Ю.А. Чаповский

Лекции по математическому анализу

Группы: КА 63–64

I курс, семестр 1

Киев—2016

Оглавление

Глава 1

Общие понятия

1.1 Множества и операции над ними

В математических формулировках используются следующие сокращения:

$\exists$	существует;
$\exists!$	существует и единственный;
$\forall$	для всех;
$\Longrightarrow$	следует;
$\Longleftrightarrow$	эквивалентно.

Понятия множества и элемента являются первичными. Множества определяются своими элементами.

Пример 1.1.1. Если A — множество букв в латинском алфавите, то

$$A = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}.$$

То, что множество A содержит элемент a, т.е. a является элементом множества A, записывается как

$$a \in A \qquad \text{или} \qquad A \ni a.$$

Если A не содержит элемент a, т.е. a не является элементом множества, то это записывается как

$$a \notin A.$$

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым множеством* и обозначается $\emptyset$.

Также используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$;
$\mathbb{Z}_+$	множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел;
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных действительных чисел;
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел.

Синонимом слова «множество» является слово «семейство».

Определение 1.1.2. Множество A называется *подмножеством* множества B, обозначается $A \subset B$ или $B \supset A$, если все элементы A являются элементами B, т.е.

$$A \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a \in A \Longrightarrow a \in B).$$

В этом случае также говорят, что B *содержит* A.

Пример 1.1.3.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Используются следующие обозначения для подмножеств $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},\\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\end{aligned}$$

если $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

Определение 1.1.4. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е.

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A \subset B \quad \text{и} \quad B \subset A).$$

Определение 1.1.5. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A или B, т.е.

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}.$$

Пример 1.1.6.

1. Пусть $A = \{a, b, c\}$ а $B = \{b, c, d\}$. Тогда $A \cup B = \{a, b, c, d\}$.

2. $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$.

Определение 1.1.7. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B, т.е.

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}.$$

Пример 1.1.8. 1. Пусть $A = \{a, b, c\}$ а $B = \{b, c, d\}$. Тогда $A \cap B = \{b, c\}$.

2. $(1, 3) \cap (2, 4) = (2, 3)$.

3. $(1, 2) \cap (2, 3) = \emptyset$.

Определение 1.1.9. Пусть T — множество, и для каждого $t \in T$ задано множество X_t. *Объединением* множеств семейства $\mathcal{X} = \{X_t : t \in T\}$ называется множество $\cup_{t \in T} X_t$, состоящее из элементов всех множеств X_t, $t \in T$, т.е.

$$\bigcup_{t \in T} X_t = \{x : x \in X_t \text{ для некоторого } t \in T\}.$$

Пересечением множеств семейства $\mathcal{X}$ называется множество $\cap_{t \in T} X_t$, состоящее из элементов общих для всех X_t, $t \in T$, т.е.

$$\bigcap_{t \in T} X_t = \{x : x \in X_t \text{ для всех } t \in T\}.$$

Пример 1.1.10. 1. $T = \mathbb{N}$, $X_n = \{n\}$. Тогда $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \mathbb{N}$.

2. $T = \mathbb{Z}$, $X_m = \{2m\}$. Тогда $\cup_{m \in \mathbb{N}} = 2\mathbb{Z}$ — четные целые числа.

3. $T = \mathbb{N}$, $X_n = \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\cap_{n \in \mathbb{N}} = \{1\}$.

Определение 1.1.11. *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B$ состоящее из элементов множества A, которые не лежат в B, т.е.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Пример 1.1.12. 1. Пусть $A = \{a, b, c\}$ а $B = \{b, c, d\}$. Тогда $A \setminus B = \{a\}$.

2. $[a, b] \setminus \{a\} = (a, b]$.

3. Если A — произвольное множество, то $A \setminus A = \emptyset$.

Определение 1.1.13. Если X — некоторое фиксированное множество, а $A \subset X$, то множество $A^c = X \setminus A$ называется *дополнением* множества A в X.

Замечание 1.1.14. Обычно рассматриват различные подмножества A некотрого фиксированного множества X. В этом случае A^c просто наывается дополнением.

Пример 1.1.15. 1. $(a, b)^c = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$. (Имеется в виду, что $X = \mathbb{R}$).

2. Для произвольного $A \subset X$ имеем, что $(A^c)^c = A$.

Определение 1.1.16. *Прямым* или *декартовым произведением* множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), где a пробегает все элементы множества A, а b — все элементы множества B, т.е.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad \text{и} \quad b \in B\}.$$

Если $x = (a, b) \in A \times B$, то a называется *первой координатой* элемента x, а b — его второй координатой.

Два элемента $x, x' \in A \times B$ называются *равными*, если у них равны первые координаты и вторые координаты, т.е. если $x = (a, b)$ а $x' = (a', b')$, то

$$x = x' \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a = a' \quad \text{и} \quad b = b').$$

Замечание 1.1.17. Для множества A используется обозначение $A \times A = A^2$.

Пример 1.1.18. 1. Пусть $A = \{a, b\}$ а $B = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

2. Множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ обозначается $\mathbb{R}^2$ и может быть отождествлено с множеством всех точек плоскости.

3. Множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$, $(a, b) \times (c, d)$, $\{x_0\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{y_0\}$ являются подмножествами $\mathbb{R}^2$ и могут быть изображены на плоскости, см. рис. 1.1.

