



ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>122 Комп'ютерні науки</i>
Освітня програма	<i>Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)/дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>4,5 кредитів ЄКТС, 135 годин, 36 год. – лекції, 36 год. – практика, СРС – 63 год.</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен, МКР</i>
Розклад занять	www.Rozklad.kpi.ua
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Бохонов Юрій Євгенович, Bokhonov.Yuriy@III.kpi.ua Практичні: к.ф.-м.н., доцент, Бохонов Юрій Євгенович
Розміщення курсу	Googleclassroom https://drive.google.com/file/d/1SFqQJ_VM6z4ZKqIkX7LvMlxYK_qU2Ake/view?pli=1 https://ela.kpi.ua/handle/123456789/48159

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вона включає:

- основи алгебри многочленів (ділення із залишком, алгоритм Евкліда, розклад многочленів на множники, схема Горнера, раціональні дроби);
- унітарні та евклідові простори;
- основи теорії лінійних операторів в унітарних та евклідових просторах,
- зведення матриці до нормальної форми в комплексному і дійсному просторах, циклічна нормальна форма, полярний розклад матриці,
- білінійні та квадратичні форми, знаковизначеність, критерій Сільвестра,
- зведення квадратичних форм до канонічного вигляду, застосування до поверхонь другого порядку,
- тензорний добуток матриць.

По завершенню курсу студент має набути наступні програмні результати навчання: знання теоретичних та практичних основ алгебри та аналітичної геометрії, основи теорії лінійних операторів у лінійних, унітарних та евклідових просторах, зведення матриць до нормальних

форм – Жордана у комплексному та дійсному просторах, Фробеніуса – у дійсному просторі, теорію білінійних і квадратичних форм та зведення їх до канонічного вигляду.

У процесі навчання студент має оволодіти такими загальними, фаховими компетентностями та програмними результатами навчання:

ЗК1 «Здатність до абстрактного мислення»

ЗК6 «Здатність вчитися й оволодівати сучасними знаннями»

ЗК11 «Здатність приймати обґрунтовані рішення»

ФК1 «Здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування»

ПРН2 «Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації»

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна передує всім іншим дисциплінам. Дисципліни, які базуються на результатах навчання з даної дисципліни: Лінійна алгебра та аналітична геометрія, Математичний аналіз, Математична логіка та теорія алгоритмів, Дискретна математика, Чисельні методи, Основи фізики, Фізика коливально-хвильових процесів, Теорія ймовірностей, ймовірності процеси та математична статистика, Методи і системи штучного інтелекту, Методи оптимізації, Основи системного аналізу.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Елементи теорії многочленів

Тема 1.1. Алгебра многочленів

Многочлени. Ділення з залишком. Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда

Тема 1.2. Корені многочленів

Корені многочленів. Основна теорема алгебри. Теореми Безу та Вієта. Результат системи двох многочленів.

Тема 1.3. Раціональні дроби

Розклад правильних раціональних дробів на елементарні

Розділ 2. Унітарні та евклідові простори

Тема 2.1. Скалярний добуток, нерівність Коші-Буняковського, лінійні функціонали, теорема Ріса. Метод ортогоналізації Грама-Шмідта. Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір.

Тема 2.2. Спряжений оператор та його матриця. Самоспряжені, нормальні та унітарні оператори.

Розділ 3. Лінійні оператори та їхні нормальні форми

Тема 3.1. Власні числа та вектори лінійного оператора, кореневі (приєднані) вектори. Характеристичний многочлен матриці оператора як інваріант. Теорема Гамільтона-Келі.

Тема 3.2. Клітина Жордана, нільпотентний оператор. Зведення матриці до нормальної форми Жордана.

Тема 3.2. Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

Тема 3.3. Жорданова нормальна форма. Нормальна форма у дійсному випадку. Нормальні форми самоспряжених та унітарних операторів.

Розділ 4. Квадратичні форми

Тема 4.1. Квадратичні форми

Тема 4.2. Класифікація квадратичних форм

Зведення квадратичних форм до канонічного вигляду унітарним перетворенням. Критерій Сильвестра. Зведення рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного вигляду.

Розділ 5. Тензорний добуток матриць

Тема 5.1. Тензорний добуток матриць, їхній спектр, застосування до оператора Ляпунова.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова:

1. Лінійна алгебра: Курс лекцій [Електронний ресурс]: курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,98 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 273 с.
2. Лінійна алгебра: Практикум [Електронний ресурс]: практикум для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,42 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 139 с.
3. Нормальні форми та функції матриць [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», освітньої програми «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 57 с.
4. Алгебра та геометрія. Лінійна алгебра [Електронний ресурс]: посібн. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», освітньої програми «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,54 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 243 с. (6,24 авт. арк.)

