) + \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2$$

Тоді в достатньо малому околі точки  $\vec{0}$  в разі виконання нерівності  $V(\vec{x}) = (B\vec{x}, \vec{x}) > \vec{0}$ , виконується також нерівність (21). Цим доведена нестійкість нульового розв'язку.

Крок 3. Шукаємо оператор  $B$ , що задовольняє умови (25) - (26).

Позначимо через  $L_A$  лінійний оператор, що діє в просторі симетричних матриць  $n \times n$  за принципом:  $L_A: B \rightarrow BA + A^*B$  (перевірте коректність: лінійність  $L_A$  і той факт, що  $BA + A^*B$  - самоспряжена матриця разом з  $B$ ).

В разі, якщо  $\gamma$  не є власним числом оператора  $L_A$ , рівняння

$$L_A B - \gamma B = I \quad (28)$$

(тут  $I$  - тотожня матриця) - завжди має розв'язок.

Нехай  $\gamma_1$  - найменша додатна дійсна частина характеристичних чисел матриці  $A$  (за умовою теореми:  $\gamma_1$  існує).

Нехай  $\gamma \in (0; 2\gamma_1)$  і  $\gamma$  не є власним числом оператора  $L_A$ . Доведемо, що в цьому разі розв'язок

$B$  рівняння (28) і є шукана матриця. Слід перевірити лише умову (25) (тому що (26) і є, власне, (28)).

Нехай  $B < 0$ .

За теоремою 1, нульовий розв'язок системи

$$\dot{\vec{y}} = (A - \frac{\gamma}{2}I)\vec{y} \quad (29)$$

є нестійким (оскільки принаймні одне з характеристичних чисел матриці  $A - \frac{\gamma}{2}I$  має додатну дійсну частину).

З іншого боку, в разі, якщо  $B < 0$ , функція  $V_1(\vec{y}) = -(B\vec{y}, \vec{y})$  підійшла б як функція Ляпунова для системи (29): для розв'язку  $\vec{y} = \vec{y}(t)$  маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_1(\vec{y}(t)) &= -(B\vec{y}(t), (A - \frac{\gamma}{2}I)\vec{y}(t)) - (B(A - \frac{\gamma}{2}I)\vec{y}(t), \vec{y}(t)) = \\ &= -((A^*B + BA)\vec{y}, \vec{y}) = 0. \end{aligned}$$

Тому за теоремою 2, нульовий розв'язок системи (29), виявляється стійким. Суперечність доводить, що  $B \not< 0$ . ■

## РОЗДІЛ 6. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

### §1. Предмет дослідження

„Функціонал” – саме таким терміном прийнято було називати функції, аргументи яких самі є функціями. Прикладом функціонала є визначений інтеграл:

$$F : C[a;b] \ni f \mapsto \int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Інший приклад – функціонал довжини кривої:

$$F_1 : C^1[a;b] \ni f \mapsto \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Цей функціонал кожній неперервно диференційовній функції на відрізку  $[a;b]$  ставить у відповідь довжину кривої графіка цієї функції.

Згодом з'ясувалось, що функціонали доцільно розглядати як функції на нескінченновимірних функціональних просторах, і це тлумачення функціонала виявилось найперспективнішим.

Варіаційне числення займається дослідженням необхідних і достатніх умов екстремумів функціоналів.

Історично саме наступні три задачі мали чи не найбільший вплив на розвиток варіаційного числення.

Перша задача – задача про „брахістохрону”. У 1696 році Іоганн Бернуллі опублікував лист, в якому була запропонована задача про лінію найшвидшого спуску (він назвав її „брахістохроною”). Задача полягала в пошуку лінії,

що з'єднує дві задані точки, що не знаходяться на одній вертикальній прямій, і має ту властивість, що матеріальна точка під дією сили тяжіння має спуститись вздовж цієї лінії від однієї точки до іншої у найкоротший час. Ця задача була розв'язана самим І.Бернуллі, а також Я.Бернуллі, Г.Лейбніцем, І.Ньютоном та Г. Лопіталем. Ця лінія виявилась циклоїдою.

Друга задача – ізопериметрична задача. Найвідоміша задача цього циклу – це задача про пошук фігури на площині, що має найбільшу площу серед усіх, що мають даний периметр. Для задачі у цій постановці (як відомо ще з часів стародавньої Греції) шуканою фігурою буде круг.

Третя задача – пошук геодезичних ліній – найкоротших ліній, що з'єднують дві фіксовані точки на заданій поверхні. Так, наприклад, геодезичні на сфері – це дуги кіл великого радіуса (тобто кіл, центр яких співпадає з центром кулі).

## **§2. Основний функціонал варіаційного числення та його узагальнення**

Нехай  $F(p, q, r)$  – функція трьох дійсних змінних класу  $C^p$ . Для функцій  $y = y(x)$ , визначених на відрізку  $[a; b]$  і таких, що мають неперервну похідну (тобто  $y \in C^1[a; b]$ ), наступний інтеграл

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad \text{існує (як інтеграл від}$$

неперервної змінної). Тим самим визначено функціонал  $I: C^1[a; b] \ni y \mapsto I(y) \in \mathbb{R}$ .

Цей функціонал називається основним функціоналом варіаційного числення. Коротше:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

Природними узагальненнями основного варіаційного функціонала є такі функціонали:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (2)$$

(тут  $y \in C^n[a; b]$ );  $F$  – функція  $n+2$  дійсних змінних класу  $C^p$  ( $p \geq n$ ) та функціонал, що визначено на гладких вектор-функціях:

$$I(\vec{y}) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \quad (3)$$

(тут  $\vec{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot))$  – гладка вектор-функція на  $[a; b]$ ;  $F$  – гладка функція  $2n+1$  змінних).

### §3. Необхідна умова екстремуму

Нехай  $I$  – функція, що визначена на підмножині  $D$  нормованого простору  $X$ . Здебільшого простір  $X$  буде нескінченновимірним, а функцію  $I$ , за традицією, в цьому разі будемо називати „функціоналом”. Диференційовність функціонала  $I$  у внутрішній точці  $y$  множини  $D$  визначена як можливість представити приріст функціонала  $I(y+h) - I(y)$  як суму „головної лінійної частини” прирісту:  $\varphi(h)$  (тут  $\varphi$  – лінійний функціонал на  $X$ ) та доданка  $\omega(h)$ , що є нескінченно малою (при

$\|h\| \rightarrow 0$ ) вищого порядку, аніж  $\|h\|$ :  $\omega(h) = o(\|h\|)$ , або  $\omega(h) = \alpha(h) \cdot \|h\|$ , де  $\alpha(h) \rightarrow 0$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ . Тож

$$I(y+h) - I(y) = \varphi(h) + o(\|h\|) = \varphi(h) + \alpha(h)\|h\|. \quad (4)$$

Лінійний функціонал  $\varphi$  називається похідною (або варіацією, або диференціалом) функціонала  $I$  в точці  $y$  і позначається:  $\varphi = I'(y) = \delta I(y)$ , або, коротше,  $\varphi = \delta I$ .

Коректність цього означення - це єдиність варіації функціонала  $I$ . Для перевірки єдиності припускаємо існування двох різних варіацій  $\varphi$  та  $\psi$

; фіксуємо  $h \neq 0$ ; і для послідовності  $h_n = \frac{1}{n}h$  з

формули (4) одержимо:  $\varphi(h_n) - \psi(h_n) = o(\|h_n\|)$ , звідки:

$$\frac{\frac{1}{n}(\varphi(h) - \psi(h))}{\frac{1}{n}\|h\|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \text{Це можливо лише, якщо}$$

$\varphi(h) = \psi(h)$ . Довільність вибору  $h \neq 0$  доводить коректність.

Поняття екстремуму (локального) успадковується з курсу математичного аналізу. Функціонал  $I$  має мінімум (строгий мінімум) в точці  $y \in D$ , якщо існує  $\varepsilon > 0$  таке, що для кожного  $h \in X$  такого, що  $0 < \|h\| < \varepsilon$  і  $y+h \in D$ , виконується нерівність:  $I(y+h) \geq I(y)$  (відповідно:  $I(y+h) > I(y)$ ). Аналогічні означення мають максимум та строгий максимум.

Прикладами нормованих просторів є простір  $C[a;b]$  неперервних функцій з нормою

$$\|y\| = \sup_{a \leq x \leq b} |y(x)|, \quad (5)$$

а також простір  $C^1[a;b]$  з нормою

$$\|y\|_1 = \sup_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |y'(x)|. \quad (6)$$

Кожна функція  $y \in C^1[a;b]$  є одночасно елементом простору  $C[a;b]$ . Основний варіаційний функціонал може розглядатись і як функціонал на  $C^1[a;b]$  і як функціонал на  $C[a;b]$  (визначений на множині  $D$  неперервно диференційовних функцій). Нехай функціонал  $I$  досягає мінімуму на функції  $y$  в сенсі простору  $C[a;b]$ , що означає існування такого  $\varepsilon > 0$ , для якого в разі нерівності  $\|h\| = \sup_{a \leq x \leq b} |h(x)| < \varepsilon$

матимемо:  $I(y+h) - I(y) \geq 0$ . Оскільки

$(\|h\|_1 < \varepsilon) \Leftrightarrow \left( \sup_{a \leq x \leq b} |h(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |h'(x)| < \varepsilon \right) \Rightarrow \left( \sup_{a \leq x \leq b} |h(x)| < \varepsilon \right) \Rightarrow (\|h\| < \varepsilon)$   
, то нерівність  $I(y+h) - I(y) \geq 0$  виконується також для всіх  $h$ , що задовольняють умову:  $\|h\|_1 < \varepsilon$ .

**Означення.** Функціонал  $I$  досягає на  $y$  сильного мінімуму (слабкого мінімуму), якщо існує  $\varepsilon > 0$  таке, що з нерівності  $\|h\| < \varepsilon$  (відповідно:  $\|h\|_1 < \varepsilon$ ) виходить:  $I(y+h) \geq I(y)$ .