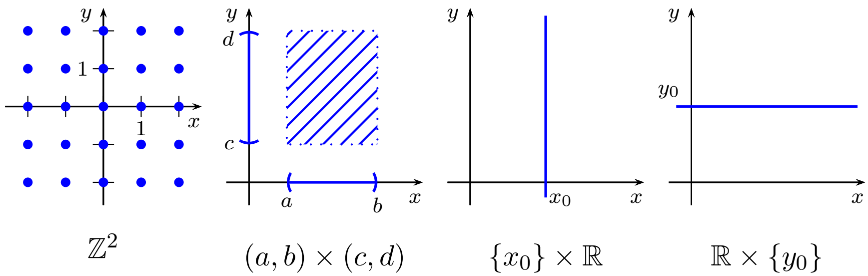


Рис. 1.1: Подмножества $\mathbb{R}^2$.

Определение 1.1.19. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Прямым* или *декартовым произведением* множеств $X_1, \ldots, X_n$ называется множество $X_1 \times \ldots \times X_n$, состоящее из всех упорядоченный n-ок элементов множеств $X_1, \ldots, X_n$, т.е.

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

Два элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ называются *равными*, если все соответствующие координаты равны, т.е.

$$x = x' \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_1 = x'_1, \ \ldots, \ x_n = x'_n).$$

Замечание 1.1.20. Для множества X используется обозначение

$$\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}} = X^n.$$

Пример 1.1.21. Множество

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

может быть отождествлено с множеством точек пространства.

Задачи

[6] *КР*: I.1.1 (1, 3, 5); I.1.2 (1, 3, 5); I.1.3 (1, 3); I.1.4 (1, 3, 5); I.1.5 (1); I.1.6 (1, 3).

ДР: I.1.1 (2, 4, 6); I.1.2 (2, 4, 6); I.1.3 (2, 4, 5); I.1.4 (2, 4, 6); I.1.5 (2); I.1.6 (2, 4).

1.2 Функции

Определение 1.2.1. Пусть X, Y — множества. Тройка (X, Y, f) называется *функцией*, определенной на X, со значениями в Y в силу закона f, если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие (единственный) элемент $y \in Y$. Для функции используются следующие обозначения: $f\colon X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$,

$$X \ni x \xmapsto{f} y \in Y \qquad \text{или} \qquad X \ni x \longmapsto f(x) \in Y.$$

При этом, множество X называется *областью определения*, множество

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

называется *множеством значений*.

Для произвольного $A \subset X$ множество

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

называется *образом* множества A.

Для произвольного $B \subset Y$ множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

называется *полным прообразом* множества B.

Пример 1.2.2.

1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Тогда, см. рис. 1.2(a), $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. Также,
$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}, \quad f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, \quad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset,$$
$$f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}.$$

2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\big((x, y)\big) = x$. Тогда $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\}) = \{a\} \times \mathbb{R}$.

3. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t)$. Множество значений показано на рис. 1.3.

Определение 1.2.3. *Графиком* функции $f\colon X \to Y$ называется множество $\Gamma_f \subset X \times Y$, определенное как

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Пример 1.2.4. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. График f показан на рис. 1.2(a). График функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, показан на рис. 1.2(b).

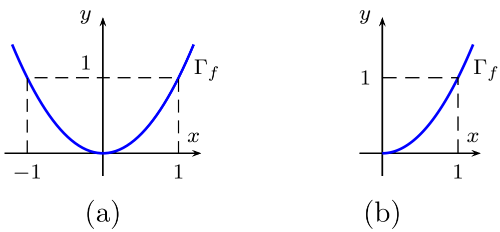


Рис. 1.2: $f(x) = x^2$. (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; (b) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

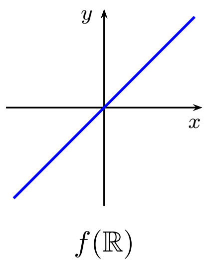


Рис. 1.3: Образ функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t)$.

Замечание 1.2.5. Произвольное множество $\Gamma \subset X \times Y$ является графиком некоторой функции $f\colon X \to Y$, если для произвольного $x_0 \in X$ множества $\{x_0\} \times Y$ и Γ пересекаются не более чем в одной точке (x_0, y_0). В этом случае, в точке x_0 значением функции f, чьим графиком является множество Γ, будет число $f(x_0) = y_0$. На рис. 1.4 показано множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, не являющееся графиком функции.

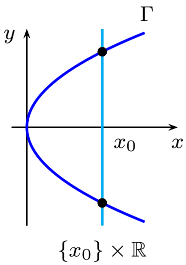


Рис. 1.4: Множество Γ, не являющееся графиком функции.

Определение 1.2.6. Пусть $f\colon X \to Y$ и $X_0 \subset X$. Рассматривая f как заданную только на множестве X_0, получается новая функция, которая обозначается $f{\restriction}_{X_0}$ и называется *ограничением* функции f на подмножество X_0.

Пример 1.2.7. Если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, то $f{\restriction}_{\mathbb{R}_+}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является ограничением функции f на $\mathbb{R}_+$.

Определение 1.2.8. Функция $f\colon X \to Y$ называется *инъективной* (или *инъекцией*), если выполнено условие:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : \qquad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

или, что то же самое,

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : \qquad f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Функция $f\colon X \to Y$ называется *сюръективной* (или *сюръекцией*), если выполнено условие

$$f(X) = Y$$

или, что то же самое,

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : \qquad f(x) = y.$$

Функция $f\colon X \to Y$ называется *биективной* (или *биекцией*), если она инъективна и сюръективна.

Пример 1.2.9.
1. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, не является инъективной, т.к. $f(-1) = f(1)$ и $-1 \neq 1$. Она не является сюръективной, поскольку $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$, см. рис. 1.2(a).
2. Функция $g = f\restriction_{\mathbb{R}_+}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является биективной (см. рис. 1.2(b)).