Додаткова:

1. Безущак О.О. Навчальний посібник із лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.
2. Завало С.Т. Курс алгебри/С.Т. Завало. – К., Вища школа, 1985.
3. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел/С.Т. Завало, С.С. Левищенко та ін. – К., Вища школа, 1986. – 264 с.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
01.	Алгебра многочленів Многочлени. Ділення з залишком. Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда Корені многочленів. Основна теорема алгебри. Теорема Безу та Вієта. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [2], Розділи 1,2.
02.	Результант системи двох многочленів. Дробово-раціональні функції, розклад на елементарні дроби. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [2], Розділ 2.2.
03.	Скалярний добуток, нерівність Коші-Буняковського, лінійні функціонали, теорема Піса. Метод ортогоналізації Грама-Шмідта. Рекомендована література: [1], [2], [4]. СРС: [2], Розділи 3.1, 3.2.

04.	Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір. Оператор проектування, його матриця та властивість ідемпотентності. Рекомендована література: [1], [2], [4]. СРС: [2], Розділ 4.
05.	Власні числа та вектори лінійного оператора, кореневі (приєднані) вектори. Характеристичний многочлен матриці оператора як інваріант. Теорема Гамільтона-Келі. Мінімальний многочлен. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], Розділ 5.
06.	Спряжений оператор та його матриця. Самоспряжені, нормальні та унітарні оператори. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], Розділ 6.
07.	Клітина Жордана та її властивість. Вибір базису з корневих (приєднаних векторів). Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2]. Розділ 7.
08.	Зведення матриці до нормальної форми Жордана. Приклади матриць третього та четвертого порядку. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], [3]. Розділ 8.
09.	Жорданова нормальна форма. Нормальна форма у дійсному випадку. Нормальні форми самоспряжених та унітарних операторів. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], Розділ 9.
10.	Функції від матриці лінійного оператора, експонента оператора. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], Розділ 10.
11.	Білінійні форми. Матриця білінійної форми. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], Розділ 11.
12.	Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду методом Лагранжа. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [2], Розділ 12.
13.	Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду унітарним перетворенням. Рекомендована література: [1]- [4]. СРС: [2], Розділ 13.
14.	Закон інерції квадратичних форм. Рекомендована література: [1], [2], [4]. СРС: [1]. Розділ 15.1.
15.	Критерій Сильвестра. Рекомендована література: [1]- [9]. СРС: [1], Розділ 16.1.
16.	Інваріанти поверхонь другого порядку. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [1], Розділ 17.
17.	Зведення поверхонь другого порядку до канонічного вигляду. Рекомендована література: [1], [2].
18.	Тензорний добуток матриць. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [1], Розділ 21, [2], Розділ 18.

Практичні заняття

№	Назва теми занять та перелік основних питань
01.	Многочлени. Ділення з залишком. Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда. Схема Горнера.
02.	Результант системи двох рівнянь.
03.	Скалярний добуток, нерівність Коші-Буняковського, метод ортогоналізації Грама-Шмідта.
04.	Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір.
05.	Власні числа та вектори лінійного оператора. Характеристичний многочлен матриці оператора як інваріант.

06.	<i>Спряжений оператор та його матриця. Самоспряжені оператори. Полярний розклад. Нормальні та унітарні оператори.</i>
07.	<i>Власні числа та вектори нормального оператора, зокрема, симетричного та унітарного. Подібні оператори.</i>
08.	<i>Кореневі (приєднані) вектори. Ланцюги корневих підпросторів.</i>
09.	<i>Зведення матриці до нормальної форми Жордана. Приклади матриць третього, четвертого та п'ятого порядків.</i>
10.	<i>Нормальна форма у дійсному випадку.</i>
11.	<i>Функції від матриці лінійного оператора, експонента оператора.</i>
12.	<i>Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду методом Лагранжа.</i>
13.	<i>Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду унітарним перетворенням.</i>
14.	<i>Канонічні рівняння поверхонь другого порядку.</i>
15.	<i>Лінійчаті поверхні.</i>
16.	<i>Зведення поверхонь другого порядку до канонічного вигляду.</i>
17.	<i>Зведення поверхонь другого порядку до канонічного вигляду (продовження)..</i>
18.	<i>Тензорні добутки матриць.</i>