Міркування, що наведені вище, приводять до висновку: якщо  $I$  досягає на  $y$  сильного екстремуму, то й слабкого також. Зворотний результат не спрацьовує.

**Твердження 1 (необхідна умова екстремуму).** Нехай  $I$  визначено в повному околі  $y_0$  простору  $X$ . Для того, щоб функціонал  $I(y)$  на  $y_0$  досягав мінімуму,



необхідно, щоб його диференціал (якщо він існує) дорівнював 0 на  $y$  ( $\delta I = \delta I(y) = 0$ ).

**Доведення.** Нехай  $\delta I \neq 0$ . Тоді існує  $h$  такий, що  $\delta I(h) = \delta I(y, h) \neq 0$ . Оскільки  $\delta I(th) = t \cdot \delta I(h)$  (лінійність варіації  $\delta I(\cdot)$ ), то (див. (4)):

$$I(y + th) - I(h) = t \cdot \delta I(h) + \alpha(th) \cdot \|th\| = t \cdot \delta I(h) + \alpha(th) \cdot |t| \cdot \|h\|.$$

Оскільки  $\alpha(th) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$ , то формула приводять до висновку про диференційовність функції  $\varphi(t) = I(y + th) - I(h)$  в точці  $t = 0$ , причому  $\varphi'(0) = \delta I(h)$ . Оскільки  $\varphi$  повинна мати в точці 0 екстремум, то за відомою теоремою аналізу,  $\varphi'(0) = 0$ . Маємо суперечність, яка доводить твердження. ■

**Зауваження.** Одержаний результат може бути узагальнено на той випадок, якщо функціонал  $I$  не визначено у повному околі  $V$  точки  $y_0$ . Як виходить з доведення, достатньо вимагати існування підпростору  $Y$  в  $X$  такого, щоб  $D \cap V = \{y_0 + h \mid h \in Y; \|h\| < \varepsilon\}$ . Відповідна умова в цьому разі прийме вид:  $\delta J(y_0, h) = 0$ ,  $\forall h \in Y$ .

В аналізі такі  $y$ , для яких  $\delta I(y) = 0$ , прийнято називати стаціонарними точками функції  $I$ . у варіаційному численні їх називають екстремалами функціонала  $I$ .

#### §4. Найпростіша задача варіаційного числення.

##### Рівняння Ейлера

Нехай  $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$  (хоча, можливо,  $F$  визначена не на всьому просторі  $\mathbb{R}^3$ ).

**Задача.** Серед усіх функцій  $y \in C^1[a; b]$ , що задовольняють умови:

$$y(a) = A; \quad y(b) = B, \quad (7)$$

знайти ту, на якій функціонал  $I$  досягає екстремуму.

**Обговорення задачі.** Множина функцій  $y \in C^1[a; b]$ , що задовольняють умови (7), є підмножиною простору  $C^1[a; b]$ , але сама не є нормованим простором. Втім прирости аргумента  $h$  пробігають лінійний підпростір в  $C^1[a; b]$ , а саме  $h \in \{h \in C^1[a; b] \mid h(a) = h(b) = 0\}$ . Тому необхідна умова екстремуму (твердження 1), по суті, залишається незмінною (див. зауваження).

Крім того, задача може бути розглянута у двох варіантах: на предмет пошуку сильного екстремуму або слабкого. З дослідження, що було проведено у §3 (в разі диференційовності  $I$ ), доходимо до висновку, що  $(I \text{ досягає сильного екстремуму на } y) \Rightarrow (I \text{ досягає слабкого екстремуму на } y) \Rightarrow (y \text{ є екстремаллю для } I)$ .

Тож необхідною умовою як сильного екстремуму, так і слабкого, є умова: „ $y$  є екстремаллю для  $I$ ”.

Наш пошук екстремалей найпростішої задачі варіаційного числення буде дещо не зовсім строгим.

Всі подальші міркування можна зробити абсолютно чіткими, але це досить обтяжлива справа.

Приріст функціонала  $I$ :

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int_a^b F(x, y+h, y'+h') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b (F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h' + \dots) dx = \\ &= \int_a^b (F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h') dx + \dots\end{aligned}$$

(залишковий член під інтегралом є  $O(\|h\|_1^2)$ ) і після інтегрування, як можна довести, матимемо  $O(\|h\|_1^2)$  – ці члени позначено крапками). Тож варіація дорівнює:

$$\delta I(y, h) = \int_a^b (F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h') dx$$

(тут  $h(a) = h(b) = 0$ ). На екстремалі  $y$  повинна виконуватись рівність:

$$\delta I(y, h) = \int_a^b (F'_y(x, y, y')h + F'_{y'}(x, y, y')h') dx = 0 \quad (8)$$

для всіх таких  $h \in C^1[a; b]$ , для яких  $h(a) = h(b) = 0$ .

Оскільки  $F$  – функція класу  $C^2$ , то функція  $F'_y(x, y(x), y'(x))$  має неперервну похідну за  $x$ . Тоді інтегрування частинами дає:

$$\int_a^b F'_{y'}(x, y, y')h' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F'_y(x, y(x), y'(x)) \cdot h(x) dx \quad (9)$$

(враховано:  $h(a) = h(b) = 0$ ), а з (8) та (9) маємо:

$$\int_a^b (F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'}) h dx = 0 \quad (10)$$

для всіх  $h \in C^1[a; b]$  таких, що  $h(a) = h(b) = 0$ .

**Теорема 1 („основна лема варіаційного числення“).** Нехай  $g \in C[a; b]$  така, що  $\forall h \in C^1[a; b]$  таких, що  $h(a) = h(b) = 0$  має місце рівність  $\int_a^b g(x)h(x)dx = 0$ . Тоді  $g(x) \equiv 0$ .

**Доведення.** Нехай  $g(x_0) \neq 0$ . Скажімо,  $g(x_0) > 0$ . Тоді існує інтервал  $(x_1; x_2)$ , в якому  $g(x) > 0$ . Беремо функцію:

$$h(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2, & x \in (x_1; x_2) \\ 0, & x \notin (x_1; x_2). \end{cases}$$

вона задовольняє умови теореми (перевірте).

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} g(x)h(x)dx > 0. \text{ Суперечність. } \blacksquare$$

З теореми 1 умова (10) еквівалентна такій:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad (11)$$

яка і є рівнянням екстремалей поставленої задачі.

Рівняння (11) називається рівнянням Ейлера. Це рівняння є необхідною умовою екстремуму. Але досить часто з геометричних або фізичних міркувань вдається прийти до висновку про існування екстремуму вихідного функціонала. В цьому разі рівняння (11) може дати остаточний розв'язок поставленої задачі на екстремум.

Надалі рівняння (11) будемо записувати у скороченій формі  $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ .

## §5. Приклади

**Задача 1.** Серед усіх кривих, що з'єднують дві точки площини, знайти найкоротшу.

**Розв'язання.** Довжина гладкої кривої, що з'єднує точки площини  $(a, A)$  та  $(b, B)$  дорівнює

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (\text{тут } y = y(x) \text{ - рівняння шуканої}$$

кривої). Оскільки  $F(x, y, y') = F(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$  не залежить явно від  $x$  та  $y$ , то рівняння (11) дає:  $F'_{y'} = \text{const}$ . Звідси:  $y'(x) \equiv k$ ;  $y = kx + l$ . Тому існує єдина екстремаль функціонала  $I(y)$  - пряма, що з'єднує вихідні точки. Існування найкоротшої кривої є апостеріорний факт, що дозволяє зробити висновок про повне розв'язання поставленої задачі. ■

**Задача 2.** Знайти криву, по якій матеріальна точка під дією сили тяжіння може дістатись з точки  $P$  в точку  $Q$  за найкоротший час („задача про брахістохрону“).

**Розв'язання.** З інтуїтивних міркувань шукана крива розташована в одній площині (спробуйте самі дати пояснення цьому емпіричному факту). Розташуємо осі координат як на малюнку:

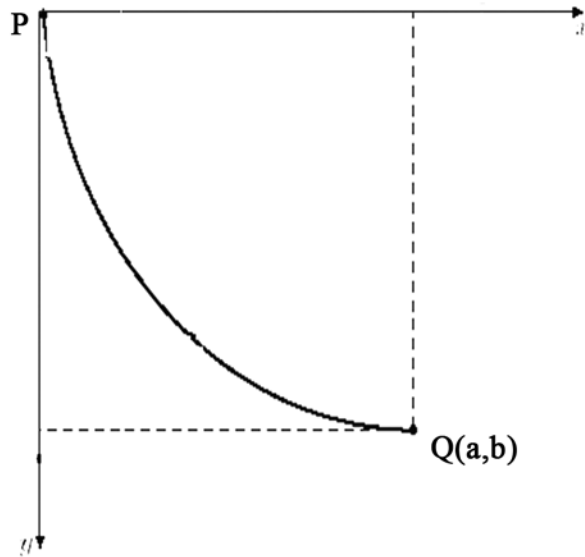


Рис. 22

В момент часу  $t$  швидкість  $v=v(t)$  та координата  $y=y(t)$  пов'язані між собою співвідношенням:  
 $\frac{mv^2}{2} = mgy$  (закон збереження енергії). Звідси:  
 $v = \sqrt{2gy}$ .