Утверждение 1.2.10. *Пусть $f\colon X \to Y$. Следующие условия эквивалентны.*

(a) *Функция f инъективна.*

(b) *Для произвольного $y_0 \in Y$ уравнение $f(x) = y_0$ имеет не более одного решения.*

(c) *Для произвольного $y_0 \in Y$ множество $X \times \{y_0\}$ пересекает Γ_f не более чем в одной точке.*

Доказательство. Без доказательства. □

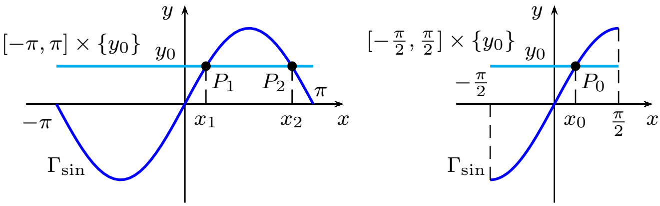
Пример 1.2.11.
1. Функция $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, не является инъекцией, т.к. $\sin x_1 = \sin x_2$ и $x_1 \neq x_2$ (см. рис. 1.5(a)).

   Уравнение $\sin x = y_0$ имеет два решения: x_1 и x_2.

   Пересечение $[-\pi, \pi] \times \{y_0\}$ и $\Gamma_{\sin}$ состоит из двух точек P_1, P_2.
2. Функция $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, является инъекцией (см. рис. 1.5(b)).

   Уравнение $\sin x = y_0$ имеет одно решение x_0 (для y_0 как на рисунке).

   Множество $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \{y_0\}$ пересекает $\Gamma_{\sin}$ в одной точке P_0 (для y_0 как на рисунке).



(a) (b)

Рис. 1.5: (a) $\sin\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ не является инъекцией. (b) $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ является инъекцией.

Утверждение 1.2.12. *Пусть $f\colon X \to Y$. Следующие условия эквивалентны.*

(a) *Функция f сюръективна.*

(b) *Для произвольного $y_0 \in Y$ уравнение $f(x) = y_0$ имеет по крайней мере одно решение.*

(c) *Для произвольного $y_0 \in Y$ множество $X \times \{y_0\}$ пересекает Γ_f по крайней мере в одной точке.*

Доказательство. Без доказательства. □

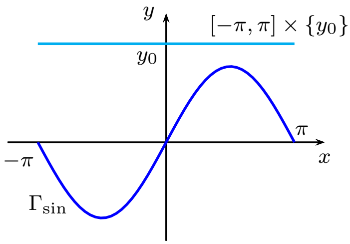


Рис. 1.6: $\sin\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ не является сюръективной.

Пример 1.2.13. 1. Функция $\sin\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ не является сюръективной, поскольку $\sin([-\pi,\pi]) = [-1,1] \neq \mathbb{R}$.

Уравнение $\sin x = y_0$ не имеет решений в $\mathbb{R}$, например, для $y_0 > 1$ (см. рис. 1.6).

Множество $[-\pi,\pi] \times \{y_0\}$ не пересекает $\Gamma_{\sin}$ (для y_0 как на рис. 1.6).

Определение 1.2.14. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Тогда функция $g \circ f\colon X \to Z$, задаваемая как

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

для любого $x \in X$, называется *композицией* функций f и g.

Пример 1.2.15. Пусть $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}_+$, где $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Тогда

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Замечание 1.2.16. Если $X = Y = Z$, т.е. $X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X$, то можно рассмотреть как $g \circ f$ так и $f \circ g$. В общем случае, однако, $g \circ f \neq f \circ g$. Например, пусть $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, где $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Тогда

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2),$$

а

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x.$$

Утверждение 1.2.17. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$. *Тогда*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

С другой стороны,

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h(g(f(x))).$$

$\square$

Определение 1.2.18. Пусть $f\colon X \to Y$. Функция $g\colon Y \to X$ называется *обратной* к функции f, если

$$g(f(x)) = x, \qquad f(g(y)) = y \tag{1.2.1}$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Функция обратная к f обозначается f^{-1}, т.е. $g = f^{-1}$.

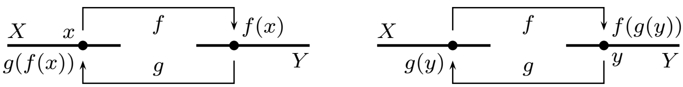


Рис. 1.7: Обратная функция: $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$.

Замечание 1.2.19. Условие (1.2.1) может также быть записано в виде

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y, \tag{1.2.2}$$

где функция $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ определена как $\mathrm{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$, а $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ задается $\mathrm{id}_Y(y) = y$ для всех $y \in Y$.

Пример 1.2.20. 1. Пусть $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$. Тогда $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ определяется как $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Действительно, для $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

поскольку $x \geq 0$.

Также имеем для $y \in \mathbb{R}_+$, что

$$f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

2. Пусть $f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$. Тогда $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to (-\infty, 0]$ задается как $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Замечание 1.2.21. Из определения обратной функции следует, что для её нахождения необходимо решить уравнение $y = f(x)$ относительно x. Полученное решение $x = g(y)$ и определяет обратную функцию, $f^{-1} = g$.

Пример 1.2.22. *Для* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, *найти* f^{-1}.

▶ Функция f является биекцией, и, следовательно, обратная функция существует в силу утверждения 1.2.23.