6. Самостійна робота студента

№ з/п	Назви тем і питань, що виносяться на самостійне опрацювання та посилання на навчальну літературу	Кількість годин СРС
1	<i>Алгебра многочленів Многочлени. Ділення з залишком. Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда. Корені многочленів. Основна теорема алгебри. Теорема Безу та Вієта. СРС: [2], Розділи 1,2.</i>	2
2	<i>Результант системи двох многочленів. Дробово-раціональні функції, розклад на елементарні дроби. СРС: [2], Розділ 2.2.</i>	2
3	<i>Скалярний добуток, нерівність Коші-Буняковського, лінійні функціонали, теорема Ріса. Метод ортогоналізації Грама-Шмідта. СРС: [2], Розділи 3.1, 3.2.</i>	2
4	<i>Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір. Оператор проектування, його матриця та властивість ідемпотентності. СРС: [2], Розділ 4.</i>	2
5	<i>Власні числа та вектори лінійного оператора, кореневі (приєднані) вектори. Характеристичний многочлен матриці оператора як інваріант. Теорема Гамільтона-Келі. Мінімальний многочлен. СРС: [2], Розділ 5.</i>	2
6	<i>Спряжений оператор та його матриця. Самоспряжені, нормальні та унітарні оператори. СРС: [2], Розділ 6.</i>	2
7	<i>Клітина Жордана та її властивість. Вибір базису з корневих (приєднаних векторів). СРС: [2]. Розділ 7.</i>	2
8	<i>Зведення матриці до нормальної форми Жордана. Приклади матриць третього та четвертого порядку. СРС: [2], [3]. Розділ 8.</i>	2
9	<i>Жорданова нормальна форма. Нормальна форма у дійсному випадку. Нормальні форми самоспряжених та унітарних операторів. СРС: [2], Розділ 9.</i>	2
10	<i>Функції від матриці лінійного оператора, експонента оператора. СРС: [2], Розділ 10.</i>	2
11	<i>Білінійні форми. Матриця білінійної форми. СРС: [2], Розділ 11.</i>	2
12	<i>Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду методом Лагранжа. СРС: [2], Розділ 12.</i>	2
13	<i>Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду унітарним перетворенням. СРС: [2], Розділ 13.</i>	2
14	<i>Критерій Сильвестра. СРС: [1], Розділ 16.1.</i>	2
15	<i>Інваріанти поверхонь другого порядку.</i>	2

№ з/п	Назви тем і питань, що виносяться на самостійне опрацювання та посилання на навчальну літературу	Кількість годин СРС
	<i>СРС: [1], Розділ 17.</i>	
16	<i>Зведення поверхонь другого порядку до канонічного вигляду. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [1], Розділ 19.</i>	2
17	<i>Тензорний добуток матриць. Рекомендована література: [1], [2]. СРС: [1], Розділ 21, [2], Розділ 18.</i>	1
18	<i>Підготовка до екзамену</i>	30

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Усі роботи студенти мають прикріплювати в особистому кабінеті гугл-класу. Дедлайни кожного завдання позначені в щотижневих завданнях у гугл-класі. Роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності. У період роботи в дистанційному режимі лектор може запропонувати студентам пройти запропоновані ним онлайн-курси на платформі Coursera. Також сертифікати цих курсів можуть бути частково зараховані згідно до Положення.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль: екзамен (2 семестр)

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Бали: Екзамен:рейтинг +екзаменаційна контрольна робота</i>	<i>Оцінка</i>
100...95	Відмінно
94...85	Дуже добре
84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за:

- ~ виконання домашніх робіт (18) - максимум 2 бали за ДЗ;
- ~ виконання контрольних робіт (модульна контрольна робота МКР розбивається на дві частини - МКР-1 і МКР-2).

1. Критерії нарахування балів.

1) Кожна частина модульної контрольної роботи (МКР-1, МКР-2) оцінюється у 12 балів за такими критеріями:

~ "відмінно" ~ повна відповідь (не менше 90% необхідної інформації) ~ 11-12 балів;

~ "добре" ~ достатньо повна відповідь (не менше 75% необхідної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями ~ 8-10 балів;

~ "задовільно" ~ неповна відповідь (не менше 60% необхідної інформації) та незначні помилки ~ 6-7 балів;

~ "незадовільно" ~ відповідь не відповідає вимогам на "задовільно" ~ 0 балів;

2) Кожна домашня робота оцінюється максимум у 2 бали;

3) Кожна контрольна робота (МКР-1, МКР-2) оцінюється у 12 балів ~ "незадовільно" ~ відповідь не відповідає вимогам на "задовільно" ~ 0-5 балів;

2. Умовою першої атестації є поточний рейтинг не менше 50% запланованих балів. Умова другої атестації ~ поточний рейтинг не менше 50% запланованих балів.

