ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

УДК 517.98+515.164.17

Ю.В. Богданський

БЕЗДИВЕРГЕНТНИЙ ВАРІАНТ ФОРМУЛИ ГАУССА–ОСТРОГРАДСЬКОГО НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ МНОГОВИДАХ

Вступ

У працях [1–4] запропоновано узагальнення формули Гаусса–Остроградського в нескінченновимірному гільбертовому просторі та в окремих ситуаціях у банаховому просторі. При цьому замість міри об'єму розглядається довільна борелівська, неінваріантна відносно зсувів міра. У працях [5, 6] розглянуто різні версії формули Гаусса–Остроградського на просторі конфігурацій, а в [7] на поверхні скінченної корозмірності в гільбертовому просторі одержано узагальнення формули Пуанкаре–Стокса.

Постановка задачі

Згідно з класичною формулою Гаусса–Остроградського, у просторі $\mathbf{R}^n$ виконується рівність

$$\int_{\mathrm{M}} \mathrm{div} X \, d\mu = \int_{\partial \mathrm{M}} (X, n) \, d\mu_{\partial} \,, \qquad (1)$$

де M – область в $\mathbf{R}^n$ з гладкою межею $\partial \mathrm{M}$; n – поле зовнішньої одиничної нормалі до $\partial \mathrm{M}$; X – гладке векторне поле; μ – міра об'єму в $\mathbf{R}^n$; μ_{∂} – індукована мірою μ міра об'єму на $\partial \mathrm{M}$.

У даній статті пропонується варіант узагальнення формули (1) на (нескінченновимірний) банахів многовид, зокрема на ріманів многовид, модельним простором до якого є гільбертів простір H.

Нехай S – банахів диференційовний многовид з модельним банаховим простором E (хаусдорфів; над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$) [8, 9]; μ – борелівська міра на S; M – відкритий підмноговид в S з межею $\partial \mathrm{M}$, яка утворює підмноговид в S (можливо, незв'язний); X, Z – векторні поля на S; векторне поле, Z-трансверсальне до $\partial \mathrm{M}$; ω – диференціальна 1-форма на S, що анулюється на підмноговиді $\partial \mathrm{M}$, тобто $\langle \omega(x), Y \rangle = 0$ для $x \in \partial \mathrm{M}$; $Y \in T_x(\partial \mathrm{M})$. Позначимо Φ_t^Z потік векторного поля Z. Нехай існує логарифмічна похідна ρ^X міри μ уздовж векторного поля X.

У статті будуть знайдені достатні умови, за яких має місце формула

$$\int_M \rho_\mu^X(\cdot)d\mu = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\Phi_t^Z \mathrm{M}} \frac{\omega(X)}{\omega(Z)}d\mu \,. \qquad (2)$$

Одержаний результат буде досліджено з метою узгодження з класичною формулою (1).

Дослідження лівої частини формули (2)

Специфіка аналітичних досліджень на нескінченновимірних (а тому не локально компактних) многовидах потребує додаткових вимог до структури цих многовидів. Будемо вважати, що многовид S класу C^2 має "*рівномірний атлас*" [8, 9], а саме атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ в S з такими властивостями: існують числа $r > 0$, $K > 0$, такі, що:

а) для $\forall x \in S$ існує така карта, що $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ містить кулю в E з центром $\varphi_\alpha(x)$, радіуса r;

б) відображення склейки $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$ для кожної пари карт атласу задовольняють вимогу $\forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta): \|F'_{\beta\alpha}(x)\| \le K$, $\|F''_{\beta\alpha}(x)\| \le K$.

Існування рівномірного атласу дозволяє коректно запровадити на S "*обмежене векторне поле X класу C^1*" як таке, для якого існує число $c > 0$, що обмежує головну частину X_φ кожного локального зображення векторного поля X разом з його похідною:

$$\forall\varphi_\alpha,\ \forall x \in \varphi_\alpha(U_\alpha):\ \|X_{\varphi_\alpha}(x)\| \le c,\ \|X'_{\varphi_\alpha}(x)\| \le c.$$

Потік обмеженого векторного поля X класу C^1 визначено на $\mathbf{R}\times S$ [8, с. 96].