Нехай  $s=s(t)$  – довжина кривої, що буде пройдена матеріальною точкою за час  $t$ . Тоді:  
 $v = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1+(y')^2} \cdot \frac{dx}{dt}$ . Звідси:  $dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2} dx}{\sqrt{2gy}}$ , а тому повний час, що буде витрачено на спуск по кривій  $PQ$ , дорівнює

$$T = T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx \quad (12)$$

і потрібно знайти мінімум функціонала  $T(y)$  за умов:  $y(0)=0$ ;  $y(a)=b$ . Відповідна функція

$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}$  явно від  $x$  не залежить. Тому

рівняння Ейлера можна записати так:

$$F - y'F'_y = C. \quad (13)$$

Ця спрощена формула рівняння (11) в разі, якщо  $F(y, y')$ , є наслідком таких перетворень:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F'_y) = F'_y \cdot y' + F''_{yy'} \cdot y'' - y'' \cdot F'_{yy'} - y' \cdot \frac{d}{dx}F'_{yy'} = y' \cdot (F' - \frac{d}{dx}F'_y).$$

Рівняння (13) після перетворень приймає вид:

$$y(1+(y')^2) = C. \text{ Параметризація: } y'_x = \operatorname{ctg} p \text{ (тут } p \in (0; \frac{\pi}{2}])$$

) дає:

$$y = \frac{C}{1+\operatorname{ctg}^2 p} = C \frac{1-\cos 2p}{2}; \quad C \sin 2p = y'_p = y'_x \cdot x'_p = \operatorname{ctg} p \cdot x'_p;$$

$$x'_p = C \frac{1-\cos 2p}{2}; \quad x = C(p - \frac{\sin 2p}{2}) + C_1.$$

Умова  $(x=0) \Leftrightarrow (y=0)$  дає:  $C_1=0$ , а після заміни:

$2p = \tau$  одержимо:

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(\tau - \sin \tau) \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos \tau), \end{cases} \quad (14)$$

що є параметричним завданням циклоїди (константу  $C$  можна підібрати з умови:  $(x=a) \Leftrightarrow (y=b)$ ). ■

## §6. Найпростіша задача з незакріпленими кінцями

Задача полягає в пошуку екстремумів функціонала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad \text{серед кривих } y = y(x), \quad \text{для яких}$$

кінці знаходяться на вертикалях:  $x=a$  та  $x=b$ .

За аналогією з міркуваннями §4 приходимо до висновку, що необхідною умовою екстремуму функціонала  $I(y)$  є рівність (8):

$$\delta I(y, h) = \int_a^b (F'_y \cdot h + F'_{y'} \cdot h') dx = 0, \quad (8)$$

яка повинна виконуватись для всіх  $h \in C^1[a; b]$  (не обов'язково  $h(a) = h(b) = 0$ ). Після інтегрування частинами (при цьому як і в §4 вважаємо:  $F$  – функція класу  $C^2$ ) маємо:

$$\delta I(y, h) = \int_a^b \left( F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \cdot h dx + (F'_{y'} \cdot h) \Big|_a^b = 0. \quad (15)$$

Якщо розглядати лише такі  $h$ , для яких  $h(a) = h(b) = 0$ , то приходимо до рівняння Ейлера:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0, \quad \text{а тому шукана крива повинна бути}$$

екстремаллю (розв'язки рівняння Ейлера прийнято називати екстремалами). Тепер з (15) маємо:

$$F'_{y'} \Big|_{x=b} \cdot h(b) - F'_{y'} \Big|_{x=a} \cdot h(a) = 0, \quad \text{звідки, з урахуванням}$$

довільності чисел  $h(a)$  та  $h(b)$ , маємо:

$$F'_{y'} \Big|_{x=a} = F'_{y'} \Big|_{x=b} = 0. \quad (16)$$

**Приклад.** Знайти криву, по якій повинна рухатись (в площині) матеріальна точка, щоб в найкоротший



час досягнути вертикальної прямої  $x=a$  (див. рис. 1).

**Розв'язання.** Шукана крива є кривою сім'ї (14), в якій константу  $C$  слід шукати з умови:  $F'_{y'}|_{x=a}=0$

$$(\text{див. (16)}) ; \quad 0 = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

звідки  $y'|_{x=a}=0$ . Нагадаємо:  $y'_x = \operatorname{ctg} p = \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2}$ , а тому

$$(y'_x = 0) \Rightarrow (\tau = \pi); \quad C = \frac{2a}{\pi}. \quad \text{Остаточно: } \begin{cases} x = \frac{a}{\pi}(\tau - \sin \tau) \\ y = \frac{a}{\pi}(1 - \cos \tau) \end{cases} . \blacksquare$$

## §7. Узагальнення основного функціонала

1. Функціонали виду:

$$I(\vec{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx.$$

Відповідну задачу (із закріпленими кінцями) ставимо як задачу пошуку екстремуму функціонала  $I(\vec{y})$  за умов:

$$y_1(a) = y_{10}; \quad y_2(a) = y_{20}; \quad \dots ; \quad y_n(a) = y_{n0};$$

$$y_1(b) = y_{11}; \quad y_2(b) = y_{21}; \quad \dots ; \quad y_n(b) = y_{n1}.$$

Фіксуємо всі функції  $y_k$  крім  $y_1$ . Тоді відповідні прирости:  $\vec{h}(t) = (h_1(t); 0; \dots; 0)$  і міркування §4

приводять до рівняння:  $F'_{y_1} - \frac{d}{dx} F'_{y'_1} = 0$ . Заміна  $y_1$  на

$y_k$  ( $k=2, \dots, n$ ) приводить до системи рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$F'_{y_k} - \frac{d}{dx} F'_{y'_k} = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (17)$$

(інший запис:  $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \vec{y}'} - \frac{\partial F}{\partial \vec{y}} = \vec{0}$ ).

2. Функціонали виду:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx. \quad (18)$$

Функціонал (18) слід розглядати для функцій, що визначені на відрізку  $[a; b]$  і мають неперервну похідну порядку  $n$ . Норму у цьому просторі  $C^n[a; b]$  можна задати, наприклад, таким чином:  $\|y\|_n = \sup_{a \leq x \leq b} |y(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |y'(x)| + \dots + \sup_{a \leq x \leq b} |y^{(n)}(x)|$ . Відповідна задача (із закріпленими кінцями) для функціонала (18) має вид:

$$\begin{aligned} y(a) &= A_0; \quad y'(a) = A_1; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}; \\ y(b) &= B_0; \quad y'(b) = B_1; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}. \end{aligned}$$

Щодо приростів  $h = C^n[a; b]$ , то для них виконуються умови:

$$h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0;$$

$h(b) = h'(b) = \dots = h^{(n-1)}(b) = 0$ . Так само, як і при виведенні рівняння Ейлера в §4, за умови достатньої гладкості функції  $F$ , знехтуючи ретельним обґрунтуванням виділення головної лінійної частини, маємо:

$$\begin{aligned} I(y+h) - I(y) &= \int_a^b \left( F(x, y+h, y'+h', \dots, y^{(n)}+h^{(n)}) - F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \right) dx = \\ &= \int_a^b \left( F'_y \cdot h + F'_{y'} \cdot h' + \dots + F'_{y^{(n)}} \cdot h^{(n)} \right) dx + o(\|h\|_n) \end{aligned}$$

Звідси (повторне інтегрування частинами):

$$\begin{aligned}\delta I(y, h) &= \int_a^b F'_y \cdot h dx - \int_a^b \frac{d}{dx} F'_{y'} \cdot h dx + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} \cdot h dx - \dots = \\ &= \int_a^b \left( F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{y^{(n)}} \right) h dx.\end{aligned}$$

Використання основної леми варіаційного числення приводить до наступної форми необхідної умови екстремуму (рівняння Ейлера-Пуассона):

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{y^{(n)}} = 0.$$

## §8. Перетворення Лежандра

Розглянемо систему рівнянь Ейлера-Лагранжа (17):

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

(тут  $F = F(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$ ). Позначимо:  $p_i = \frac{\partial F}{\partial x'_i}$ , де

$$p_i = p_i(t, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) \quad (i=1, \dots, n).$$

Припустимо, що з використанням теореми про неявну функцію, вдалось виразити  $x'_1, \dots, x'_n$  через  $t, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ :  $x'_k = \varphi_k(t, \bar{x}, \bar{p}) \quad (k=1, \dots, n)$ . Тоді з системи (19) маємо:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \bar{x}, \bar{p}) \\ \frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t, \bar{x}, \bar{p}), \quad i=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (20)$$

Система рівнянь (20) - це система рівнянь 1<sup>го</sup> порядку відносно невідомих функцій  $p_i, x_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$ . Покладемо:

$$H(t, \vec{x}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, \vec{x}, \vec{p}) p_i - F(t, \vec{x}, \vec{\varphi}(t, \vec{x}, \vec{p})) \quad (21)$$

(коротше:  $H(t, \vec{x}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^n x'_i p_i - F(t, \vec{x}, \vec{x}') \text{ )} .$   $H$  називається функцією Гамільтона, а перетворення (21) – перетворенням Лежандра.

Знайдемо вид, який прийме система за такої заміни. При цьому слід врахувати, що  $H$  – це функція аргументів  $t, \vec{x}, \vec{p}$ , а з іншого боку – аргументів  $t, \vec{x}, \vec{x}'$  і скористатись принципом інваріантності форми 1<sup>го</sup> диференціала. Тож з (21) маємо:

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial t} dt - \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i - \sum \frac{\partial F}{\partial x'_i} dx'_i + \sum x'_i dp_i + \sum p_i dx'_i .$$

Оскільки  $\frac{\partial F}{\partial x'_i} = p_i$ , то приходимо до рівності:

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial t} dt - \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum x'_i dp_i ,$$

звідки (на підставі однозначної визначеності форми диференціала) маємо:  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial t}; \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = x'_i .$

Система (20) перетворюється в систему рівнянь Гамільтона:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} . \end{cases} \quad (22)$$

Можна відслідкувати еквівалентність системи рівнянь Гамільтона (22) і системи (20).

## §9. Випадок автономної системи Гамільтона

Нехай функція  $F$  від  $t$  явно не залежить. Тоді й функція  $H = -F + \sum x'_i p_i$  від  $t$  не залежить і система Гамільтона (22) є автономною. Доведемо, що  $H$  – перший інтеграл системи (22).

На траєкторії системи:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} H(\vec{x}(t), \vec{p}(t)) = \sum \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0.$$

Тож  $H$  – стала на траєкторіях (22).