3. Умовою допуску до екзамену є стартовий рейтинг не менше 40 балів.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Бали: практичні заняття та лекції +МКР + екзаменаційна робота</i>	<i>Оцінка</i>
100...95	Відмінно
94...85	Дуже добре
84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
стартовий рейтинг менше 40 балів	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Теоретичні питання до екзамену:

- Дії над многочленами, схема Горнера, теорема Безу, наслідок.*
- Основна теорема алгебри. Розклад многочлена на множники, кратність кореня, формули Вієта для $P_n(z)$.*
- Розклад раціонального дроби на суму елементарних.*
- Унітарний та евклідовий простір, приклади. Евклідов простір, його аксіоми. Нерівність Коші-Буняковського і Мінковського. Норма вектора, ортонормований базис.*
- Зображення лінійного функціоналу у унітарному просторі.*
- Власні значення та власні вектори лінійного оператора і матриці.*
- Кореневі підпростори.*
- Теорема Гамільтона-Келі та зведення матриці до нормальної форми Жордана.*
- Зведення до нормальної форми у дійсному випадку; циклічна нормальна форма.*
- Функції від матриць.*
- Спряжені, нормальні, самоспряжені та унітарні оператори, їхній спектр.*
- Зведення матриці самоспряженого оператора до діагонального вигляду.*
- Квадратична форма, її матриця. Зведення квадратичної форми до канонічного виду. Знаковизначеність квадратичної форми. Критерій Сильвестра.*
- Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.*
- Тензорний добуток матриць.*

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено к.ф.-м.н., доцент, Бохонов Юрій Євгенович

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол № 13 від 05.06.2024)

Погоджено Методичною комісією НН ІПСА (протокол № 10 від 24.06.2024)

Додаток А – Питання для МКР1.

1. Дії з многочленами, схема Горнера, теорема Безу, алгоритм Евкліда, інтерполяційний многочлен Лагранжа.
2. Результат двох многочленів.
3. Скалярний добуток, унітарні і евклідові простори. Метод ортогоналізації Грама-Шмідта.
4. Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір

Зразок білету:

1. Для многочленів $P(x)$ і $Q(x)$, що мають найбільший спільний дільник $d(x)$, знайти многочлени $u(x)$, $v(x)$ і цей дільник, так що виконується рівність $P(x)u(x) + Q(x)v(x) = d(x)$.

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

2. Застосовуючи метод ортогоналізації, виходячи з системи векторів

$$a_1 = (0, 0, -2, -1), a_2 = (0, 1, 2, 1), a_3 = (0, 1, -2, -1), a_4 = (1, -2, 0, -5),$$

побудувати ортогональну систему векторів. Знайти матрицю Грама даної системи і зробити висновок про її лінійну залежність чи незалежність.

3. Нехай координати наступних векторів задано у ортонормованому базисі:

$$a_1 = (1, -2, 3, 4), a_2 = (2, 0, 5, 1), a_3 = (4, -1, 2, 5).$$

L - лінійна оболонка цієї системи. Знайти базис ортогонального доповнення L^\perp до підпростору L .

Додаток Б – Питання для МКР2.

1. Власні числа та вектори лінійного оператора. Кореневі підпростори.
2. Теорема Гамільтона-Келі та зведення матриці до нормальної форми Жордана.
3. Спряжені, нормальні, самоспряжені та унітарні оператори, їхній спектр.
4. Квадратичні форми, методи їхнього зведення до канонічного вигляду. Закон інерції.

Зразок білету:

1. Звести матрицю A до нормальної форми Жордана J . Знайти жордановий базис і матрицю T оператора переходу до нього від канонічного базису.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

2. Ортогональним перетворенням звести квадратичну форму до канонічного вигляду. Знайти базис, в якому ця форма має канонічний вигляд, а також матрицю оператора перетворення.

$$\Omega(x, x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Цю саму квадратичну форму звести до канонічного вигляду методом Лагранжа. Переконайтесь у справедливості закону інерції квадратичних форм.

3. Знайти проекцію вектора $x = (4, 0, 1, -1)$ на підпростір, породжений векторами

$$a_1 = (3, 2, 0, 2), a_2 = (4, 2, 5, 3), a_3 = (3, 2, 3, 1).$$