"*Узгодженість міри з векторним полем X*" визначимо таким чином: припустимо, що міра $\mu_t = \mu\Phi_{-t}^X$ (тут Φ_t^X – потік поля X) абсолютно неперервна відносно міри μ і відповідна щільність $\beta(t,\cdot) = \frac{d\mu_t}{d\mu}$ диференційовна по t при $t = 0$ як елемент простору $L_1(S,\mu)$, тоді як в [9, с. 34] доведено, що існує логарифмічна похідна ρ_μ^X міри μ уздовж X і при цьому $\rho_\mu^X(\cdot) = -\frac{d}{dt}\beta(t,\cdot)\Big|_{t=0}$.

За цих умов існує похідна $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^X \mathrm{M})$ і при цьому

$$\int_{\mathrm{M}} \rho_\mu^X(\cdot)d\mu = -\int_{\mathrm{M}} \frac{\partial}{\partial t}\beta(t,\cdot)d\mu =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\int_{\mathrm{M}} \frac{\beta(t,\cdot)-1}{t}d\mu = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^X \mathrm{M}) \,. \qquad (3)$$

Нехай ω – обмежена на S диференціальна 1-форма класу C^1, тобто $\exists c > 0$ для будь-якої карти (U,φ) рівномірного атласу; $\forall x \in U$: $\|\omega_\varphi(\varphi(x)\| \le c$; $\|\omega'_\varphi(\varphi(x))\| \le c$ (тут ω_φ – зображення ω у карті φ). Форма ω індукує диференціальну 1-форму $\omega_{\partial \mathrm{M}} = i^*\omega$ на многовиді $\partial\mathrm{M}$ (тут $i: \partial\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ – вкладення). Припустимо, що $\omega_{\partial\mathrm{M}} = 0$, але для кожного $x \in \partial\mathrm{M}$ $\omega(x) \ne 0$ (як функціонал на $T_x\mathrm{M}$). Надалі домовимось говорити, що "ω *узгоджена з областю* M".

Рівномірність атласу $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ дозволяє дати коректне означення ε-*окола* V_ε *підмножини* $V \subset S$: $V_\varepsilon = \{x \in S \mid \exists y \in V: \forall(U,\varphi): (x, y \in U) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\|\varphi(x)-\varphi(y)\|_\varphi < \varepsilon\}$.

Нехай Z – обмежене векторне поле на S класу C^1, для якого існує $\delta > 0$, таке, що нерівність $|\langle\omega_\varphi(x), Z_\varphi(x)\rangle| > \delta$ виконується для всіх карт рівномірного атласу принаймні в деякому ε-околі $\partial\mathrm{M}$ (можна довести, що умова рівномірної обмеженості $\|Z'_\varphi(x)\|$ вимагає виконання останньої нерівності лише на самій $\partial\mathrm{M}$). Надалі домовимось говорити, що "*форма* ω *узгоджена з полем* Z".

У разі узгодженості форми ω з полем Z для обмеженого векторного поля X нове векторне поле

$$Y = X - \frac{\omega(X)}{\omega(Z)}Z \qquad (4)$$

є також обмеженим, класу C^1 (принаймні в околі $\partial\mathrm{M}$) і таким, що $\omega(Y)=0$ на $\partial\mathrm{M}$, а тому Y дотикається до $\partial\mathrm{M}$. Вимагаємо також скінченності $\mu(\mathrm{M}_\varepsilon)$ при деякому $\varepsilon>0$.

Теорема 1. Нехай X, Z – обмежені векторні поля класу C^1; форма ω узгоджена з областю M та полем Z; міра μ узгоджена з векторним полем X; $\mu((\partial\mathrm{M})_\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Тоді виконується рівність

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mu(\Phi_t^X\mathrm{M})=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mu(\Phi_t^{\frac{\omega(X)}{\omega(Z)}Z}\mathrm{M}),\qquad(5)$$

в тому розумінні, що якщо існує одна з двох частин рівності (5), то існує й інша, і вони збігаються.

