



# ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	12 Інформаційні технології
Спеціальність	124 Системний аналіз і управління
Статус дисципліни (код)	Нормативна (ПО 8)
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна/змішана
Рік підготовки, семестр	3 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	3,5 кредитів ЄКТС/105 год.
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен
Розклад занять	<a href="https://schedule.kpi.ua/">https://schedule.kpi.ua/</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович, <a href="mailto:yu.a.chapovsky@gmail.com">yu.a.chapovsky@gmail.com</a> Практичні: к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович/ к.ф.-м.н., доцент, <a href="mailto:yu.a.chapovsky@gmail.com">yu.a.chapovsky@gmail.com</a> Мальцев Антон Юрійович, <a href="mailto:maltsev.anton@iit.kpi.ua">maltsev.anton@iit.kpi.ua</a>
Розміщення курсу	Googleclassroom

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вивчення навчальної дисципліни націлено на формування, розвиток та закріплення у здобувачів таких загальних та фахових **компетентностей**: ЗК 2 Здатність планувати і управляти часом. ЗК 3 Здатність абстрактно мислити, застосовувати методи аналізу і синтезу. ЗК 15 Здатність реалізовувати свої права та обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності громадянського (вільного демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності. ФК 5 Здатність формулювати задачі оптимізації при проектуванні систем управління та прийняття рішень, а саме: математичні моделі, критерії оптимальності, обмеження, цілі управління; обирати раціональні методи та алгоритми розв'язання задач оптимізації та оптимального керування. Внаслідок вивчення курсу студент повинен бути здатний продемонструвати такий **програмний результат навчання**: ПРН 01 Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу. ПРН 05 Знати основні положення теорії метричних просторів, лебегівської теорії міри та інтеграла, теорії обмежених лінійних операторів в банахових та гільбертових просторах, застосовувати техніку і методи функціонального аналізу для розв'язання задач керування складними процесами в умовах невизначеності. ПРН 07 Знати основи теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень, вміти застосовувати їх на практиці для розв'язування прикладних задач управління і проектування складних систем. ПРН 16 Розуміти і реалізовувати свої права і обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності вільного демократичного суспільства, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності.

У кінці вивчення курсу студент повинен **знати**: елементарні поняття функціонального аналізу (стандартні нормовані простори, відкриті та замкнені множини, щільні множини, компактні множини, ряди Фур'є в гільбертовому просторі; базові факти з теорії лінійних операторів: неперервність, спектр оператора, спектральну теорему для самоспряжених компактних операторів).

## **2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

Дисципліна передуює і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Функціональний аналіз», «Рівняння математичної фізики», «Основи системного аналізу», «Теорія прийняття рішень», «Теорія випадкових процесів», «Стаціонарні випадкові процеси». Вивчення курсу ґрунтується на широкому використанні основних результатів дисциплін: «Алгебра та геометрія» та «Математичний аналіз».

## **3. Зміст навчальної дисципліни**

**Розділ 1.** Лінійні нормовані простори.

Означення та приклади лінійних нормованих просторів. Еквівалентність норм. Відкриті та замкнені множини. Послідовності в ЛНП. Банахові простори. Неперервні відображення. Нерухома точка, теорема Банаха про стиск. Компактні підмножини. Щільні підмножини, теореми Вейерштрасса. Гільбертові простори та теорема про проекцію. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.

**Розділ 2.** Лінійні обмежені оператори та функціонали.

**Тема 2.1.** Загальні положення.

Лінійні обмежені функціонали. Норма лінійного функціонала. Спряжений простір. Теорема Фреше-Рісса. Теорема Хана-Банаха. Обмежені оператори. Норма лінійного оператора. Простір лінійних операторів. Теорема Банаха про обернений оператор. Резольвента та спектр лінійного оператора. Компактні оператори.

**Тема 2.2.** Лінійні оператори в гільбертовому просторі.

Спряжений оператор: означення, приклади, існування, властивості. Певні типи операторів: нормальні, самоспряжені, додатні, проектори, унітарні. Спектр самоспряженого оператора. Критерій Вейля. Спектральна теорема для компактного самоспряженого оператора.

## **4. Навчальні матеріали та ресурси**

Базова:

1. Т.В. Боярищева, Т.В. Гудивок, О.О. Погоріляк. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика». – Ужгород, 2013. – 125 с.
2. С.А. Ус, Функціональний аналіз. Навчальний посібник. - Дніпропетровськ, 2013.
3. І.В. Федак, Курс лекцій x функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Частина 4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. -- Івано-Франківськ, 2020.
4. Практикум із курсу «Функціональний аналіз», Кафедра математичного моделювання ДНУ ім. Олесь Гончара, -- Дніпропетровськ, 2009.
5. Богданський Ю.В. Курс лекцій з функціонального аналізу. "Політехніка", Київ, 2003.
6. Богданський Ю.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Метричні простори. Інтеграл Лебега (електронний посібник) К., КПІ, 2018.
7. Богданський Ю.В. Інтеграл в курсі математичного аналізу (електронний посібник). – К., КПІ, 2013.