Для нахождения f^{-1} запишем уравнение $f(x) = y$ для данной функции:

$$y = 2x + 3.$$

Отсюда имеем, что

$$2x = y - 3$$

и

$$x = \frac{y-3}{2}.$$

Таким образом,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}.$$

◀

Утверждение 1.2.23. *Пусть* $f\colon X \to Y$. *Обратная функция* f^{-1} *существует тогда и только тогда, когда* f *является биекцией. При этом, обратная функция единственна.*

Доказательство. Пусть f является биекцией, и докажем, что существует обратная функция.

Для каждого элемента $y_0 \in Y$ существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$ (f сюръективна). Этот элемент x_0 является единственным, поскольку, если $x_0' \neq x_0''$, то $f(x_0') \neq f(x_0'')$ (f инъективна), и равенство $f(x_0') = y_0 = f(x_0'')$ невозможно. Поэтому, определим значение $g\colon Y \to X$ для этого $y_0 \in Y$ как $g(y_0) = x_0$. Имеем:

$$g(f(x_0)) = g(y_0) = x_0, \qquad f(g(y_0)) = f(x_0) = y_0.$$

Так как $y_0 \in Y$ является произвольным, то обратная функция f^{-1} существует, и $f^{-1} = g$.

Пусть теперь существует обратная функция $f^{-1} = g\colon Y \to X$, и докажем, что f является биекцией.

Функция f сюръективна, поскольку для любого $y_0 \in Y$, полагая $x_0 = g(y_0)$, имеем

$$f(x_0) = f(g(y_0)) = y_0.$$

Функция f инъективна, поскольку, если $x_0', x_0'' \in X$ и $f(x_0') = f(x_0'')$, то $g(f(x_0')) = g(f(x_0''))$, но $g(f(x_0')) = x_0'$ и $g(f(x_0'')) = x_0''$. Следовательно, $x_0' = x_0''$. $\square$

Задачи

КР: I.2.1 (1, 3); I.2.2 (1, 3); I.2.3 (1, 3), I.2.4 (1, 3, 5), I.2.8.
[5] 175, 178(н), 203 (а, в), 207,
224, 228.
ДР: I.2.1 (2, 4); I.2.2 (2, 4); I.2.3 (2, 4); I.2.4 (2, 4, 6, 7).
[5] 176, 180, 182, 203 (б), 206, 209,
226, 227, 229.

1.3 Мощность множества

Определение 1.3.1. Два множества A и B называются *равномощными* или имеющими *одинаковую мощность*, если существует биекция $\varphi\colon A \to B$. В этом случае используется обозначение $A \sim B$.

Если множество A равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то оно называется *конечным*, а n *числом* его элементов. В этом случае используется обозначение $|A| = n$. Если такого $n \in \mathbb{N}$ не существует, то множество A называется *бесконечным*.

Если множество A равномощно множеству $\mathbb{N}$, то множество A называется *счетным*.

Пример 1.3.2. 1. $\mathbb{Z}_+ \sim \mathbb{N}$.

Взаимно однозначная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$ задана таблицей:

n	1	2	3	4	5	$\ldots$
$\varphi(n)$	0	1	2	3	4	$\ldots$

2. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Взаимно однозначная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ задана таблицей:

n	1	2	3	4	5	$\ldots$
$\varphi(n)$	0	1	-1	2	-2	$\ldots$

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Функция $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ схематично показана на рис. 1.8. Здесь стрелки обозначают порядок нумерации элементов $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

4. $(-1, 1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}x$, $x \in (-1, 1)$.

5. $\mathbb{R} \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\varphi\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

Замечание 1.3.3. 1. Множество $\emptyset$ является конечным, и $|\emptyset| = 0$.

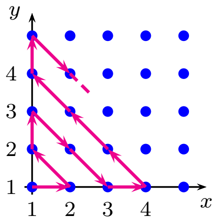


Рис. 1.8: Нумерация множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. Если множества A и B конечны, то они равномощны тогда и только тогда, когда $|A| = |B|$.

3. Если A счетно, то биекция $\varphi\colon \mathbb{N} \to A$ задает нумерацию элементов A.

Теорема 1.3.4. *Бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть A — счетное множество, а $B \subset A$ бесконечно. Т.к. A счетно, то его элементы можно занумеровать:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}.$$

Пусть n_1 — наименьший индекс такой, что $a_{n_1} \in B$, n_2, $n_2 > n_1$, — следующий наименьший индекс такой, что $a_{n_2} \in B$, и т.д. Имеем биекцию $\varphi\colon \mathbb{N} \to B$, $\varphi(k) = a_{n_k}$. □

Теорема 1.3.5. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Тогда существует $a_1 \in A$. Имеем, что $A \setminus \{a_a\} \neq \emptyset$, поскольку A — бесконечно. Следовательно существует $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Имеем, что $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, поскольку A бесконечно. Следовательно, существует $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Используя индукцию, имеем множество

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \subset A,$$

которое очевидно счетно. □

Определение 1.3.6. Конечное или счетное множество называется *не более чем счетным.*

Теорема 1.3.7. *Объединение счетного семейства счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Поскольку семейство множеств счетно, эти множества можно перенумеровать: A_1, A_2, ... Поскольку каждое из множеств счетно, то элементы этих множеств также пронумеруем:

$$\begin{array}{lcllllll} & \vdots & & & & & & \\ A_2 & = & \{a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2n}, & \ldots\}, \\ A_1 & = & \{a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1n}, & \ldots\}. \end{array}$$

Далее, элементы объединения нумеруем как на рис. 1.8, при этом пропускаем элементы, пронумерованные ранее (множества A_i, $i = 1, \ldots, \infty$, могут иметь общие элементы). □

Следствие 1.3.8. *Множество* $\mathbb{Q}$ *является счетным.*

Доказательство. Поскольку

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

то рассмотрим счетное семейство множеств A_1, $A_2, \ldots$, заданных следующим образом:

$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \left\{\frac{m}{1} : m \in \mathbb{Z}\right\}, \\ A_2 & = & \left\{\frac{m}{2} : m \in \mathbb{Z}\right\}, \\ A_3 & = & \left\{\frac{m}{3} : m \in \mathbb{Z}\right\}, \\ & \vdots & \end{array}$$

Каждое из этих множеств счетно. Следовательно счетно и

$$\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

□

Теорема 1.3.9. *Декартово произведение двух счетных множеств есть счетное множество.*

Доказательство. Пусть

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}.$$

Тогда

$$A \times B = \{(a_i, b_j) : (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\},$$

т.е. множество $A \times B$ равномощно множеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, которое является счетным. □

Теорема 1.3.10. *Пусть множество X состоит из бесконечных последовательностей чисел* 0 *и* 1:

$$X = \{\boldsymbol{x} = x_1 x_2 x_3 \dots : x_i \in \{0, 1\} \text{ для всех } i \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда множество X несчетно.

Доказательство. Доказательство будем вести от противного.

Пусть X счетно, т.е. его элементы можно пронумеровать:

$$X = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots\}.$$

Выпишем эти элементы $\boldsymbol{x}_i$, $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_1 & = & x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \dots, \\ \boldsymbol{x}_2 & = & x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \dots, \\ \boldsymbol{x}_3 & = & x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \dots, \\ & \vdots & \end{array} \tag{1.3.1}$$

где $x_{ij} \in \{0, 1\}$ для всех $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Рассмотрим элемент

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{x}_{11} \tilde{x}_{22} \tilde{x}_{33} \tilde{x}_{44} \dots,$$

где

$$\tilde{x}_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ii} = 0, \\ 0, & \text{если } x_{ii} = 1, \end{cases}$$

и x_{ii} — элементы в (1.3.1).

С одной стороны, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$, поскольку является последовательностью из 0 и 1, а, с другой стороны,

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \notin \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots\}$$

по построению. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Задачи

КР: I.3.1, I.3.2, I.3.7, 1.3.9
ДР: 1.3.1, I.3.5,

1.4 Комплексные числа

Определение 1.4.1. Выражение z вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$ а i — символ, называется *комплексным числом.* Символ i называется *мнимой единицей.*

Действительное число $\operatorname{Re} z = x$ называется *действительной частью* комплексного числа z, а действительное число $\operatorname{Im} z = y$ называется его *мнимой* частью.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Пример 1.4.2. $2 + 3i$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1 + i0$, $0 + i1$ — комплексные числа..

Замечание 1.4.3. Используется следующая запись:

$$x + iy = x + yi,$$
$$x + i0 = x, \quad 0 + iy = iy, \quad 0 + 1i = i.$$

Определение 1.4.4. Если $z = x + iy$, то комплексное число $\overline{z} = x + i(-y)$ называется *комплексно сопряженным* z.

Пример 1.4.5.

1. $\overline{2 + i3} = 2 + i(-3)$.
2. $\overline{x + i0} = x + i(-0) = x + i0$.
3. $\overline{0 + i2} = 0 + i(-2)$.

Алгебраические действия с комплексными числами производятся как с многочленами от переменной i, учитывая, что $i^2 = -1$.

Пример 1.4.6.

1. $(1 + 2i) + (\sqrt{2} + \sqrt{3}i) = (1 + \sqrt{2}) + i(2 + \sqrt{3})$.

2. $(1+2i)-(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)=(1-\sqrt{2})+i(2-\sqrt{3})$.

3.

$$\begin{aligned}(1+2i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) &= \sqrt{2}+\sqrt{3}i+2i\cdot\sqrt{2}+2i\cdot\sqrt{3}i= \\ &=\sqrt{2}+\sqrt{3}i+2\sqrt{2}i+2\sqrt{3}i^2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}+2\sqrt{2}i-2\sqrt{3}= \\ &= (\sqrt{2}-2\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Утверждение 1.4.7. *Пусть $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Тогда*

$$z\overline{z}=x^2+y^2.$$

В частности, $z\overline{z}$ действительно и положительно для всех $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$.

Доказательство. Действительно,

$$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-ixy+iyx-i^2y^2=x^2-(-1)y^2=x^2+y^2.$$

$\square$

Для вычисления $\dfrac{z_1}{z_2}$ достаточно умножить числитель и знаменатель на $\overline{z}_2$.

Пример 1.4.8. 1.

$$\begin{aligned}\frac{5+3i}{1-7i} &= \frac{(5+3i)\overline{(1-7i)}}{(1-7i)\overline{(1-7i)}}=\frac{(5+3i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)}= \\ &= \frac{(5-21)+i(35+3)}{1^2+7^2}=\frac{-16+i38}{50}=-\frac{16}{50}+i\frac{38}{50}= \\ &= -\frac{8}{25}+i\frac{19}{25}.\end{aligned}$$

2.
$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{1} = -i.$$

3.
$$\frac{1}{1+i} = \frac{\overline{1+i}}{(1+i)\overline{(1+i)}} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Утверждение 1.4.9. *Для всех* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{z_1 + z_2} & = & \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \\ \overline{z_1 - z_2} & = & \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \\ \overline{z_1 \cdot z_2} & = & \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} & = & \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \qquad z_2 \neq 0. \end{array}$$

Доказательство. Пусть $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Докажем первое равенство. Вычислим выражение, стоящее в левой части:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} = \\ = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i.$$

Правая часть равенства равна

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{x_1 + y_1 i} + \overline{x_2 + y_2 i} = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) = \\ = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i,$$

что и доказывает первое равенство.