Лема 1. Нехай X, Y – векторні поля класу C^1 в області D банахова простору E, для яких існує число $M>0$, таке, що норми $\|X(\cdot)\|$, $\|Y(\cdot)\|$, $\|X'(\cdot)\|$, $\|Y'(\cdot)\|$ обмежені в D числом M. Тоді існує число $C=C(M)>0$, таке, що

$$\forall x_0\in D:\left\|\Phi_t^{X+Y}x_0-\Phi_t^X\Phi_t^Y x_0\right\|\le Ct^2\qquad(6)$$

(для тих достатньо малих t, для яких визначена ліва частина нерівності (6)).

Доведення леми 1. Покладемо $Y_0==Y(x_0)$ (Y_0 – відповідне стале векторне поле) і для значень параметра $z\in[0;1]$ розглянемо векторні поля $Y_z=Y_0+z(Y-Y_0)$.

Для кожного фіксованого z позначимо $x(t,\ 0,x_0,z)$ – розв'язок задачі Коші $\frac{dx}{dt}=Y_z(x(t))$, $x(0)=x_0$. Тоді для $\forall z\in[0;1]$: $\frac{\partial x}{\partial z}(t,0,x_0,z)$ є розв'язком задачі Коші

$$y'(t)=A(t,z)y(t)+g(t,z),\quad y(0)=0,\qquad(7)$$

де $A(t;z)=zY'(x(t,0,x_0,z))$; $g(t,z)=Y(x(t,0,x_0,\ z))-Y_0$ [10, теорема 10.7.3, с. 343]. Розв'язок $y(t)=y_z(t)$ задачі Коші (7) має вигляд

$$y_z(t)=\int_0^t U_z(t,s)g(s,z)ds,\qquad(8)$$

де $U_z(t,s)$ – відповідний еволюційний оператор; при цьому $U_0(t,s)\equiv I$.

Тоді для кожного $z\in[0;1]$ маємо

$$\|U_z(t,s)\|\le\exp\left(\int_s^t\|A(\tau,z)\|d\tau\right)\le e^{M(t-\tau)}\qquad(9)$$

(див. [11]).

Крім того, $\|g(t,z)\|=\|Y(x(t,0,x_0,z))-Y_0\|\le$ $\le M\|x(t,0,x_0,z)-x_0\|\le M^2t$, оскільки $\|Y'(\cdot)\|\le M$; $\|Y(\cdot)\|\le M$, а тому з (8) і (9) маємо при $t\in[0;1]$ нерівність

$$\|y_z(t)\|\le\int_0^t e^{M(t-s)}M^2sds\le\frac{1}{2}M^2e^Mt^2.$$

Звідси отримуємо $\|x(t,0,x_0,1)-x(t,0,x_0,0)\|=$ $=\left\|\int_0^1\frac{\partial x}{\partial z}(t,\ 0,x_0,z)dz\right\|\le c_1t^2$, тобто

$$\left\|\Phi_t^Y x_0-\Phi_t^{Y_0}x_0\right\|\le c_1t^2,\qquad(10)$$

де $c_1=\frac{1}{2}M^2e^M$.

Покладемо $X_0=X(x_0)$, $\tilde{X}_0=X(\Phi_t^Y x_0)$. Тоді матимемо

$$\left\|\Phi_t^{X+Y}x_0-\Phi_t^X\Phi_t^Y x_0\right\|\le\left\|\Phi_t^{X+Y}x_0-\Phi_t^{X_0+Y_0}x_0\right\|+$$
$$+\left\|\Phi_t^X\Phi_t^Y x_0-\Phi_t^{\tilde{X}_0}\Phi_t^Y x_0\right\|+$$
$$+\left\|\Phi_t^{\tilde{X}_0}\Phi_t^Y x_0-\Phi_t^{X_0}\Phi_t^{Y_0}x_0\right\|,\qquad(11)$$

