



## МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. Частина 2.

# Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>124 Системний аналіз</i>
Освітня програма	<i>Системний аналіз і управління</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредитів ЄКТС, 150 год. (лекції – 54 год., практ. – 54 год., СРС – 42 год.)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен/МКР</i>
Розклад занять	<i><a href="https://schedule.kpi.ua/">https://schedule.kpi.ua/</a></i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович, Практичні: к.ф.-м.н., доц, Денисьєвський Микола Олексійович, к.ф.-м.н., доц, Руденко Олексій Володимирович, к.ф.-м.н., доц. Мінарченко Олександр Миколайович</i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom</i>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вона включає:

- інтеграл Рімана;
- невластні інтеграли;
- числові ряди;
- функції кількох змінних;
- функціональні ряди

Вивчення навчальної дисципліни націлено на формування, розвиток та закріплення у здобувачів таких загальних та фахових **компетентностей**: ЗК 01 Здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях. ЗК 02 Здатність планувати і управляти часом. ЗК 03 Здатність абстрактно мислити, застосовувати методи аналізу і синтезу. ЗК 05 Здатність спілкуватися державною мовою усно і письмово. ЗК 09 Здатність до адаптації та дії в новій ситуації. ЗК 14 Здатність забезпечувати та оцінювати якість виконуваних робіт. ЗК 15 Здатність реалізовувати свої права та обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності громадянського (вільного

демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності. ФК 02 Здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів. ФК 09 Здатність представляти математичні аргументи і висновки з них з якістю і точністю в таких формах, які підходять для занять в аудиторіях як усно, так і в письмовій формі.

У результаті засвоєння курсу здобувач повинен бути здатним продемонструвати такі програмні результати навчання: ПРН 01 Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу; ПРН 04 Знати та вміти застосовувати базові методи якісного аналізу та інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і систем, диференціальних рівнянь в частинних похідних, в тому числі рівнянь математичної фізики; ПРН 05 Знати основні положення теорії метричних просторів, лебегівської теорії міри та інтеграла, теорії обмежених лінійних операторів в банахових та гільбертових просторах, застосовувати техніку і методи функціонального аналізу для розв'язання задач керування складними процесами в умовах невизначеності.

Внаслідок вивчення курсу студент повинен **вміти**: знаходити визначені інтеграли та застосовувати їх до обчислення площ, довжин кривих, досліджувати збіжність невласних інтегралів та числових рядів, вміти застосовувати диференціальне числення для дослідження функцій кількох змінних, знаходити область збіжності функціональних рядів та розкласти певні елементарні функції в степеневий ряд.

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

Дисципліна передуює і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Фізика», «Диференціальні рівняння», «Теорія ймовірностей», «Функціональний аналіз», «Чисельні методи», «Основи системного аналізу», «Математична статистика», «Рівняння математичної фізики», «Гармонічний аналіз, Операційне числення», «Теорія стійкості, Варіаційне числення», «Основи фінансової математики», «Прикладна фінансова математика».

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

### **Розділ 1. Інтеграл Рімана**

Означення інтегралу. Існування та властивості інтеграла Рімана. Обчислення інтегралу. Застосування інтегралу до знаходження площі, що обмежена кривими та довжини кривої.

### **Розділ 2. Невласні інтеграли**

Невласні інтеграли першого роду. Критерій Коші. Абсолютна та умовна збіжність. Теорема порівняння. Невласні інтеграли другого роду. Невласні інтеграли в сенсі головного значення.

### **Розділ 3. Функції векторної змінної**

Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Частинні похідні вищих порядків. Умова незалежності від порядку диференціювання. Вищі диференціали. Формула Тейлора для функцій кількох змінних. Матриця Гессе. Екстремум функції кількох змінних. Теорема про неявну функцію. Теорема про обернену функцію. Умовний екстремум.