Для довільної функції  $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  на траєкторії системи:  $\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = \{\Phi, H\}$  – „дужка Пуассона функцій  $\Phi$  та  $H$ ”. Тому  $\Phi$  – перший інтеграл системи тоді й тільки тоді, коли  $\{\Phi, H\} = 0$ .

**Приклад.** Траєкторія матеріальної частинки в потенціальному полі задовольняє рівняння:

$$m\ddot{\vec{x}} = -\overrightarrow{\text{grad}}U, \quad (23)$$

(тут  $U$  – функція на  $\mathbb{R}^3$ ).

Якщо покласти  $T = \frac{m \|\dot{\vec{x}}\|^2}{2}$  – кінетична енергія;  $F = L = T - U$  – функція Лагранжа („лагранжіан”), то  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{d}{dt} m\dot{\vec{x}} = m\ddot{\vec{x}}; \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$ . Тому рівняння (23)

перепишується у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{0},$$

тобто траєкторія матеріальної частинки в потенціальному полі – це екстремаль функціонала

$$I(\vec{x}) = \int_a^b L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) dt$$

(це є принцип найменшої дії Гамільтона). При цьому

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}}; \quad \dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{p} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}, \vec{p});$$

$H(\vec{x}, \vec{p}) = (\dot{\vec{x}}, \vec{p}) - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = m \|\dot{\vec{x}}\|^2 - (T - U) = T + U = E$  - повна механічна енергія.

Таким чином, функція Гамільтона  $H$  співпадає з повною механічною енергією і наслідком є закон збереження енергії на траєкторії частинки.

## §10. Умовний екстремум. Ізопериметрична задача

Розглянемо два функціонали  $F$  і  $G$ , що визначені на деякій області  $D$  нормованого простору  $X$ . Нехай  $y_0$  - (внутрішня) точка  $D$  і покладемо:  $G(y_0) = C$ . В тому разі, якщо існує окіл  $V$  точки  $y_0$ , для якого  $\min\{F(y) | y \in V; G(y) = C\} = F(y_0)$ ,  $y_0$  називаємо точкою умовного мінімуму функціонала  $F$  (за умови:  $G(y) = C$ ). Означення умовного максимуму аналогічне. Дослідимо необхідну ознаку умовного екстремуму у вказаній постановці.

**Лема 1.** Нехай функціонали  $F$  і  $G$  диференційовні в околі  $y_0$  і їх варіації  $\delta F(y, h)$ ;  $\delta G(y, h)$  неперервні відносно  $y$  в цьому околі (тобто для кожного фіксованого  $h$  функції  $y \mapsto \delta F(y, h)$  і  $y \mapsto \delta G(y, h)$  неперервні). Нехай  $F$  досягає екстремуму в точці  $y_0$  за умови  $G(y) = C$  і  $y_0$  не є стаціонарною точкою функціонала  $G$  (тобто  $\delta G(y_0)$  не

є тотожно нульовим лінійним функціоналом). Тоді для кожного  $h \in X$ , для якого  $\delta G(y_0, h) = 0$ , має місце рівність:  $\delta F(y_0, h) = 0$ .

**Доведення.** Нехай  $h, h_0 \in X$  задовольняють умови:  $\delta G(y_0, h) = 0$ ;  $\delta G(y_0, h_0) \neq 0$  ( $h_0$  існує, оскільки  $\delta G(y_0) \neq 0$ ).

Розглянемо функції:

$$u(t, s) = F(y_0 + th + sh_0);$$

$$v(t, s) = G(y_0 + th + sh_0).$$

Функції  $u$  та  $v$  визначені в околі точки  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  і мають в цьому околі неперервні часткові похідні. При цьому точка  $(0, 0)$  є точкою умовного екстремуму функції  $u$  (за умови:  $v(t, s) = v(0, 0) = C$ ). Крім того  $\overrightarrow{grad} v(0, 0) \neq \vec{0}$ , оскільки  $\frac{\partial v}{\partial s}(0, 0) = \delta G(y_0, h_0) \neq 0$ . Тепер з класичного методу множників Лагранжа виходить існування числа  $\lambda$ , для якого  $\overrightarrow{grad} u(0, 0) = \lambda \overrightarrow{grad} v(0, 0)$ , зокрема  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = \lambda \frac{\partial v}{\partial t}(0, 0)$ , тобто  $\delta F(y_0, h) = \lambda \delta G(y_0, h) = 0$ . ■

**Лема 2.** Нехай  $\alpha$  і  $\beta$  – лінійні функціонали на лінійному просторі  $X$ ;  $\text{Ker } \alpha \supset \text{Ker } \beta$ . Тоді існує  $\lambda$  таке, що  $\alpha = \lambda \beta$ .

**Доведення.** В разі  $\beta = 0$ :  $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta = X$ ;  $\alpha = 0$ .

Нехай  $\beta \neq 0$ ;  $\beta(h_0) \neq 0$ . Тоді  $\forall h \in X$ :  $h - \frac{\beta(h)}{\beta(h_0)} h_0 \in \text{Ker } \beta$

(перевірте!), а тому:  $\alpha(h - \frac{\beta(h)}{\beta(h_0)}h_0) = 0$ . Звідси для

$$\forall h \in X \text{ маємо: } \alpha(h) = \frac{\alpha(h_0)}{\beta(h_0)}\beta(h). \blacksquare$$

**Теорема 2.** Нехай функціонали  $F$  та  $G$  задовольняють умови леми 1. Тоді існує  $\lambda \in \mathbb{R}$ , для якого  $y_0$  є стаціонарною точкою (екстремаллю) функціонала  $F - \lambda G$ .

**Доведення.** За лемою 1 для кожного  $h \in X$  з умови  $\delta G(y_0, h) = 0$  виходить:  $\delta F(y_0, h) = 0$ , тобто  $\text{Ker } \delta F(y_0) \supset \text{Ker } \delta G(y_0)$ . Тоді за лемою 2, існує  $\lambda \in \mathbb{R}$  таке, що для  $\forall h \in X$  виконується рівність:  $\delta F(y_0, h) = \lambda \delta G(y_0, h)$ . Залишилось зауважити, що  $\delta(F - \lambda G)(y_0) = \delta F(y_0) - \lambda \delta G(y_0)$ .  $\blacksquare$

Одержаний результат може бути узагальнений. Наприклад, якщо замість умови  $G(y) = C$  є скінченний набір умов:  $G_1(y) = C_1$ ;  $G_2(y) = C_2$ ; ... ;  $G_m(y) = C_m$ , то відповідна точка умовного екстремуму виявляється екстремаллю функціонала  $F - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - \dots - \lambda_m G_m$ .

### Приклади.

1. Серед усіх гладких кривих, що з'єднують кінці відрізка  $[-a; a]$  знайти ту, що при фіксованій довжині обмежує найбільшу площу.

**Розв'язання.** Криві задаємо як графіки неперервно диференційовних функцій. Тоді відповідні функціонали  $F$  та  $G$  мають вид:

$$F(y) = \int_{-a}^a y(x) dx; \quad G(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$



Рівняння Ейлера для функціонала  $H = F - \lambda G$  має вид:

$$1 - \frac{d}{dx} \left( \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0.$$

Звідси одержимо:  $\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x - C; \quad y' = \pm \frac{C - x}{\sqrt{\lambda^2 - (C - x)^2}}.$

Інтегрування дає:  $y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (C - x)^2} + C_1$ , тобто  $(y - C_1)^2 + (x - C)^2 = \lambda^2$ . Це приводить до висновку, що шукана крива є дугою кола.

Використання граничних умов:  $y(-a) = y(a) = 0$ ;  $G(y) = l$  дає можливість знайти конкретні значення  $C$ ,  $C_1$ ,  $\lambda$  та провести аналіз існування розв'язку поставленої задачі за умови пошуку кривої як графіка функції. При цьому єдиність розв'язку рівняння Ейлера дозволяє з емпіричних міркувань зробити висновок, що на знайдений кривій досягається умовний максимум. Проведіть це дослідження самостійно. ■

**2. Задача Дідони.** Яким чином слід будувати на площині паркан заданої довжини, щоб охопити їм якомога більшу площу?

**Розв'язання.** З точки зору геометрії паркан – це замкнена крива на площині. Шукаємо розв'язок в класі неперервно диференційовних кривих. Тож нехай межа області  $D$  визначена параметрично:  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $t_1 \leq t \leq t_2$  з неперервно диференційовними функціями  $x(\cdot)$  та  $y(\cdot)$ . Тоді:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt; \quad G(x, y) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Відповідна система рівнянь Ейлера для пошуку екстремалі функціонала  $F - \lambda G$  має вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \dot{y} - \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} y - \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} x - \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Для спрощення розв'язання доцільно вважати, що параметризація вибрана саме такою, що  $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \equiv 1$  (така можливість пояснюється в курсі математичного аналізу). До речі, в цьому разі  $t_2 = t_1 + l$ , де  $l$  – довжина межі і вихідну задачу можна було б поставити в термінах пошуку безумовного екстремуму.

За такої параметризації система (24) перетворюється на таку:  $\begin{cases} \dot{y} + \lambda \ddot{x} = 0 \\ -\dot{x} + \lambda \ddot{y} = 0 \end{cases}$ , звідки:

$$\begin{cases} y + \lambda \dot{x} = C_1 \\ -x + \lambda \dot{y} = C_2 \end{cases}, \quad \text{а тому} \quad \frac{1}{\lambda^2}(y - C_1)^2 + \frac{1}{\lambda^2}(x + C_2)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1;$$

$$(x + C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Таким чином, шукана крива є коло. Допоміжні відомості про довжину кривої та її розташування дозволяють знайти параметри  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\lambda$ . ■

### §11. Умовний екстремум. Задача Лагранжа

Дослідимо інший варіант задачі на умовний екстремум.

Розглянемо функціонал

$$I(\vec{y}) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx. \quad (25)$$

При цьому:

$$y_k(a) = A_k; \quad y_k(b) = B_k \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (26)$$

Умови, що накладаються, аналогічні до умов класичної скінченновимірної теорії:

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (27)$$

Тож розглядаються саме криві  $\vec{y} = \vec{y}(x)$ , що належать поверхні, яка визначена системою рівнянь (27).