Второе равенство доказывается аналогично.

Рассмотрим третье равенство. Имеем

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i} = \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$$

С другой стороны,

$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = \overline{(x_1 + y_1 i)} \cdot \overline{(x_2 + y_2 i)} = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (-x_1 y_2 - y_1 x_2)i = \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$$

Таким образом, третье равенство доказано.

Докажем последнее равенство. Прежде всего, используя уже доказанное третье равенство, имеем:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}.$$

Поэтому остается доказать, что

$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z}_2}.$$

Имеем

$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x_2 + y_2 i}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{x_2 + y_2 i}}{(x_2 + y_2 i)\overline{(x_2 + y_2 i)}}\right)} = \overline{\left(\frac{x_2 - y_2 i}{x_2^2 + y_2^2}\right)} = \\ \overline{\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} i\right)} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\overline{z}_2} = \frac{1}{\overline{(x_2 + y_2 i)}} = \frac{1}{x_2 - y_2 i} = \frac{\overline{x_2 - y_2 i}}{(x_2 - y_2 i)\overline{(x_2 - y_2 i)}} = \\ = \frac{x_2 + y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Сравнение двух полученных выражений завершает доказательство четвертого равенства. □

1.4.1 Тригонометрическая форма комплексного числа

Каждое комплексное число

$$z = x + yi \tag{1.4.1}$$

однозначно задается парой действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$, которая в свою очередь однозначно задает точку (x, y) на плоскости $\mathbb{R}^2$. Таким образом, комплексные числа и точки плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии (рис. 1.9).

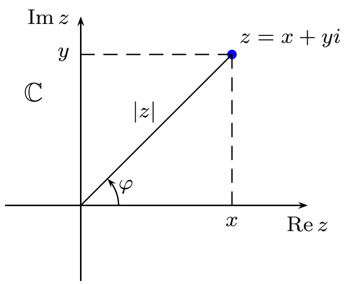


Рис. 1.9: Комплексные числа как точки на плоскости.

Плоскость для графического представления комплексных чисел называется *комплексной плоскостью*. Расстояние от точки z до начала координат называется *модулем* z и обозначается $|z|$. При этом, из теоремы Пифагора следует, что

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Угол φ называется *аргументом* z. Для комплексного числа $z \neq 0$ он определяется не однозначно, а с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\varphi \in (-\pi, \pi]$ или $\varphi \in [0, 2\pi)$, то он обозначается $\arg z$. Множество всех значений φ обозначается $\operatorname{Arg} z$, т.е

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Если $z = 0$, то угол φ не определен.

Соотношения, связывающие пары (x, y) и $(|z|, \varphi)$, задаются системой

$$\begin{aligned} x &= |z|\cos\varphi, \\ y &= |z|\sin\varphi. \end{aligned}$$

При этом,

$$x + iy = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение 1.4.10. Запись z через $|z|$ и φ, т.е.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.4.2}$$

называется *тригонометрической формой* комплексного числа z. Выражение (1.4.1) называется *алгебраической формой* z.

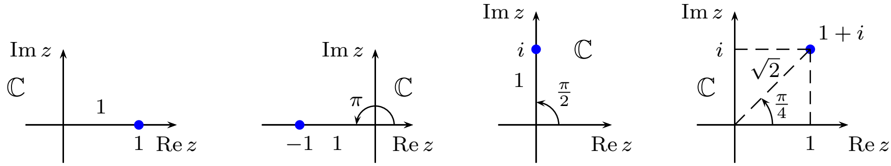


Рис. 1.10: Примеры нахождения тригонометрической формы комплексного числа.

Пример 1.4.11. *Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: 1)* 1, *2)* -1, *3)* i, *4)* $1 + i$.

▶ См. рис. 1.10:

1) $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$,

2) $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$,

3) $i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$,

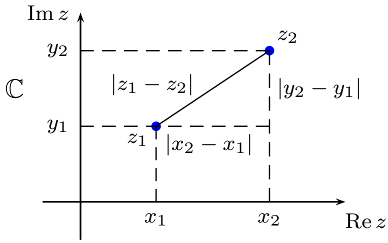


Рис. 1.11: Геометрический смысл $|z_1 - z_2|$.

4) $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

◀

Замечание 1.4.12. Два комплексных числа

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2) \qquad \text{и} \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

равны тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$ и $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Утверждение 1.4.13. *Для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ значение $|z_1 - z_2|$ является расстоянием между z_1 и z_2, рассматриваемыми как точки комплексной плоскости.*

Доказательство. Если $z_1 = x_1 + y_1 i$ а $z_2 = x_2 + y_2 i$, то $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$. Следовательно,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

То, что это выражение задает расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости следует из теоремы Пифагора (см. рис. 1.11). □

Теорема 1.4.14. *Пусть* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Тогда*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\,|z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big), \qquad z_2 \neq 0, \end{aligned}$$

и имеет место формула Муавра для $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Докажем справедливость первой формулы:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = |z_1|\,|z_2|\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) = \\ = |z_1|\,|z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, то достаточно вычислить $\frac{1}{z_2}$ и применить первую формулу. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \\ = \frac{1}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ = \frac{1}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \frac{1}{|z_2|}\big(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\big). \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Таким образом, используя доказанную первую формулу, имеем

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \frac{1}{|z_2|}\big(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\big) = \\ = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big). \end{aligned}$$

Для доказательства формулы Муавра рассмотрим случаи $n > 0$, $n < 0$, $n = 0$.