## **Розділ 4. Числові ряди**

*Збіжність, абсолютна збіжність ряду. Критерій Коші. Знакосталі ряди, ознаки збіжності Даламбера, Коші, Раабе, інтегральна ознака Коші. Незнакосталі ряди, ознаки Лейбниця, Абеля, Діріхле.*

## **Розділ 5. Функціональні ряди**

*Функціональні послідовності та ряди. Поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду. Ознака Вейерштрасса. Неперервність суми функціонального ряду з неперервними членами. Теорема Діні. Диференціювання та інтегрування функціональних послідовностей та рядів. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Формула Коші-Адамара. Властивості суми степеневого ряду. Ряди Тейлора. Розвинення в ряд Тейлора елементарних функцій. Поняття про аналітичні функції дійсного аргументу.*

### **4. Навчальні матеріали та ресурси**

#### **Базова**

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Частина 1: підручник. К: Либідь, 1993. 320 с
2. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. У 2-х частинах. Частина 1: підручник. Київ : Вища школа, 1992. - 595 с
3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник / 2-ге вид., перероб. і доп. —К.: Либідь, 2003. -600 с.
4. Богданський Ю.В. Інтеграл в курсі математичного аналізу. (Електронний посібник) К., КПІ, 2013 — 180с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/3581>
5. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 113 «прикладна математика» / В. Г. Бондаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022.—124 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52654>
6. Збірник задач з математичного аналізу. Частина І. Функції однієї змінної. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський / – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 257 с. <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/all.pdf>

#### **Допоміжна**

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеева Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. 2-е вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2006. – 460с
2. Математичний аналіз 2: Інтегральне числення, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс]. навчальний. посібник для студентів. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Г. Бондаренко, А.Ю. Мальцев, Г.Б.Подколзін.–2020.— 56с. .<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/34406>

5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Рівномірна неперервність функцій: означення, приклади. Теорема Кантора. Інтеграл Рімана: означення, приклади.
2	Інтегрування кусково сталої функції. Єдиність інтегралу Рімана. Обмеженість інтегрованої функції. Верхня та нижня суми Дарбу.
3	Теорема Дарбу. Критерій інтегрованості за Ріманом. Класи інтегрованих функцій: неперервні, кусково неперервні, монотонні.
4	Властивості інтегралу Рімана: лінійність, адитивність, монотонність.
5	Теореми про середнє.
6	Інтеграл із змінними границями: означення, неперервність, диференційованість. Існування первісної для неперервної функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення визначеного інтегралу: формула заміни змінної, Формула інтегрування по частинам.
7	Формула Тейлора із залишком в інтегральній формі. Застосування інтегралу Рімана: площа криволінійної трапеції, площа криволінійного сектору.
8	Довжина кривої в $\mathbb{R}^n$ : означення, незалежність від параметризації. Довжина графіка функції, довжина кривої в полярній системі координат.
9	Інтеграл на необмеженому проміжку: означення, збіжність. Властивості: інтегрування по частинам, заміна змінної. Збіжність інтегралів від невід'ємної функції. Ознаки порівняння. Приклади.
10	Критерій Коші збіжності інтегралу. Абсолютна та умовна збіжності: означення, приклади. Ознака Діріхле. Інтеграл від необмеженої функції: означення, приклади. Властивості, інтегрування по частинам, заміна змінної.
11	Збіжність інтегралів від невід'ємної необмеженої функції. Ознаки порівняння. Інтеграл від довільної функції: критерій Коші .
12	Абсолютна та умовна збіжності: означення, приклади. Головне значення: означення, приклади.
13	Числові ряди: означення, збіжність, приклади. Властивості збіжних рядів. Критерій Коші збіжності ряду. Необхідна умова збіжності. Ряди з невід'ємними членами: інтегральна ознака збіжності, ознаки порівняння.
14	Знакосталі ряди: ознаки збіжності Даламбера, Коші, Раабе. Знакозмінні ряди: ознака Лейбніца. Абсолютна, умовна збіжності. Ознака Діріхле. Перестановка членів ряду. Теорема Рімана.
15	Функції кількох змінних: границя функції за Коші і Гейне. Арифметичні властивості границь, нескінченно малі функції. Неперервність функції: означення, арифметичні властивості.
16	Векторно-значні функції кількох змінних: означення, границя, арифметичні властивості границь. Неперервність векторно-значних функцій кількох змінних: означення, властивості. Властивості неперервних функцій на компактах: обмеженість, досягнення екстремальних значень, рівномірна неперервність. Теорема про середнє значення.
17	Частинні похідні першого порядку функції кількох змінних. Диференційованість функції: означення, приклади, достатня умова. Диференціал: означення, застосування до наближених обчислень. Похідна функції кількох змінних: означення, арифметичні властивості.
18	Диференційованість векторно-значної функції: означення, критерій диференційованості. Похідна, матриця Якобі, якобіан. Похідна композиції векторно-значних функцій. Похідна складеної функції.