оскільки

$$\Phi_t^{X_0+Y_0}x_0=x_0+t(X_0+Y_0)=\Phi_t^{X_0}\Phi_t^{Y_0}x_0.$$

Якщо в нерівності (10) замість x_0 взяти $\Phi_t^Y x_0$, то одержимо оцінку

$$\left\|\Phi_t^X\Phi_t^Y x_0-\Phi_t^{\tilde{X}_0}\Phi_t^Y x_0\right\|\le c_1t^2,$$

а в разі, якщо в (10) замість Y візьмемо $X+Y$, матимемо

$$\left\|\Phi_t^{X+Y}x_0-\Phi_t^{X_0+Y_0}x_0\right\|\le c_2t^2,$$

де $c_2=2M^2e^{2M}$.

Також з (10) отримуємо

$$\left\|\Phi_t^{\tilde{X}_0}\Phi_t^Y x_0 - \Phi_t^{X_0}\Phi_t^{Y_0}x_0\right\| =$$

$$= \left\|\Phi_t^Y x_0 + t\tilde{X}_0 - \Phi_t^{Y_0}x_0 - tX_0\right\| \le$$

$$\le c_1 t^2 + t\left\|\tilde{X}_0 - X_0\right\| \le c_3 t^2 ,$$

оскільки

$$\left\|\tilde{X}_0 - X_0\right\| = \left\|X(\Phi_t^Y x_0) - X(x_0)\right\| \le$$

$$\le M\left\|\Phi_t^Y x_0 - x_0\right\| \le M^2 t .$$

Це доводить (6).

Доведення теореми 1. Векторне поле $Y = X - \dfrac{\omega(x)}{\omega(Z)}Z$ дотичне до $\partial \mathrm{M}$. Тому для кожного $x_0 \in \partial\mathrm{M}$ та $t \in \mathbf{R}$: $\Phi_t^Y x_0 \in \partial\mathrm{M}$. Векторні поля $W = \dfrac{\omega(X)}{\omega(Z)}Z$ і Y – обмежені поля класу C^1 (принаймні в околі $\partial\mathrm{M}$). Тому їх зображення в кожній карті φ рівномірного атласу задовольняють умови леми 1, а отже, виконується оцінка

$$\left\|\Phi_t^{X_\varphi}(\varphi(x_0)) - \Phi_t^{W_\varphi}\Phi_t^{Y_\varphi}(\varphi(x_0))\right\|_\varphi \le ct^2 \quad (12)$$

(при достатньо малих t) з константою, що не залежить від карти.

Тому для кожного $x_0 \in \partial\mathrm{M}$ існує $x_1 = \Phi_t^Y x_0 \in \partial\mathrm{M}$, для якого в кожній карті $\left\|\varphi(\Phi_t^X x_0) - \varphi(\Phi_t^W x_1)\right\|_\varphi \le ct^2$ і, аналогічно, для кожного $x_0 \in \partial\mathrm{M}$ існує $x_2 = \Phi_{-t}^Y x_0 \in \partial\mathrm{M}$, для якого в кожній карті $\left\|\varphi(\Phi_t^X x_2) - \varphi(\Phi_t^W x_0)\right\|_\varphi \le ct^2$ (звичайно, за умови, що відповідні точки належать області визначення цієї карти).

Звідси маємо

$$\Phi_t^W(\partial\mathrm{M}) \subset (\Phi_t^X(\partial\mathrm{M}))_{ct^2} . \quad (13)$$

Лема 2. Нехай X – векторне поле, що задовольняє умови леми 1. Тоді для кожного $a > 1$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх $t \in (-\delta, \delta)$ і $\varepsilon \in (0, \delta)$ має місце імплікація

$$\left(\left\|x_1 - x_2\right\| < \frac{\varepsilon}{a}\right) \Rightarrow \left(\left\|\Phi_t^X x_1 - \Phi_t^X x_2\right\| < \varepsilon\right).$$

Доведення леми 2. Покладемо, $x(s) = x_1 + s(x_2 - x_1)$; $s \in [0;1]$. Тоді $y(t) = \dfrac{\partial}{\partial s}\Phi_t^X(x(s))$ є розв'язком задачі Коші:

$$y'(t) = A_s(t)y(t), \quad y(0) = x_2 - x_1, \quad (14)$$

де $A_s(t) = X'(\Phi_t^X(x(s)))$ – обмежений лінійний оператор в E (див. [10]). Розв'язок має вигляд $y(t) = U_s(t,0)(x_2 - x_1)$, де $U_s(t,\tau)$ – еволюційний оператор рівняння (14).