Если $n > 0$, то применяя первую формулу и индукцию имеем

$$\begin{aligned} z^n = (z \cdot z) \cdot z^{n-2} = \big(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big) \cdot z^{n-2} = \\ = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \cdot z^{n-2} = \\ = \big(|z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \cdot |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big) \cdot z^{n-3} = \\ = |z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) \cdot z^{n-3} = \ldots = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \end{aligned}$$

Если $n < 0$, то $-n > 0$. Поэтому, используя (1.4.3) и уже доказанную формулу для положительного показателя степени, имеем

$$\begin{aligned} z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{|z|}\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big)\right)^{-n} = \\ = \left(\frac{1}{|z|}\right)^{-n}\big(\cos((-n)(-\varphi)) + i\sin((-n)(-\varphi))\big) = \\ = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \end{aligned}$$

Если $n = 0$, то, по определению, $z^0 = 1$ при $z \neq 0$. А

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = |z|^0(\cos 0\varphi + i\sin 0\varphi).$$

□

Пример 1.4.15. *Упростить:*

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$$

► Запишем все числа в тригонометрической форме (см. рис. 1.12).

Имеем:

$$\begin{aligned} -1 + i\sqrt{3} &= 2\big(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\big), \\ 1 - i &= \sqrt{3}\big(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4})\big). \end{aligned}$$

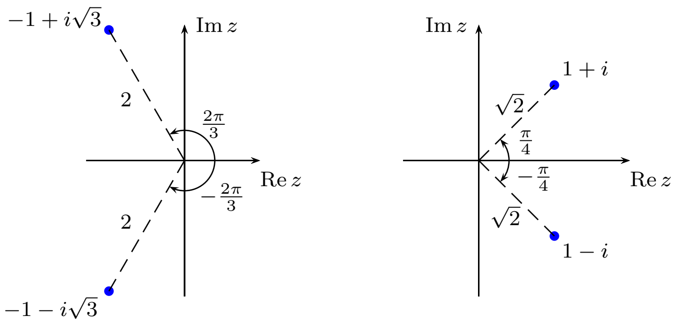


Рис. 1.12: Перевод чисел $-1 \pm i\sqrt{3}$ и $1 \pm i$ в тригонометрическую форму.

Таким образом,

$$\begin{aligned}
(-1+i\sqrt{3})^{15} &= 2^{15}\big(\cos(\tfrac{2\pi}{3}\cdot 15) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3}\cdot 15)\big) = \\
&= 2^{15}(\cos 10\pi + i\sin 10\pi), \\
(1-i)^{20} &= (\sqrt{2})^{20}\big(\cos((-\tfrac{\pi}{4})\cdot 20) + i\sin((-\tfrac{\pi}{4})\cdot 20)\big) = \\
&= 2^{10}\big(\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)\big).
\end{aligned}$$

Поэтому,

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} = \frac{2^{15}(\cos 10\pi + i\sin 10\pi)}{2^{10}\big(\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)\big)} =$$
$$= 2^{5}\big(\cos(10\pi+5\pi) + i\sin(10\pi+5\pi)\big) =$$
$$= 2^{5}(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = -2^{5}.$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}} = -2^{5}.$$

Этот же ответ можно получить, заметив, что

$$\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}} = \frac{\left(\overline{(-1+i\sqrt{3})}\right)^{15}}{\left(\overline{(1-i)}\right)^{20}} = \frac{\overline{(-1+i\sqrt{3})^{15}}}{\overline{(1-i)^{20}}} = \\ = \overline{\left(\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)} = \overline{-2^5} = -2^5.$$

Таким образом,

$$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}} = -2^5 - 2^5 = -2^6.$$

◀

Определение 1.4.16. Для $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$ корнем степени n называется множество $w \in \mathbb{C}$ таких, что $w^n = z$, т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

Пример 1.4.17. Непосредственной проверкой можно доказать, что

$$\{1, -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\} \subset \sqrt[3]{1}.$$

Действительно, $1^3 = 1$, а

$$-\tfrac{1}{2} \pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pm\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\pm\tfrac{2\pi}{3}),$$

см. рис. 1.13. Поэтому,

$$(-\tfrac{1}{2} \pm i\tfrac{\sqrt{3}}{2})^3 = \cos(\pm\tfrac{2\pi}{3}) \cdot 3) + i\sin(\pm\tfrac{2\pi}{3} \cdot 3) = \\ = \cos(\pm 2\pi) + i\sin(\pm 2\pi) = 1.$$

Теорема 1.4.18. *Пусть $z \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n значений,*

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\},$$

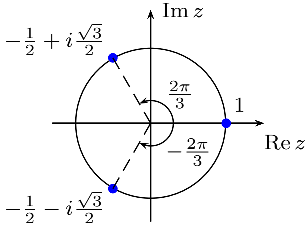


Рис. 1.13: Числа $\sqrt[3]{1}$.

где

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\,k) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\,k)\big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *(Здесь* $\sqrt[n]{|z|}$ *— единственное положительное значение корня степени* n *из положительного числа* $|z|$.*)*

Доказательство. Пусть $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \in \sqrt[n]{z}$. Это означает, что $w^n = z$, т.е.

$$|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Поскольку модуль комплексного числа определен однозначно, а аргумент только с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{cases} |w|^n &= |z|, \\ n\psi &= \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поэтому,

$$\begin{cases} |w| &= \sqrt[n]{|z|}, \\ \psi &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\,k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, все решения w_k уравнения $w^n = z$ относительно w задаются как

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\,k) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\,k)\big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

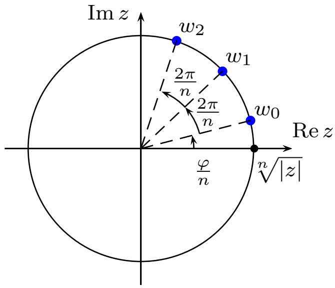


Рис. 1.14: Расположение значений $\sqrt[n]{z}$.