Точка відповідного умовного екстремуму – це така функція  $\vec{y}_0(x)$ , що визначена на  $[a; b]$ , задовольняє умови (26), а також (27), тобто на  $[a; b]$  тотожно виконуються умови:  $\varphi_j(x, \vec{y}(x)) \equiv 0$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) та існує окіл  $\vec{y}_0(\cdot)$  в  $C^1[a; b]$  (або в  $C[a; b]$ ) такий, що для всіх функцій з цього окола, що також задовольняють умови (26) - (27), значення

функціонала (25) саме на  $\vec{y}_0(\cdot)$  є найбільшим (або відповідно, найменшим).

Одержимо необхідну ознаку умовного екстремуму в постановці Лагранжа. Покладемо задля спрощення  $n=2$ ;  $m=1$ . Тож

$$I(y, z) = \int_a^b F(x, y, y', z, z') dx. \quad (28)$$

Відповідна умова:

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (29)$$

Нехай

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \quad (30)$$

– шукана екстремаль. Будемо вважати, що в жодній точці екстремалі  $(x, y(x), z(x))$  похідні  $\varphi'_y$  та  $\varphi'_z$  не дорівнюють нулю одночасно.

Фіксуємо  $x_0 \in [a; b]$ . Нехай

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0, y(x_0), z(x_0)) \neq 0. \quad (31)$$

Будемо розглядати криві, що співпадають з екстремаллю (30) ззовні малого окола точки  $(x_0, y(x_0), z(x_0))$  і при цьому належать поверхні  $S$ , що визначена рівнянням (29).

Природна вимога неперервної диференційовності функції  $\varphi$  разом з припущенням (31) дозволяють застосувати в малому околі точки  $(x_0, y(x_0), z(x_0))$  теорему про неявну функцію, у відповідності до якої умова (29) в малому околі точки  $(x_0, y(x_0), z(x_0))$  еквівалентна умові:  $z = \psi(x, y)$  і при цьому

$$\psi'_y = -\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z}. \quad (32)$$

Тому для кривих, що розглядаються (а вони належать поверхні  $S$ ), маємо:

$$\begin{aligned} F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) = \\ = F\left(x, y(x), y'(x), \psi(x, y(x)), \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x)\right). \end{aligned}$$

Це дозволяє перейти до задачі на безумовний екстремум. А саме, запровадимо функцію

$$\Phi(x, y, y') = F(x, y, y', \psi(x, y), \psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y) \cdot y'). \quad (33)$$

За нашим припущенням крива  $\begin{cases} y = y(x) \\ z = \psi(x, y(x)) \end{cases}$  (див. (30)) реалізує екстремум функціонала (28): маленькі зміни функції  $y = y(x)$  приводять до збільшення (або зменшення) значення функціонала (28). Тож крива  $y = y(x)$  реалізує відповідний

(безумовний) екстремум функціонала  $\tilde{I}(y) = \int_a^b \Phi(x, y, y') dx$

. Тому  $y = y(x)$  повинна задовольняти рівняння Ейлера

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0. \quad (34)$$

З (33) маємо:  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \psi'_x + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot (\psi''_{xy} + \psi''_{y^2} \cdot y')$ ;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \psi'_y; \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \cdot \psi'_y + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \frac{d}{dx} \psi'_y.$$

Підставимо знайдені вирази в (34) :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right) \cdot \psi'_y + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \left( \psi''_{xy} + \psi''_{y^2} \cdot y' - \frac{d}{dx} \psi'_y \right) = 0.$$

Але  $\frac{d}{dx} \psi'_y = \psi''_{xy} + \psi''_{y^2} \cdot y'$  і (з урахуванням (32))

рівняння (34) приймає вид:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}}{\phi'_y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'}}{\phi'_z}. \quad (35)$$

Обидві частини останньої рівності - це функції аргумента  $x$ . Позначимо їх спільне значення через  $\lambda(x)$ . Тоді (35) може бути переписано у вигляді системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda(x) \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} - \lambda(x) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Таким чином в деякому околі кожної точки  $x_0 \in [a; b]$  визначено функцію  $\lambda(\cdot)$ . Ця функція визначена єдиним чином, а тому на перетині околів відповідні функції співпадають. Ці міркування приводять до функції  $\lambda(\cdot)$ , що визначена на всьому відрізку  $[a; b]$ .

**Зауваження.** Проведене дослідження ґрунтується на рівності (35), яку слід тлумачити в узагальненому сенсі: рівність  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  розуміємо як рівність  $ad = bc$ ; тож вона має сенс і тоді, коли один з двох знаменників дорівнює нулю.

Система (36) – це в точності система рівнянь Ейлера для допоміжного функціонала

$$I_1(y, z) = \int_a^b F_1(x, y, z, y', z') dx, \text{ де}$$

$$F_1(x, y, z, y', z') = F(x, y, y', z, z') - \lambda(x) \varphi(x, y, z).$$

В загальному випадку (довільні  $n$  та  $m$ ) приходимо до висновку: необхідна ознака того, що функція  $\vec{y} = \vec{y}(x)$  реалізує умовний екстремум полягає в тому, що ця функція є екстремаллю функціонала

$$I_1(\vec{y}) = \int_a^b \left( F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) - \sum_{k=1}^m \lambda_k(x) \varphi_k(x, \vec{y}) \right) dx.$$

**Приклад.** Крива найменшої довжини, що з'єднує точки  $\vec{P}$  та  $\vec{Q}$  на поверхні  $S$ , називається геодезичною. Знайти геодезичні на сфері в  $\mathbb{R}^3$ .

**Розв'язання.** Нехай  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$ ;  $a \leq t \leq b$  – параметризація кривих на сфері  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  (тут  $\vec{x}(a) = \vec{P}$ ;  $\vec{x}(b) = \vec{Q}$ ).

Довжина кривої дорівнює  $I(x, y, z) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ .

Отже, для пошуку геодезичних слід знайти екстремалі функціонала

$$I_1(x, y, z) = \int_a^b \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \lambda(t) (x^2 + y^2 + z^2 - R^2) \right) dt.$$

Відповідна система рівнянь Ейлера має вид:

$$\begin{cases} -2\lambda(t) \cdot x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ -2\lambda(t) \cdot y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ -2\lambda(t) \cdot z - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Якщо на кривій вибрати натуральну параметризацію (значення параметра  $s$  – це довжина ділянки кривої від її початку  $\vec{P}$  до відповідної точки  $\vec{x}(s)$ ), то  $x' = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot t'_s = \dot{x} \cdot t'_s$ ;  $y' = \dot{y} \cdot t'_s$ ;  $z' = \dot{z} \cdot t'_s$  (тут  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  – похідні відносно параметра  $s$ ).

Узгодженість напрямків параметризації гарантує:  $t'_s > 0$  при кожному  $s$ . Оскільки для натуральної параметризації:

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \equiv 1, \quad \text{то}$$

$$x' = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \quad \text{Аналогічні}$$

співвідношення мають місце для  $y'$  та  $z'$ . Тому система (37) після множення на  $t'_s$  перетворюється на таку:

$$\begin{cases} -2\lambda(s) \cdot x \cdot t'_s - x''(s) = 0 \\ -2\lambda(s) \cdot y \cdot t'_s - y''(s) = 0 \\ -2\lambda(s) \cdot z \cdot t'_s - z''(s) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Тут  $\lambda(s) = \lambda(t(s))$ . Слід зауважити, що в запису функціонала  $I$  не можна було використовувати натуральний параметр, оскільки це б не дозволило фіксувати відрізок  $[a; b]$  (обміркуйте!).



Повторним диференціюванням умова належності кривої до сфери  $S$  приводить спочатку до рівності:  $xx' + yy' + zz' = 0$ , а потім:  $xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$ , звідки:  $xx'' + yy'' + zz'' = -1$  (чому?).

Якщо тепер в системі (38) помножити перше рівняння на  $x$ , друге на  $y$ , третє на  $z$  і скласти, то отримаємо:  $-2\lambda(s)(x^2 + y^2 + z^2) \cdot t'_s - (xx'' + yy'' + zz'') = 0$ , звідки:  $2\lambda(s) \cdot t'_s \equiv +\frac{1}{R^2}$ . Тож система (38) приймає вид:

$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{R^2}x = 0 \\ y'' + \frac{1}{R^2}y = 0 \\ z'' + \frac{1}{R^2}z = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Розв'язок системи (39) має вид:

$$x = a_1 \cos \frac{s}{R} + a_2 \sin \frac{s}{R}; \quad y = b_1 \cos \frac{s}{R} + b_2 \sin \frac{s}{R};$$

$$z = c_1 \cos \frac{s}{R} + c_2 \sin \frac{s}{R}. \quad \text{У векторному запису:}$$

$$\vec{x}(s) = \cos \frac{s}{R} \cdot \vec{a}_1 + \sin \frac{s}{R} \cdot \vec{a}_2, \quad \text{де} \quad \vec{a}_m = a_m \vec{i} + b_m \vec{j} + c_m \vec{k}. \quad \text{Тому}$$

геодезична лежить в площині, що породжена векторами  $\vec{a}_1$  та  $\vec{a}_2$  (вона проходить через центр кулі) і співпадає з дугою великого кола на сфері  $S$ . ■

## §12. Випадок двічі диференційовних функціоналів

В лінійній алгебрі вже розглядалися білінійні функціонали. Їх означення в ніякому разі не спирається на умову скінченновимірності лінійного простору  $X$ . Для білінійного функціонала  $K(x, y)$ , що визначений на просторі  $X$ , функція  $K(x, x)$  аргументу  $x$  називається квадратичним функціоналом. Квадратичний функціонал називається додатно визначеним, якщо для кожного  $x \neq 0$  має місце нерівність  $K(x, x) > 0$  та невід'ємно визначеним в разі більш слабкої умови:  $K(x, x) \geq 0$  для всіх  $x \in X$ .