Наявність рівномірної оцінки $\|X'(\cdot)\| \le M$ приводить до нерівностей

$$\|U_s(t,0)\| \le \exp\left(\int_0^t \|A_s(\tau)\| d\tau\right) \le \exp(tM),$$

$$\left\|\Phi_t^X x_2 - \Phi_t^X x_1\right\| = \left\|\int_0^t U_s(t,0)(x_2 - x_1)ds\right\| \le$$

$$\le \exp(tM)\|x_2 - x_1\| .$$

Отже, δ достатньо взяти з нерівності $\exp(\delta M) \le a$.

Продовження доведення теореми 1. Якщо в доведенні леми 2 покласти додатково $\delta < \dfrac{r}{C}$, де число r взято з означення рівномірного атласу, а $C = \sup\limits_{x,\varphi}\left\|X_\varphi(\varphi(x))\right\|_\varphi$, то можна вважати, що точки $x_1, x_2, \Phi_t^X x_1, \Phi_t^X x_2$ належать області значень однієї карти рівномірного атласу. А тому з леми 2 маємо такий наслідок: якщо X – обмежене векторне поле класу C^1, то $\forall a > 1\ \exists\delta > 0$, таке, що для всіх $x_1, x_2 \in S$ існує така карта φ, що

$$\forall t \in (-\delta,\delta);\ \varepsilon \in (0,\delta):\ \left(\left\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left\|\varphi(\Phi_t^X x_1) - \varphi(\Phi_t^X x_2)\right\|_\varphi < \varepsilon\right).$$

Якщо дві точки $x_1, x_2 \in S$ належать одночасно областям визначення двох карт (U_φ, φ) і (U_ψ, ψ) рівномірного атласу: $x_1, x_2 \in U_\varphi \cap U_\psi$, то $\left\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right\|_\varphi \le K\left\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\right\|_\psi$. Це ж стосується і точок $\Phi_t^X x_1$, $\Phi_t^X x_2$. Підсумовуючи наведені міркування, доходимо висновку: $\forall a > 1$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх $x_1, x_2 \in S$, $t \in (-\delta, \delta)$, $\varepsilon \in (0; \delta)$ і для будь-яких карт (U_φ, φ), (U_ψ, ψ), таких, що $x_1, x_2 \in U_\varphi$, $\Phi_t^X x_1$, $\Phi_t^X x_2 \in U_\psi$, виконується імплікація

$$\left(\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|_\varphi < \frac{\varepsilon}{a} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left\| \psi(\Phi_t^X x_1) - \psi(\Phi_t^X x_2) \right\|_\psi < K^2 \varepsilon \right). \quad (15)$$

Імплікація (15) разом з означенням ε-околу підмножини в S приводять до висновку: $\exists \delta > 0$, таке, що для всіх $t \in (-\delta, \delta)$, $\varepsilon \in (0, \delta)$ маємо

$$\Phi_t^X((\partial \mathrm{M})_\varepsilon) \supset (\Phi_t^X(\partial \mathrm{M}))_{\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (16)$$

За умови узгодженості міри μ з векторним полем X функція $\beta(t, \cdot) = \frac{d\mu_t^X}{d\mu}$ (тут $\mu_t^X(A) = \mu(\Phi_t^X A)$) диференційовна по t в нулі як елемент простору $L_1(S, \mu)$. Отже, отримаємо

$$\beta(t, \cdot) - 1 = -\rho_\mu^X(\cdot) t + \alpha(t, \cdot),$$

де

$$\left\| \frac{1}{t} \alpha(t, \cdot) \right\|_{L_1} \to 0, \quad t \to 0. \quad (17)$$