19	<i>Диференціал першого порядку: арифметичні властивості, інваріантність. Похідна за напрямком: означення, приклади. Градієнт: означення, ортогональність до поверхні рівня.</i>
20	<i>Теореми про функцію, що задано неявно, та обернену функцію. Перетворення диференціальних виразів першого порядку.</i>
21	<i>Похідні вищих порядків. Достатні умови рівності змішаних похідних. Перетворення диференціальних виразів вищих порядків: рівняння Лапласа в полярній системі координат. Диференціали вищих порядків.</i>
22	<i>Формула Тейлора. Локальні екстремуми: означення, необхідні умови, достатні умови.</i>
23	<i>Функціональна незалежна система функцій: означення приклади. Умовний локальний екстремум: функція Лагранжа, необхідні умови.</i>
24	<i>Умовний локальний екстремум: достатні умови. Приклади знаходження умовних локальних екстремумів.</i>
25	<i>Функціональні ряди: означення, приклади, область збіжності. Поточкова та рівномірна збіжність послідовності функцій. Неперервність рівномірної границі послідовності неперервних функцій. Теорема Діні.</i>
26	<i>Рівномірна збіжність функціонального ряду: означення, приклади. Ознаки рівномірної збіжності: ознака Вейерштрасса, ознака Діріхле. Властивості рівномірно збіжних рядів: теореми про неперервність границі, почленне диференціювання, почленне інтегрування.</i>
27	<i>Степеневі ряди: радіус збіжності. Аналітичні функції: означення, властивості. Ряд Тейлора аналітичної функції. Розклад певних елементарних функцій в ряд Тейлора.</i>

### Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	<i>Обчислення невизначеного інтегралу (повторення).</i>
2	<i>Рівномірна неперервність функцій.</i>
3	<i>Обчислення інтегралу Рімана як границі інтегральних сум.</i>
4	<i>Обчислення визначеного інтегралу: заміна змінних, інтегрування частинами.</i>
5	<i>Властивості визначеного інтегралу як функції границь інтегрування.</i>
6	<i>Теорема про середнє значення та її застосування.</i>
7	<i>Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій.</i>
8	<i>Визначений інтеграл як границя інтегральних сум. Методи обчислення визначеного інтегралу.</i>
9	<i>Застосування інтеграла: обчислення площ, довжин дуг.</i>
10	<i>Застосування інтеграла: обчислення.</i>
11	<i>Невласні інтеграли на нескінченному проміжку, ознаки порівняння.</i>
12	<i>Абсолютна та умовна збіжності. Ознака Діріхле.</i>
13	<i>Збіжність інтегралів від невід'ємної необмеженої функції. Ознаки порівняння.</i>
14	<i>Абсолютна та умовна збіжності: означення, приклади. Головне значення.</i>
15	<i>Числові ряди: збіжність. Необхідна умова збіжності. Ряди з невід'ємними членами: інтегральна ознака збіжності, ознаки порівняння.</i>
16	<i>Знакосталі ряди: ознаки збіжності Даламбера, Коші, Раабе. Знакозмінні ряди: ознака Лейбніца. Абсолютна, умовна збіжності. Ознака Діріхле.</i>
17	<i>Функції кількох змінних: границя функції. Арифметичні властивості границь, нескінченно малі функції. Неперервність функції.</i>
18	<i>Властивості неперервних функцій на компактах: обмеженість, досягнення екстремальних значень, рівномірна неперервність. Теорема про середнє значення. Векторно-значні функції кількох змінних: границя, неперервність.</i>