Додаткова:

8. L. Schwartz, *Topologie generale et analyse fonctionelle*. Hermann, -- Paris, 1993.
9. S. Banach. *Teorie des operations lineares*, -- Warsaw, 1932.
10. N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*. -- Cambridge, 1933.
11. L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, -- N.Y., Chicago, San-Francisco, 1953.

5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Лінійні простри та лінійні оператори, прямі суми, прямі добутки, фактор-простір.
2	Нерівності Гелдера та Мінковського. Півнорма, норма на лінійному просторі: означення, приклади, властивості.
3	Лінійні нормовані простори $l_K^p, F_b(\Omega; K), L_K^p(\Omega, \mu)$ .
4	Еквівалентність норм. Відкриті та замкнені множини,
5	Послідовності в лінійному нормованому просторі Банахові простори: означення, приклади $(l_K^p, F_b(\Omega; K))$ .
6	Ряди в банаховому просторі. Теорема Ріса-Фішера.
7	Неперервні відображення. Теорема Банаха про стиск.
8	Щільні множини. Теорема Вейерштрасса. Щільні множини в $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ .
9	Гільбертові простори. Теорема про проекцію.
10	Ряд Фур'є в гільбертовому просторі.
11	Компактні множини: означення, приклади. Компактні множини: властивості. Критерій Фреше-Хаусдорфа. Компактні підмножини $l_K^p, C(X)$ .
12	Неперервні функцій на компактах. Лінійні функціонали: означення, приклади. Характеризація обмежених лінійних функціоналів. Норма лінійного функціоналу. Приклади. Спряжений простір.
13	Простори $l_p^*$ . Простори $(L_K^p(\Omega, \mu))^*$ . Теорема Фреше-Рісса. Теорема Хана-Банаха. Обмежені оператори. Норма оператора. Лінійний простір $L(E_1, E_2)$ . Обернений оператор. Теорема Банаха про обернений оператор.
14	Спектр та резольвентна множина лінійного оператора.
15	Компактні оператори: означення, приклади. Лема Ріса про майже ортогональний вектор. Ідеал компактних операторів.
16	Спряжений оператор в гільбертовому просторі: означення, приклади. Норма спряженого оператора. Властивості спряження. Спектр та резольвента спряженого оператора.
17	Компактність спряженого оператора. Класи операторів. Спектральні властивості самоспряжених операторів.
18	Спектральні властивості компактних операторів. Спектральна теорема для компактних самоспряжених операторів.

Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	Лінійні простори. Приклади. Пряма сума, прямий добуток, факторпростори.
2	Півнорма, норма на лінійних просторах.
3	Еквівалентність норм. Відкриті та замкнені множини в лінійних нормованих просторах. Збіжність послідовностей.
4	Повнота лінійного нормованого простору.
5	Неперервні відображення. Теорема Банаха про стиск.
6	Щільні підмножини.
7	Неперервні функції на компактах.
8	Гільбертові простори. Проекція на підпростір.
9	Ряди Фур'є.
10	Компактні підмножини.
11	Лінійні функціонали. Норма лінійного функціоналу.
12	Спряжений простір..
13	Обмежені оператори. Норма оператора.
14	Спектр та резольвентна множина лінійного оператора.
15	Компактні оператори.
16	Спряжений оператор в гільбертовому просторі.

17	Самоспряжені, нормальні, унітарні оператори. Ортогональні проєктори.
18	Спектральна теорема для компактних самоспряжених операторів.

## Політика та контроль

### 6. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Усі роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, етична поведінка студентів визначені у Кодексі честі <https://kpi.ua/code>.

### 7. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

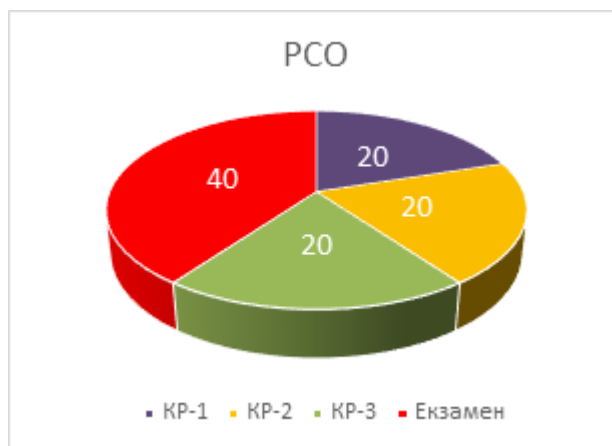
Семестровий контроль: екзамен

Умовою допуску до екзамену є стартовий рейтинг не менше 30 балів.

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за<sup>1</sup>:

КР-1	20 балів
КР-2	20 балів
КР-3 (МКР)	20 балів

Екзаменаційна робота / екзамен	40 балів
--------------------------------	----------



7.1. Семестровий рейтинг складається з рейтингових балів, і не перевищує  $R_{\max} = 100$  балів. У семестрі здобувач може набрати 60 балів, на екзамені — 40 балів. Бали за семестр рахуються як сума набраних балів за всі контрольні заходи.