Тоді з (13), (16) при достатньо малих $t \neq 0$ маємо

$$\frac{1}{|t|} \left| \mu(\Phi_t^X \mathrm{M}) - \mu(\Phi_t^W \mathrm{M}) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{|t|} \mu((\Phi_t^X(\partial \mathrm{M}))_{ct^2}) \le \frac{1}{|t|} \mu(\Phi_t^X(\partial \mathrm{M})_{2ct^2}) =$$

$$= \frac{1}{|t|} \int_{(\partial \mathrm{M})_{2ct^2}} \beta(t, \cdot) d\mu \le \frac{1}{|t|} \mu((\partial \mathrm{M})_{2ct^2}) +$$

$$+ \left| \int_{(\partial M)_{2ct^2}} \rho_\mu^X d\mu \right| + \left| \int_{(\partial M)_{2ct^2}} \frac{\alpha(t, \cdot)}{t} d\mu \right|.$$

Перший доданок у правій частині прямує до нуля при $t \to 0$, оскільки за умовою теореми 1 $\mu((\partial \mathrm{M})_\varepsilon) = O(\varepsilon)$. З тієї ж причини з абсолютної неперервності інтеграла випливає, що й другий доданок є нескінченно малим. Збіжність до нуля третього доданка зумовлена умовою (17).

Отже, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mu(\Phi_t^X \mathrm{M}) - \mu(\Phi_t^W \mathrm{M})) = 0$, що й доводить теорему 1.

Доведення основної теореми

Теорема 2. Нехай f – обмежена функція класу C^1 на S; Y – обмежене векторне поле класу C^1 на S. Тоді

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu(\Phi_t^{fY} \mathrm{M}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\Phi_t^Y \mathrm{M}} f d\mu, \quad (18)$$

в тому розумінні, що якщо існує одна з двох частин рівності (18), то існує й інша і вони збігаються.

Доведення. Слід довести, що

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\int_S g(\Phi_t^{fY} x) d\mu - \int_S f(x) g(\Phi_t^Y x) d\mu \right) = 0, \quad (19)$$

де $g = j_\mathrm{M}$ – індикатор множини M.

Нехай $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – невід'ємна фінітна функція класу C^1; $\int_\mathbf{R} h(s) ds = 1$. Функцію g визначимо на S формулою

$$g(x) = \int_\mathbf{R} h(s) j_\mathrm{M}(\Phi_s^Y x) ds. \quad (20)$$

Тоді (19) для функції g виду (20) одержимо з рівностей

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_S g(\Phi_t^{fY} x) d\mu =$$

$$= \int_S \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\Phi_t^{fY} x) d\mu = \int_S f(x)(Yg)(x) d\mu,$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_S f(x) g(\Phi_t^Y x) d\mu =$$

$$= \int_S f(x) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\Phi_t^Y x) d\mu = \int_S f(x)(Yg)(x) d\mu,$$

коректність яких зумовлена теоремою Лебега та рівномірною обмеженістю на S похідних $\frac{d}{dt} g(\Phi_t^Y x)$ і $\frac{d}{dt} g(\Phi_t^{fY} x)$.

Для того щоб довести (19) для функції $g = j_\mathrm{M}$, тепер достатньо довести, що для функції g виду (20) має місце збіжність при $t \to 0$:

$$\left(\int_S \frac{1}{t}(j_{\mathrm{M}}(\Phi_t^{fY}x) - j_{\mathrm{M}}(x))d\mu - \right.$$

$$\left. - \int_S \frac{1}{t} f(x)(j_{\mathrm{M}}(\Phi_t^{Y}x) - j_{\mathrm{M}}(x))d\mu \right) -$$

$$- \left(\int_S \frac{1}{t}(g(\Phi_t^{fY}x) - g(x))d\mu - \right.$$

$$\left. - \int_S \frac{1}{t} f(x)(g(\Phi_t^{Y}x) - g(x))d\mu \right) \to 0\,. \quad (21)$$

З цією метою підставимо вираз (20) для g у формулу (21). При цьому слід врахувати, що потоки векторних полів Y і fY пов'язані співвідношенням

$$\Phi_t^{fY}x = \Phi_{v(t;\,x)}^{Y}x\,,$$

де $v(0;x) = 0$; $\dfrac{\partial v}{\partial t}(0;x) = f(x)$.