19	Частинні похідні першого порядку функції кількох змінних, диференційованість, диференціал.
20	Диференційованість векторно-значної функції, матриця Якобі, якобіан. Похідна композиції векторно-значних функцій. Похідна складеної функції. Похідна за напрямком, градієнт.
21	Теорема про функцію, що задано неявно, та обернену функцію. Похідні вищих порядків. Перетворення диференціальних виразів.
22	Диференціали вищих порядків.. Формула Тейлора.
23	Локальні екстремуми.
24	Умовні локальні екстремуми.
25	Визначення типу збіжності функціональних послідовностей. Ознака Вейєрштрасса
26	Диференціювання та інтегрування функціональних рядів
27	Степеневі ряди. Розклад елементарних функцій в ряд Тейлора.

## 6. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Усі роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, етична поведінка студентів визначені у Кодексі честі <https://kpi.ua/code>.

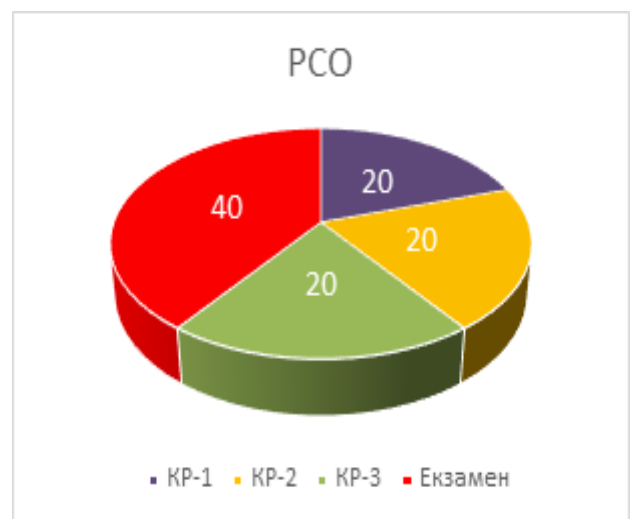
## 7. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

семестровий контроль: **екзамен**

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за:

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за<sup>1</sup>:

КР-1 КР-2 КР-3	20 балів 20 балів 20 балів
Екзаменаційна робота / екзамен	40 балів



7.1. Семестровий рейтинг складається з рейтингових балів, і не перевищує  $R_{\max} = 100$  балів. У семестрі здобувач може набрати 60 балів, на екзамені — 40 балів. Бали за семестр рахуються як сума набраних балів за всі контрольні заходи.

7.2. Кожний контрольний захід оцінюється у частках від одиниці  $G$  ( $0 - 1$ ). Бали за кожну контрольну роботу нараховуються як  $R = 20 \cdot G$ , за екзамен як  $R = 40 \cdot G$ .

<sup>1</sup>Кожна контрольна робота може бути замінена (за наявності форс-мажорних обставин) самостійною або розрахунковою роботою. Кількість можливих балів за контрольний захід при цьому не змінюється. У разі неможливості проведення екзамену за наявності форс-мажорних обставин, бали за семестр  $R$  нараховуються за формулою  $R = 100 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) / 3$ , де  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

7.3. У разі, якщо здобувач отримав за роботу в семестрі оцінку не нижче ніж 60% від максимальної оцінки за його бажанням, висловленим в письмовій формі, його семестрова оцінка  $R$  може бути порахована за формулою  $R = \min\{74, 100 \cdot (G1 + G2 + G3)/3\}$ , де  $G1$ ,  $G2$ ,  $G3$  — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

7.4. Здобувач допускається до екзамену або перескладання, якщо семестрова складова його балів становить не нижче, ніж 25 балів.