7.2. Кожний контрольний захід оцінюється у частках від одиниці  $G$  ( $0 - 1$ ). Бали за кожну контрольну роботу нараховуються як  $R = 20 \cdot G$ , за екзамен як  $R = 40 \cdot G$ .

7.3. У разі, якщо здобувач отримав за роботу в семестрі оцінку не нижче ніж 60% від максимальної оцінки за його бажанням, висловленим в письмовій формі, його семестрова оцінка  $R$  може бути порахована за формулою  $R = \min\{84, 100 \cdot (G_1 + G_2 + G_3)/3\}$ , де  $G_1, G_2, G_3$  — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

7.4. Здобувач допускається до екзамену або перескладання, якщо семестрова складова його балів становить не нижче, ніж 30 балів. В іншому випадку, або за власним бажанням, здобувач може підвищувати свої бали замість складання екзамену або першого перескладання.

7.5. Рейтингова оцінка з кредитного модуля переводиться в оцінку ECTS згідно таблиці

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Бали: контрольні роботи + екзаменаційна робота	Оцінка
100...95	Відмінно

<sup>1</sup>Кожна контрольна робота може бути замінена самостійною або розрахунковою роботою. Кількість можливих балів за контрольний захід при цьому не змінюється.

У разі неможливості проведення екзамену за наявності форс-мажорних обставин, бали за семестр  $R$  нараховуються за формулою  $R = 100 \cdot (G_1 + G_2)/2$ , де  $G_1, G_2$  — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

94...85	Дуже добре
84...75	Добре
74...65	Задовільно
64...60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
стартовий рейтинг менше 30 балів	Не допущено

7.6. Для допуску до контрольного заходу у дистанційному режимі здобувач має надіслати, не пізніше ніж за 3 дні до дати проведення контрольного заходу, свою фотографію та фотографію написаних від руки наступних своїх даних: ПІБ, група, місце поточного знаходження (місто, район, країна), підпис. Ці дані надсилаються один раз на семестр з пошти, на яку здобувач згоден отримати завдання контрольного заходу (бажано в домені @lll.kpi.ua). У разі зміни якихось з цих даних або поштової адреси, дані надсилаються знову. У разі відсутності вищелзгачених даних, здобувач отримує 0 балів за контрольний захід. У випадку екзамену або перескладання, здобувач вважається таким, хто не з'явився.

7.7. Виконання і оцінювання **контрольної роботи** або **екзамену**, проведеному в **дистанційному режимі**.

7.7.1. Здобувач отримує завдання контрольного заходу на пошту, вказану в п. 7.6.

7.7.2. Розв'язок отриманого завдання здійснюється самостійно. Виконане завдання контрольного заходу надсилається як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить фотографії рукописного тексту, і розмір якого не перевищує 10 Mb. Текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісні.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.7.3. Виконання завдання має бути здійснено у зазначений в умовах час. У разі запізнення більше, ніж на 10% від зазначеного в умові часу, робота не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.7.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант завдання, ПІБ та групу** виконавця роботи. Кожна сторінка має містити його **підпис**. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.7.5. Екзамен може бути також проведений у формі співбесіди за допомогою комп'ютерних засобів. При цьому відсутність працюючої камери, або мікрофону, або відсутність інтернету означає неявку студента на іспит.

7.8. Виконання і оцінювання **самостійної (розрахункової) роботи**, проведеної в **дистанційному режимі**.

7.8.1. Здобувач отримує завдання самостійної (розрахункової) роботи на пошту, вказану в п. 7.6, або на пошту групи.

7.8.2. Виконана самостійна (розрахункова) робота має бути надіслана як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить саму роботу, набрану за допомогою будь-якого редактора, або фотографії рукописного тексту. У другому випадку текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісними. Розмір файлу не має перевищувати 10 Mb.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.8.3. Робота має бути надіслана не пізніше вказаної в умовах дати. Максимальний бал за роботу зменшується на 10% за один день запізнення. У разі зіпзнення на два чи більше днів робота оцінюється в 0 балів.

7.8.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант, ПІБ та групу** виконавця роботи. Також перша сторінка має містити підпис виконавця у разі фотографій рукописного тексту. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.8.5. Будь-яка кількість робіт (розв'язаних завдань), що надішли вчасно і містять понад 90% однакових формул (викладок), буде оцінюватися як одна робота (завдання), тобто кожен (спів)автор отримує бали за одну роботу (завдання), поділені на кількість (спів)авторів. Роботи (завдання), що надішли із запізненням і містять понад 90% формул (викладок), які містяться в раніше надісланих роботах, оцінюються в 0 балів.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

Складено к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович.

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол № 3 від 08.10.2025 р.)

Погоджено Методичною комісією ІПСА (протокол № 2 від 09.10.2025 р.)