**Приклади.** 1)  $K(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$  є білінійним функціоналом на  $X = C[a; b]$ . Відповідний квадратичний функціонал  $K(x, x) = \int_a^b x^2(t)dt$  є додатно визначеним (перевірте!).

2)  $\int_a^b (A(t)x(t)y(t) + B_1(t)x(t)y'(t) + B_2(t)x'(t)y(t) + C(t)x'(t)y'(t))dt =$   
 $= K(x, y)$  – білінійний функціонал на  $X = C^1[a; b]$ .  
 Відповідний квадратичний функціонал (тут  $B(t) = B_1(t) + B_2(t)$ ):

$$K(x, x) = \int_a^b (A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)(x'(t))^2)dt.$$

Нехай тепер  $I$  – довільний функціонал на нормованому просторі  $X$ .

**Означення.**  $I$  має в точці  $y$  (або „на кривій  $y$ ”) другу варіацію, якщо він має першу варіацію  $\delta I(y, h)$  та його приріст  $I(y+h) - I(y)$  може бути представлено як сума трьох доданків:

$$I(y+h) - I(y) = l_1(h) + l_2(h) + \beta(h) \cdot \|h\|^2, \quad (40)$$

де  $l_1(\cdot)$  - лінійний;  $l_2(\cdot)$  - квадратичний функціонали, а  $\beta(h) \rightarrow 0$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ . При цьому  $l_2(h)$  позначається через  $\delta^2 I(h)$  або, точніше,  $\delta^2 I(y, h)$  і називається „другою варіацією функціонала  $I$ ”.

**Вправи.**

- 1) Доведіть, що в рівності (40):  $l_1(h) = \delta I(y, h)$ .
- 2) Доведіть, що друга варіація єдина (в разі, якщо вона існує).

**Твердження 2** (необхідна умова екстремуму).  
Нехай  $I(y)$  має мінімум при  $y = y_0$  і існує друга варіація  $\delta^2 I(y_0, h)$ . Тоді  $\delta^2 I(y_0) \geq 0$ .

**Доведення.**  $\delta I(y_0) = 0$  (див. твердження 1). Тому приріст дорівнює:

$$\Delta I(y_0, h) = I(y_0 + h) - I(y_0) = \delta^2 I(y_0, h) + \beta(h) \cdot \|h\|^2.$$

Припустимо існування такого  $h_0$ , що  $\delta^2 I(y_0, h_0) < 0$ . Тоді для  $\forall \varepsilon \neq 0$ :  $\delta^2 I(\varepsilon h_0) = \varepsilon^2 \delta^2 I(h_0) < 0$ . Оскільки  $\beta(\varepsilon h_0) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то існує таке  $\delta > 0$ , що для

$$\text{всіх } \varepsilon \in (0; \delta): \quad |\beta(\varepsilon h_0)| < \frac{|(\delta^2 I)(h_0)|}{\|h_0\|^2}. \quad \text{Тому}$$

$\delta^2 I(\varepsilon h_0) + \beta(\varepsilon h_0) \|\varepsilon h_0\|^2 < 0$  і в кожному околі  $y_0$  існує

вектор  $y_0 + \varepsilon h_0$ , для якого:  $I(y_0 + \varepsilon h_0) - I(y_0) < 0$ .  
Суперечність. ■

На відміну від скінченновимірної теорії умова  $\delta^2 I(y_0, h) > 0$  разом з умовою  $\delta I(y_0, h) = 0$  не є достатніми умовами мінімуму. Мінімум досягається за умови „посиленої додатності”:  $\exists k > 0$  таке, що  $\forall h \in X : \delta^2 I(y_0, h) \geq k \|h\|^2$  (обміркуйте!)

### §13. Необхідна умова екстремуму основного варіаційного функціонала

Нехай  $F$  є функцією класу  $C^2$  і розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення: досліджується основний варіаційний функціонал (1) із закріпленими кінцями: виконуються умови (7). Дослідимо приріст  $I(y+h) - I(y)$  функціонала  $I$ . За формулою Тейлора маємо:

$$\begin{aligned} F(x, y+h, y'+h') - F(x, y, y') &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \cdot h' + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y + \vartheta \cdot h, y' + \vartheta \cdot h') \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y + \vartheta \cdot h, y' + \vartheta \cdot h') \cdot h h' + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y + \vartheta \cdot h, y' + \vartheta \cdot h') \cdot h'^2 \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Тут  $0 < \vartheta < 1$ ;  $\vartheta = \vartheta(x, h, h')$ .

З неперервності других часткових похідних функції  $F$  маємо рівності:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y + \mathcal{G} \cdot h, y' + \mathcal{G} \cdot h') &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, y') + \alpha_1(x, h, h'), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y + \mathcal{G} \cdot h, y' + \mathcal{G} \cdot h') &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y, y') + \alpha_2(x, h, h'), \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y + \mathcal{G} \cdot h, y' + \mathcal{G} \cdot h') &= \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y') + \alpha_3(x, h, h'),
\end{aligned} \tag{42}$$

де  $\alpha_k(x, h, h') \rightarrow 0$  за умови:  $\|h\|_1 \rightarrow 0$  ( $k=1,2,3$ ).

Посилання на рівномірну неперервність других часткових похідних функції  $F$  у відповідній обмеженій області простору  $\square^3$  дозволяє зробити висновок про те, що вказана збіжність  $\alpha_k(x, h, h') \rightarrow 0$  є рівномірною відносно  $x$ , а тому

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left( \alpha_1(x, h(x), h'(x)) \cdot h^2(x) + 2\alpha_2(x, h(x), h'(x)) \cdot h(x)h'(x) + \right. \\
&\left. + \alpha_3(x, h(x), h'(x)) \cdot (h'(x))^2 \right) dx
\end{aligned} \tag{43}$$

є  $o(\|h\|_1^2)$  (обміркуйте!). Тепер з (41) - (43) маємо:

$$\begin{aligned}
I(y+h) - I(y) &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \cdot h' + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y, y') \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y, y') \cdot hh' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y') \cdot h'^2 \right) \Bigg) dx + \\
&+ o(\|h\|_1^2).
\end{aligned}$$

Тому функціонал  $I$  має другу варіацію і при цьому

$$\delta^2 I(y, h) = \frac{1}{2} \int_a^b (F''_{yy} h^2 + 2F''_{yy'} hh' + F''_{y'^2} h'^2) dx. \tag{44}$$

Однак: 
$$\int_a^b 2F''_{yy'} hh' dx = - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} F''_{yy'} \right) h^2 dx \quad (\text{нагадаємо:}$$

$h(a)=h(b)=0)$  і тому (44) переписуємо у вигляді:

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b (Qh^2 + P(h')^2) dx, \quad (45)$$

де  $Q = Q(x) = \frac{1}{2} \left( F''_{y^2}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F''_{yy'}(x, y(x), y'(x)) \right);$

$$P = P(x) = \frac{1}{2} F''_{y'^2}(x, y(x), y'(x)).$$

Слід зауважити, що останні перетворення вимагають підвищену гладкість функції  $F$  ( $F \in C^3$ ), а також функції  $y$  ( $y \in C^2$ ).

**Твердження 3.** Умова  $P(x) \geq 0$  (скрізь на  $[a; b]$ ) є необхідною для того, щоб квадратичний функціонал (45) приймав невід'ємні значення на всіх функціях  $h \in C^1[a; b]$ , для яких  $h(a) = h(b) = 0$ .

**Доведення.** Нехай існує точка  $x_0 \in (a; b)$ , для якої  $P(x_0) < 0$ . Припустимо спочатку існування послідовності функцій  $h_n$  і нескінченно малої додатної числової послідовності  $\varepsilon_n$ , таких що виконуються умови:

$$h_n(x) = 0 \quad \text{ззовні} \quad (x_0 - \varepsilon_n; x_0 + \varepsilon_n);$$

$$\int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} (h'_n)^2 dx \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\exists C > 0: \forall n: \int_{x_0 - \varepsilon_n}^{x_0 + \varepsilon_n} h_n^2 dx \leq C.$$

Існування такої послідовності функцій приводить до суперечності, оскільки числова послідовність  $\int_a^b Q(x)h_n^2(x)dx$  буде обмеженою, а послідовність  $\int_a^b P(x)(h'_n(x))^2 dx$  виявляється від'ємною, нескінченно великою (обміркуйте!).

Послідовність  $h_n$  будуюмо за такою схемою:

$$h'_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad |x - x_0| \geq \frac{1}{n}; \quad h'_n(x) = 2n^2(x + \frac{1}{n}) \quad \text{для}$$

$$x \in [x_0 - \frac{1}{n}; x_0 - \frac{1}{2n}]; \quad h'_n(x) = -2n^2x \quad \text{для} \quad x \in [x_0 - \frac{1}{2n}; x_0 + \frac{1}{2n}];$$

$$h'_n(x) = 2n^2(x - \frac{1}{n}) \quad \text{для} \quad x \in [x_0 + \frac{1}{2n}; x_0 + \frac{1}{n}]. \quad \text{Додаткова умова}$$

$$h_n(x) = 0 \quad \text{зовні} \quad (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}) \quad \text{коректно визначає} \quad h_n(\cdot)$$

(перевірте!). При цьому для  $\forall n; \forall x: 0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{2}$ . Для цієї послідовності (при достатньо великих  $n$ )

$$\text{маємо:} \quad \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} (h'_n)^2 dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2n}} 4n^4 x^2 dx = \frac{2n}{3}; \quad \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} h_n^2 dx \leq \frac{1}{2n}$$

(перевірте!). ■

Наслідком тверджень 2 та 3 є наступний результат (за умов, що наведені вище).