7.5. Рейтингова оцінка з кредитного модуля переводиться в оцінку ECTS згідно таблиці

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам ECTS:**

Бали: контрольні роботи + екзаменаційна робота	Оцінка
100...95	<b>A-Відмінно</b>
94...85	<b>B-Дуже добре</b>
84...75	<b>C-Добре</b>
74...65	<b>D-Задовільно</b>
64...60	<b>E-Достатньо</b>
Менше 60	<b>F-Незадовільно</b>
стартовий рейтинг менше 25 балів	<b>FX-Не допущено</b>

7.6. Для допуску до контрольного заходу у дистанційному режимі здобувач має надіслати, не пізніше ніж за 3 дні до дати проведення контрольного заходу, свою фотографію та фотографію написаних від руки

наступних своїх даних: ПІБ, група, місце поточного знаходження (місто, район, країна), підпис. Ці дані надсилаються один раз на семестр з пошти, на яку здобувач згоден отримати завдання контрольного заходу (бажано в домені @lll.kpi.ua). У разі зміни якихось з цих даних або поштової адреси, дані надсилаються знову.

7.7. Виконання і оцінювання **контрольної роботи** або **екзамену**, проведеному в **дистанційному режимі**.

7.7.1. Здобувач отримує завдання контрольного заходу на пошту, вказану в п. 7.6.

7.7.2. Розв'язок отриманого завдання здійснюється самостійно. Виконане завдання контрольного заходу надсилається як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить фотографії рукописного тексту, і розмір якого не перевищує 10 Mb. Текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісні.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.7.3. Виконання завдання має бути здійснено у зазначений в умовах час. Максимальний за роботу бал зменшується на 5% за кожну хвилину запізнення.

7.7.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант завдання**, **ПІБ** та **групу** виконавця роботи. Кожна сторінка має містити його **підпис**. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.7.5. Екзамен може бути також проведений у формі співбесіди за допомогою комп'ютерних засобів. При цьому відсутність працюючої камери, або мікрофону, або відсутність інтернету означає неявку студента на іспит.

7.8. Виконання і оцінювання **самостійної (розрахункової) роботи**, проведеної в **дистанційному режимі**.

7.8.1. Здобувач отримує завдання самостійної (розрахункової) роботи на пошту, вказану в п. 7.6, або на пошту групи.

7.8.2. Виконана самостійна (розрахункова) робота має бути надіслана як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить саму роботу, набрану за допомогою будь-якого редактора, або фотографії рукописного тексту. У другому випадку текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісними. Розмір файлу не має перевищувати 10 Mb.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.8.3. Робота має бути надіслана не пізніше вказаної в умовах дати. Максимальний бал за роботу зменшується на 20% за кожний день запізнення.

7.8.4. Перша сторінка роботи має містити варіант, ПІБ та групу виконавця роботи. Також перша сторінка має містити підпис виконавця у разі фотографій рукописного тексту. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.8.5. Будь-яка кількість робіт (розв'язаних завдань), що надішли вчасно і містять понад 90% однакових формул (викладок), буде оцінюватися як одна робота (завдання), тобто кожен (спів)автор отримує бали за одну роботу (завдання), поділені на кількість (спів)авторів. Роботи (завдання), що надішли із запізненням і містять понад 90% формул (викладок), які містяться в раніше надісланих роботах, оцінюються в 0 балів.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено к.ф.-м.н., доцентом, Чаповським Юрієм Аркадійовичем**

**Ухвалено кафедрою ММСА (протокол №13 від 05.06.2024)**

**Погоджено Методичною комісією ІПСА (протокол № 10 від 24.06.2024)**