Ліва частина (21) набуде вигляду

$$\int_S \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbf{R}} h(s) f(x) \times \right.$$

$$\left. \times [j_{\mathrm{M}}(\Phi_{s+t}^{Y}x) - j_{\mathrm{M}}(\Phi_s^{Y}x) - j_{\mathrm{M}}(\Phi_t^{Y}x) + j_{\mathrm{M}}(x)]ds \right) d\mu -$$

$$- \int_S \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbf{R}} h(s)[j_{\mathrm{M}}(\Phi_s^{Y}\Phi_t^{fY}x) - \right.$$

$$\left. - j_{\mathrm{M}}(\Phi_s^{Y}x) - j_{\mathrm{M}}(\Phi_t^{fY}x) + j_{\mathrm{M}}(x)]ds\right) d\mu =$$

$$= \int_S d\mu \int_{\mathbf{R}} f(x)\frac{h(s-t) - h(s)}{t}(j_{\mathrm{M}}(\Phi_s^{Y}x) - j_{\mathrm{M}}(x))ds -$$

$$- \int_S d\mu \int_{\mathbf{R}} \frac{h(s - v(t;x)) - h(s)}{t}(j_{\mathrm{M}}(\Phi_s^{Y}x) - j_{\mathrm{M}}(x))ds\,.$$

Оскільки

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(s - v(t,x)) - h(s)}{t} = -h'(s) f(x) =$$

$$= \lim_{t\to 0} f(x)\frac{h(s-t) - h(s)}{t}\,,$$

$$\left|\frac{h(s-t) - h(s)}{t}\right| \le \sup_{s\in\mathbf{R}} |h'(s)|\,,$$

$$\left|\frac{h(s - v(t;x)) - h(s)}{t}\right| \le \sup_{\substack{s\in\mathbf{R}\\ x\in S}} (|h'(s)||f(x)|)\,,$$

то застосування теореми Лебега завершує доведення теореми 2.

Зауваження. Результат теореми 2 залишається справедливим і в разі, коли функція f обмежена лише в деякому ε-околі межі $\partial\mathrm{M}$ області M.

Тепер теореми 1 і 2 приводять до такого результату.

Основна теорема. Нехай S – хаусдорфів банахів многовид класу C^2 з рівномірним атласом; M – відкритий підмноговид у S з межею $\partial\mathrm{M}$, яка утворює підмноговид; μ – борелівська міра на S, що є скінченною принаймні в ε-околі M; X, Z – обмежені векторні поля на S класу C^1; поле X узгоджене з мірою μ; ω – обмежена диференціальна 1-форма на S класу C^1, що узгоджена з областю M і з полем Z. Крім того, $\mu((\partial\mathrm{M})_\varepsilon) = = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді існують обидві частини і має місце формула (2).

Обговорення результату

1. Одержаний результат має місце і для скінченновимірних многовидів. У випадку, коли $\bar{\mathrm{M}}$ (замикання M) є компактною підмножиною в S, вимога існування рівномірного атласу є зайвою. Компактність $\bar{\mathrm{M}}$ дає можливість побудувати рівномірний атлас, складений із скінченної кількості карт, що покриває ε-окіл M_ε (у наведеному вище розумінні) при достатньо малому $\varepsilon > 0$. Немає також потреби вимагати обмеженість полів X і Z класу C^1, а умова узгодженості векторного поля Z з 1-формою ω полягає в тому, що функція $\langle \omega, Z \rangle$ не дорівнює нулю на $\partial\mathrm{M}$.

2. Звичайно, формула (2) виконується і в лінійному (банаховому) просторі E. При цьому немає потреби взагалі розглядати атлас.