**Теорема 3.** (А.Лежандр) Необхідною умовою мінімуму основного варіаційного функціонала на

кривій  $y=y(x)$  є умова:  $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y(x), y'(x)) \geq 0$  скрізь на цій кривій. ■

#### §14. Дослідження квадратичних функціоналів

Численні приклади призвели А.Лежандра до думки, що умова

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad (46)$$

є достатньою для того, щоб на екстремалі  $y(x)$  варіаційний функціонал  $I(y)$  досягав слабкого мінімуму. Згодом виявилось, що однієї лише умови (46) не достатньо. Додаткова умова (яка виявилась принциповою) була запропонована К.Якобі.

Розглянемо спочатку квадратичний функціонал

$$I(h) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx, \quad (47)$$

визначений на просторі неперервно диференційовних на відрізку  $[a;b]$  функцій  $h$ , для яких  $h(a)=h(b)=0$ . Тут  $P(\cdot)$ ,  $Q(\cdot)$  – фіксовані неперервні функції на відрізку  $[a;b]$  (точніше:  $P(\cdot)$  – неперервно диференційовна).

Рівняння Ейлера для функціонала (47) має вид:

$$Q \cdot h - \frac{d}{dx}(P \cdot h') = 0. \quad (48)$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння 2<sup>го</sup> порядку.

**Означення.** Точка  $\tilde{x} \in (a;b]$  називається спряженою до точки  $a$  (по відношенню до функціонала (47)), якщо рівняння (48) має розв'язок, що не є тотожно



нульовим, для якого  $h(a)=h(\tilde{x})=0$  (Із загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь робимо висновок, що для цього розв'язку  $h'(a) \neq 0$ . Обміркуйте!).

**Теорема 4.** Нехай  $P(x) > 0$  на  $[a; b]$  і на проміжку  $(a; b]$  нема точок, спряжених до  $a$ . Тоді квадратичний функціонал (47) додатно визначений для всіх не тотожно нульових  $h \in C^1[a; b]$ , для яких  $h(a)=h(b)=0$ .

**Доведення.** Достатньо довести, що функціонал (47) може бути зведений до виду:

$$I(h) = \int_a^b P(x) g^2(h(x), \dots) dx, \quad \text{в якому } g(h(x), \dots) \neq 0 \quad \text{для}$$

$h_k(x) \neq 0$  (обміркуйте!). З цією метою перепишемо функціонал (47) у вигляді:

$$I(h) = \int_a^b \left( Ph'^2 + Qh^2 + \frac{d}{dx}(w(x)h^2(x)) \right) dx \quad (49)$$

(це можливо, оскільки  $h(a)=h(b)=0$ ). Підінтегральна функція у виразі (49) має вид:

$$Ph'^2 + Qh^2 + \frac{d}{dx}(wh^2) = (Q + w')h^2 + 2whh' + Ph'^2 \quad (50)$$

Припустимо, що  $w$  задовольняє рівняння:

$$P(Q + w') = w^2. \quad (51)$$

Тоді вираз (50) приймає вид:  $P\left(\frac{w}{P}h + h'\right)^2$ , а тому

$$I(h) = \int_a^b P\left(\frac{w}{P}h + h'\right)^2 dx. \quad (52)$$

За цих умов  $I(h)$  приймає лише невід'ємні значення і залишилось довести, що нульове значення функціонал  $I(h)$  приймає лише на тотожно нульовій функції  $h$ . Дійсно, якщо  $I(h)=0$ , то  $h(x)$  – це екстремаль функціонала (47), а тому задовольняє рівняння (48). Разом з тим з (52) виходить, що  $\frac{w}{P}h+h'\equiv 0$ , оскільки  $P(x)>0$  на  $[a;b]$ . Тепер умова  $h(a)=0$  приводить до рівності  $h'(a)=0$ , а єдиним розв'язком рівняння (48), що задовольняє такі початкові умови, може бути лише тотожно нульова функція  $h(x)$ .

Тож залишилось лише довести існування розв'язку рівняння Ріккаті (51). Покладемо  $w'=-\frac{u'}{u}P$  (за природним припущенням:  $u(x)\neq 0$  для  $\forall x\in[a;b]$ ). Тоді  $w'=-\frac{u''u-u'^2}{u^2}P-\frac{u'}{u}P'$ . Підстановка в рівняння (51) дає:  $P\left(Q+\frac{u'^2}{u^2}P-\frac{u''}{u}P-\frac{u'}{u}P'\right)=\frac{u'^2}{u^2}P^2$  і, остаточно:

$$Qu-\frac{d}{dx}(Pu')=0. \quad (53)$$

Знову прийшли до рівняння (48) і залишилось лише з'ясувати, що рівняння (53) має розв'язок, що не дорівнює нулю в жодній точці відрізка  $[a;b]$ .

Умова відсутності у рівняння (48) спряжених до  $a$  точок на проміжку  $(a;b]$  гарантує існування такого розв'язку рівняння (53), для якого  $u(a)=0$ , але для  $\forall x\in[a;b]$ :  $u(x)\neq 0$ . Тепер теорема про

неперервну залежність розв'язку рівняння від початкової умови приводить до висновку про існування малого  $\varepsilon > 0$ , для якого відрізок  $[a; b]$  не містить точок, спряжених до  $a - \varepsilon$  (обміркуйте це твердження!). А це власне і означає, що існує розв'язок рівняння (53), що не дорівнює нулю в жодній точці  $[a; b]$ . ■

Можна довести, що відсутність спряжених до  $a$  точок на проміжку  $(a; b]$  є і необхідною умовою для строгої додатності функціонала  $I(h)$ .

### §15. Достатня ознака слабкого екстремуму

Нехай  $y = y(x)$  є екстремаллю основного варіаційного функціонала (1) і

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b (Q(x)h^2 + P(x)h'^2) dx \quad - \quad \text{відповідний}$$

квадратичний функціонал другої варіації на екстремалі  $y(x)$  (див. §12). Рівняння Ейлера (48) для квадратичного функціонала  $\delta^2 I(y, h)$  називається рівнянням Якобі для вихідного функціонала  $I(y)$ , а точка  $\tilde{x}$ , спряжена з точкою  $x = a$  по відношенню до функціонала  $\delta^2 I(y, h)$  називається також спряженою з  $x = a$  по відношенню до вихідного функціонала  $I(y)$ .

**Теорема 5.** Розглянемо основний варіаційний функціонал

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

з функцією  $F$  класу  $C^3$  і поставимо для нього задачу із закріпленими кінцями:  $y(a) = A; y(b) = B$ .

Нехай виконуються наступні умови:

- 1)  $y = y(x)$  – екстремаль функціонала (1);
- 2) на  $[a; b]$  виконується нерівність

$$P(x) = \frac{1}{2} F''_{y'^2}(x, y(x), y'(x)) > 0 \quad (54)$$

(умова Лежандра);

- 3) проміжок  $(a; b]$  не містить точок, спряжених до точки  $a$  (умова Якобі).

Тоді крива  $y = y(x)$  реалізує слабкий мінімум функціонала (1).

**Зауваження.** Можна довести, що умова Лежандра (54) гарантує, що екстремаль  $y(x)$  функціонала (1) є функцією класу  $C^2$  на  $[a; b]$  ([4], теорема 2, §1.4). Тому за умов теореми відповідна функція  $P(x)$  є функцією класу  $C^1$ .

**Доведення теореми.** Неперервність функції  $P(\cdot)$  на  $[a; b]$  та нерівність (54) дозволяють зробити висновок про існування числа  $\gamma > 0$ , для якого  $P(x) - \gamma > 0$  на всьому  $[a; b]$ .

Розглянемо допоміжний квадратичний функціонал

$$\int_a^b ((P(x) - \gamma) h'^2 + Q(x) h^2) dx \quad (55)$$

та доведемо, що він є додатно визначеним.

На підставі теореми 4 для цього достатньо лише перевірити, що на проміжку  $(a; b]$  нема спряжених

точок по відношенню до функціонала (55), тобто для рівняння

$$Q \cdot h - \frac{d}{dx}((P - \gamma)h') = 0 \quad (56)$$

будь-який ненульовий розв'язок, для якого  $h(a) = 0$ , не має жодного нуля на проміжку  $(a; b]$ .

Рівняння Якобі (48) має таку властивість. Щодо рівняння (56), то воно відрізняється від (48) лише коефіцієнтом при  $h''$ . Можна сподіватись, що при малому збуренні коефіцієнта ця властивість буде збережена.

Цей факт є наслідком леми 3, наведеної нижче (бажано було б цей факт ретельно обміркувати).

Таким чином, існує таке  $\gamma > 0$ , для якого при всіх  $h \neq 0$  виконується нерівність:

$$\int_a^b ((P - \gamma)h'^2 + Qh^2) dx > 0,$$

а тому

$$\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx > \gamma \int_a^b h'^2 dx. \quad (57)$$

Оскільки  $y(x)$  є екстремаль функціонала (1), то відповідний приріст функціонала має вид:

$$I(y + h) - I(y) = \int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx + o(\|h\|_1^2). \quad (58)$$

Як було доведено в §12, другий доданок має вид (43), в якому  $\alpha_k(x, h, h') \rightarrow 0$  при  $\|h\|_1 \rightarrow 0$  рівномірно відносно  $x$ .

Нерівність  $|hh'| \leq \frac{1}{2}(h^2 + h'^2)$  дозволяє зробити оцінку:

$$\left| o(\|h\|_1^2) \right| \leq \int_a^b (\beta_1(x, h, h')h^2 + \beta_2(x, h, h')h'^2) dx \quad (59)$$

(тут  $\beta_1 = |\alpha_1| + |\alpha_2|$ ;  $\beta_2 = |\alpha_2| + |\alpha_3|$ ), а рівномірна відносно  $x$  збіжність:  $\beta_k(x, h, h') \rightarrow 0$  при  $\|h\|_1 \rightarrow 0$  приводить до оцінки  $\beta_k(x, h, h') \leq \delta_k(\|h\|_1)$ , де  $\delta_k(\|h\|_1) \rightarrow 0$  при  $\|h\|_1 \rightarrow 0$  (обміркуйте).