3. У разі, якщо S є рімановим многовидом (скінченновимірним або нескінченновимірним), можна за Z взяти векторне поле n, що є продовженням на S поля зовнішньої по відношенню до M

одиничної нормалі на $\partial\mathrm{M}$. Існування такого векторного поля n на S є додатковою умовою на межу $\partial\mathrm{M}$. Диференціальну форму ω визначимо формулою

$$\langle \omega(x), X(x)\rangle = (X(x), n(x))_{T_x S} .$$

Формулу (5) можна одержати у вигляді

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu(\Phi_t^X \mathrm{M}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu(\Phi_t^{(X,\,n)n}\mathrm{M}),$$

а формула (2) набуває вигляду

$$\int_{\mathrm{M}} \rho_\mu^X d\mu = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Phi_t^n \mathrm{M}} (X, n) d\mu . \qquad (22)$$

Крім того, у випадку існування обмеженого векторного поля n класу C^1 (продовження зовнішньої нормалі), що є узгодженим із мірою μ (а тому існує ρ_μ^n), аналіз формули (22) з використанням теореми 1 приводить до висновку про існування похідної $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Phi_t^n \mathrm{M}} f d\mu$ для довільної обмеженої (разом із похідною) функції f класу C^1 на S та її незалежність від вибору поля n. Тому стає коректним позначення

$$\int_{\partial\mathrm{M}} f d\mu_\partial = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Phi_t^n \mathrm{M}} f d\mu \qquad (23)$$

і (22) набуде вигляду

$$\int_{\mathrm{M}} \rho_\mu^X d\mu = \int_{\partial\mathrm{M}} (X, n) d\mu_\partial .$$

У випадку гільбертова простору, як доведено в [1], ліву частину формули (23) можна тлумачити і як інтеграл по поверхневій мірі.

Висновки

Одержано нескінченновимірне узагальнення формули Гаусса–Остроградського, що є новим навіть для банахова простору та скінченновимірних многовидів з довільною борелівською мірою. Підхід, запропонований в статті, дасть змогу, на думку автора, проводити подальше дослідження виявлених закономірностей.

Ю.В. Богданский

БЕЗДИВЕРГЕНТНЫЙ ВАРИАНТ ФОРМУЛЫ ГАУССА–ОСТРОГРАДСКОГО НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Предложен вариант формулы Гаусса–Остроградского на банаховых многообразиях с равномерным атласом.

Yu.V. Bogdansky

A DIVERGENCELESS FORM OF THE GAUSS–OSTROGRADSKY FORMULA FOR THE INFINITE DIMENSIONAL MANIFOLDS

In this paper, we propose a version of the Gauss–Ostrogradsky formula for a Banach manifold with a uniform atlas.

1. *Скороход А.В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
2. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
3. *Ефимова Е.И., Угланов А.В.* Формулы векторного анализа на банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1983. – **271**, № 6. – С. 1302–1306.
4. *Угланов А.В.* Поверхностные интегралы в

пространствах Фреше // Мат. сборник. – 1998. – **189**, №11. – С. 139–157.

5. *Смородина Н.В.* Формула Гаусса-Остроградского для пространства конфигураций // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – **35**, №4. – С. 727–739.
6. *Finkelshtein D.L.*, *Kondratiev Yu.G.*, *Konstantinov A.Yu.*, *Rockner M.* Gauss formula and symmetric extensions of the Laplacian on configuration spaces // Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics. – 2001. – **4**, N4. – P. 489–509.
7. *Bogdansky Yu.V.*, *Tsytsura P.V.* The Poincare–Stokes formula in an infinite dimensional space // Spectral and evolution problems. – 2007. – **17**. – P. 106–116.
8. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
9. *Далецкий Ю.Л.*, *Белопольская Я.И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – К.: Выща шк., 1989. – 296 с.
10. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 432 с.
11. *Далецкий Ю.Л.*, *Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
“Інститут прикладного
системного аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до
редакції 12 травня
2008 року