Тепер з (59) одержимо оцінку:

$$\left| o(\|h\|_1^2) \right| \leq \delta_1(\|h\|_1) \int_a^b h^2 dx + \delta_2(\|h\|_1) \int_a^b h'^2 dx.$$

За нерівністю Коші-Буняковського:

$$h^2(x) = \left( \int_a^x h'(t) dt \right)^2 \leq (x-a) \int_a^x h'^2 dx \leq (x-a) \int_a^b h'^2 dx;$$

$$\int_a^b h^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b h'^2 dx.$$

Тож маємо:

$$o(\|h\|_1^2) \leq \left( \delta_1(\|h\|_1) \frac{(b-a)^2}{2} + \delta_2(\|h\|_1) \right) \int_a^b h'^2 dx. \quad (60)$$

Тепер з (60) при достатньо малих  $\|h\|_1$  маємо:

$$o(\|h\|_1^2) \leq \gamma \int_a^b h'^2 dx, \text{ а оскільки } \int_a^b h'^2 dx > 0 \text{ для } h \neq 0, \text{ то з}$$

посиланням на (57), (58), одержимо бажаний висновок:  $\exists \varepsilon > 0$  таке, що

$$(0 < \|h\|_1 < \varepsilon) \Rightarrow (I(y+h) - I(y) > 0). \blacksquare$$

**Приклад.** Дослідити функціонал  $I(y) = \int_1^2 y'(1+x^2 y') dx$

на слабкий екстремум за умов  $y(1)=3; y(2)=5$ .

**Розв'язання.** Рівняння Ейлера приймає в даному випадку вид:  $\frac{\partial F}{\partial y'} = C$ . Звідси:  $y = -\frac{C}{x} + C_1$  і, з

урахуванням граничних умов:  $y = -\frac{4}{x} + 7$ .

Досліджуємо знайдену екстремаль на слабкий екстремум.

$P(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = x^2 > 0$  (на відрізку  $[1;2]$ ). Тож умова Лежандра слабкого мінімуму виконується.

При цьому  $Q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) = 0$  і рівняння Якобі  $\left( Qh - \frac{d}{dx} (Ph') = 0 \right)$  приймає вид:  $\frac{d}{dx} (x^2 h') = 0$ . Звідси:

$$h(x) = -\frac{C}{x} + C_1.$$

Якщо  $h(1)=0$ , то  $C=C_1$  і  $h(x) = C \left( 1 - \frac{1}{x} \right)$ . Звідси бачимо, що цей розв'язок при  $x>1$  не дорівнює 0 (виконується умова Якобі відсутності спряжених точок на  $(1;2]$ ).

Тому на екстремалі  $y = -\frac{4}{x} + 7$  функціонал  $J(y)$  досягає слабкого мінімуму. ■

**Лема 3** (неперервна залежність розв'язку системи диференціальних рівнянь від параметра).

Нехай вектор-функція  $\vec{f}(t, \vec{x}, \gamma)$  є неперервно диференційовною функцією (за сукупністю аргументів) в області  $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ;  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0, \gamma)$  – розв’язок системи

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}, \gamma) \quad (61)$$

з початковою умовою  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  (тобто  $\vec{\varphi}(t_0, \vec{x}_0, \gamma) = \vec{x}_0$ ).

Нехай для  $\gamma = \gamma_0$  розв’язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0)$  визначено на відрізку  $\Delta = [t_1; t_2]$ . Тоді: 1) існує  $\alpha > 0$  таке, що для всіх  $\gamma$ , що задовольняють нерівність  $|\gamma - \gamma_0| < \alpha$ , відповідний розв’язок  $\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0, \gamma)$  також визначено на  $\Delta$ ; 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  таке, що

$$(|\gamma - \gamma_0| < \delta) \Rightarrow (\forall t \in \Delta: \|\vec{\varphi}(t, \vec{x}_0, \gamma) - \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0)\| < \varepsilon).$$

**Доведення.** Лема є безпосереднім наслідком теореми 2 з §4.9 (про неперервну залежність розв’язку системи диференціальних рівнянь від початкової умови).

Слід додати до системи (61) рівняння  $\frac{dp}{dt} = 0$  і інтерпретувати одержану систему як таку:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{y}), \quad (62)$$

в якій  $\vec{y} = \langle \vec{x}, p \rangle$ ;  $\vec{F}(t, \vec{x}, p) = \langle \vec{f}(t, \vec{x}, p), p \rangle$ . Якщо через  $\vec{\psi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0)$  позначити розв’язок цієї системи з початковою умовою  $\vec{\psi}(t_0, \vec{x}_0, \gamma_0) = \langle \vec{x}_0, \gamma_0 \rangle$ , то  $\vec{\psi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0) = \langle \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0), \gamma_0 \rangle$  і, оскільки з нерівності



$|\gamma - \gamma_0| < \delta$  виходить нерівність  $\|\langle \vec{x}_0, \gamma \rangle - \langle \vec{x}_0, \gamma_0 \rangle\| < \delta$ , то застосування теореми 2 з §4.9 приводить до наступних тверджень:

1)  $\exists \alpha > 0$ :  $(|\gamma - \gamma_0| < \delta) \Rightarrow$  (розв'язок  $\vec{\psi}(t, \vec{x}_0, \gamma)$  визначено на тому ж відрізку  $\Delta$ , що й  $\vec{\psi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0)$ ;

2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$   
 $(|\gamma - \gamma_0| < \delta) \Rightarrow (\forall t \in \Delta: \|\vec{\psi}(t, \vec{x}_0, \gamma) - \vec{\psi}(t, \vec{x}_0, \gamma_0)\| < \varepsilon)$ , звідси й виходить шуканий результат. ■

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
3. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
4. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 468 с.
6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Физматгиз, 1965. – 332 с.
7. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: изд-во МГУ, 1998. – 480 с.
9. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
10. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ "РХД", 2000. – 176 с.
11. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: УРСС, 2002. – 176 с.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Брахістохрона 163, 172

Варіація функціонала 166

– – друга 194

Вронскіан 41

Вузол 117

– вироджений 122

– дикритичний 121

– нестійкий 117

– стійкий 117

Геодезична 190

Дужка Пуассона 180

Еквівалентність норм 48, 49

Експонента матриці 53

Екстремаль функціоналу 168

Екстремум сильний 167

– слабкий 167

– умовний 181

Задача Дідони 185

– ізопериметрична 164, 181

– Коші 11, 16, 31, 110

– крайова 82

– – на власні числа 89

– – неоднорідна 83

– – однорідна 83, 84

– Лагранжа 186

– Штурма-Ліувілля 89

Закон збереження енергії 126

Інтеграл диференціального рівняння 10

– перший 99

Квазіполіном 70, 74  
 Коефіцієнт лінійного диференціального рівняння 31  
 Коливання маятника малі 125  
 — — — з тертям 125  
 Крива інтегральна 10  
 — фазова 97, 114  
 Критерій Рауса-Гурвіца 153  
  
 Лагранжіан 181  
 Лема Ляпунова 148  
 — основна варіаційного числення 171  
 — Четаєва 157  
 Лінії геодезичні 164, 190  
  
 Матриця еволюційна 66, 67  
 — Коші 67  
 — системи фундаментальна 37  
 Метод варіації 66, 69  
 — невизначених коефіцієнтів 70, 74  
 — параметризації 20  
 Многочлен характеристичний 62  
  
 Нерезонансний випадок 71, 74  
 Нерівність Гронуолла 137  
 Нестійкість за першим наближенням 159  
 Норма 48  
  
 Обвідна 24, 27, 28  
 Оператор лінійний диференціальний 40  
  
 Перетворення Лежандра 179  
 Площина фазова 116  
 Поверхня інтегральна 103  
 Портрет фазовий 117  
 Принцип найменшої дії Гамільтона 181  
 Продовження розв'язку 17  
 Простір нормований 48  
 — фазовий 96, 98  
 — — розширений 96

Резонансний випадок 72, 75

Рівняння автономне 97

– Бесселя 93

– диференціальне першого порядку 10

– – – – нерозв'язне відносно першої похідної 20

– – – – розв'язне відносно першої похідної 10

– – – – з частковими похідними 103

– Ейлера 171

– Ейлера-Пуассона 178

– Клеро 23

– Лагранжа 24

– лінійне диференціальне неоднорідне 69, 70

– – – однорідне 40, 62

– Ріккати 79, 201

– Якобі 202

Розв'язок диференціального рівняння 10

– неперодовжуваний 17

– особливий 24, 26

– частковий 66

Ряд степеневий узагальнений 92

Самоспряжений вид рівняння 80

Система автономна (динамічна) 96

– канонічних рівнянь Гамільтона 102

– консервативна з одним ступенем вільності 126

– лінійних диференціальних рівнянь 30

– – – – неоднорідна 30, 65

– – – – однорідна 30, 33

– перших інтегралів повна 102, 138

– рівнянь Ейлера-Лагранжа 177

– розв'язків фундаментальна 37, 43

– характеристик 104, 109

Сідло 118

Стан рівноваги 114

Стійкість за Ляпуновим 143, 152

– – першим наближенням 154

– розв'язку рівняння асимптотична 151

– – системи асимптотична 143

Теорема Гробмана-Хартмана 123

- Лежандра 198
- Ляпунова про нестійкість за першим наближенням 159
- – – стійкість за першим наближенням 154
- Пікара 11, 16
- порівняння 81
- Штурма 82

Теорія Пуанкаре-Бендіксона 129

Точка неєдиності (розгалуження) 24

- особлива динамічної системи 102, 114
- рівноваги динамічної системи 102, 114

Трасекторія 97

Умова Лежандра 203

- Якобі 199, 203

Фокус 120

Форма завдання системи диференціальних рівнянь симетрична 99

Формула Гріна 80

- Ліувілля-Якобі 38
- Остроградського-Ліувілля 43, 44

Функціонал 163, 165

- варіаційного числення основний 165
- квадратичний 193

Функція Бесселя 94, 95

- Гамільтона 179
- Лагранжа 181

Характеристика рівняння 104, 108

Центр 120

Цикл 116

- граничний 129