Заметим, что все числа w_k лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$, причем угол между лучами на которых лежат w_k и w_{k+1} один и тот же для всех k, и равен $\frac{2\pi}{n}$, см. рис. 1.14.

При этом,

$$w_n = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\,n) + i\sin(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\,n)\Big) =$$
$$= \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}) = z_0.$$

Это означает, что различными комплексными числами будут только $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$. □

Пример 1.4.19. *Вычислить* $\sqrt{i}$.

▶ Представим i в тригонометрической форме:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\sqrt{i} = \{w_0, w_1\}$, где

$$w_k = \cos\Big(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{2\pi}{2}\,k\Big) + i\sin\Big(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{2\pi}{2}\,k\Big), \qquad k = 0, 1,$$

т.е. (см. рис 1.15)

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ w_1 &= \cos(\tfrac{\pi}{4} + \pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{4} + \pi) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

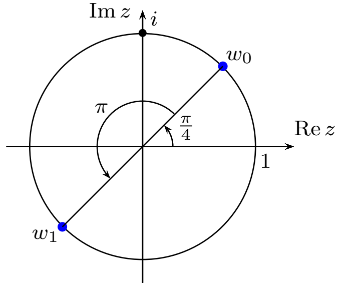


Рис. 1.15: Расположение значений $\sqrt[2]{i}$.

◀

Пример 1.4.20. *Вычислить* $\sqrt[4]{-1}$.

▶ Запишем -1 в тригонометрической форме:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$$

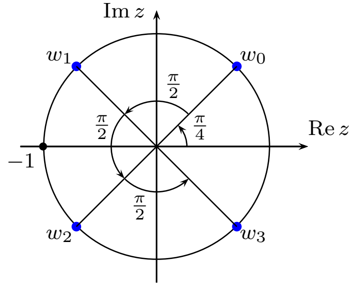


Рис. 1.16: Расположение значений $\sqrt[4]{-1}$.

Поэтому,

$$w_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\,k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\,k\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Следовательно, см. рис. 1.16,

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2},\\
w_1 &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2},\\
w_2 &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \pi\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2},\\
w_3 &= \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{3\pi}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

◀

Задачи

[10] *КР*: 101, 103, 105 (a, b), 107 (b, d), 108 (a), 110 (a),
118 (1, 3, 5), 119 (a, b, c, i, h), 121, 122 (a), 123,
136 (a, b), 137 (a, b), 141,
143 (d, c), 145 (a)

ДР: 102, 105 (c), 106, 107(c), 108 (b), 110 (b),
118 —, 119 —, 122 —, 124,
136 (c), 137 (d), 138, 139, 142,
143 —, 145 —.

1.5 Действительные числа

Определение 1.5.1. *Неотрицательным действительным числом* (*вещественным числом*) называется неотрицательная бесконечная десятичная дробь, т.е. выражение вида

$$x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots,$$

где $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha_1, \alpha_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Множество всех неотрицательных действительных чисел обозначается $\mathbb{R}_+$.

Два неотрицательных действительных числа $x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ и $y = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$ называются *равными* если

$$\alpha_k = \beta_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad \text{либо} \qquad \begin{cases} \alpha_k = \beta_k, & k \in \{0, \dots, n-1\}, \\ \alpha_n = \beta_n + 1, & \\ \alpha_{n+1} = \ldots = 0, & \\ \beta_{n+1} = \ldots = 9. & \end{cases}$$

Положительным действительным числом называется неотрицательное действительное число $x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, у которого $\alpha_k \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$. В противном случае $x = 0$.

Отрицательным действительным числом называется выражение

$$-\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots,$$

где $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ — положительное действительное число.

Множество всех действительных чисел обозначается $\mathbb{R}$.

Пример 1.5.2.

$$\begin{aligned} 0,50000\ldots = 0,5(0) = 0,5 \quad &(= \tfrac{1}{2}), \\ 0,1666\ldots = 0,1(6) \quad &(= \tfrac{1}{6}), \\ 0,142857142857\ldots = 0,(142857) \quad &(= \tfrac{1}{7}), \\ 1,414213562373095048\ldots \quad &(= \sqrt{2}), \end{aligned}$$

$$1,24 = 1,24000000\ldots = 1,23999999\ldots$$

Замечание 1.5.3. В дальнейшем, предполагается, что все действительные числа не имеют период 9.

Теорема 1.5.4. *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Пусть

$$X = \{0, x_1 x_2 x_3 \ldots : x_i \in \{0, 1\} \text{ для всех } i \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда $X \subset \mathbb{R}$, причем X — несчетно по теореме 1.3.10. Следовательно и $\mathbb{R}$ несчетно по теореме 1.3.4. □

Определение 1.5.5. Действительное число x называется *рациональным*, если оно может быть представлено в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. В противном случае оно называется *иррациональным.*

Утверждение 1.5.6. *Действительное число x является рациональным тогда и только тогда, когда оно может быть представлено бесконечной периодической десятичной дробью.*

Доказательство. Без доказательства. □

Пример 1.5.7. *Представить $\frac{1}{7}$ бесконечной дробью.*

▶ Представление рационального числа $\frac{m}{n}$ бесконечной (периодической) десятичной дробью получается делением «в столбик» числителя m на знаменатель n, что есть запись «в столбик» алгоритма деления целого числа m на целое число n с остатком, который заключается в нахождении чисел $q, r \in \mathbb{Z}_+$ таких, что

$$m = q \cdot n + r,$$

причем $0 \leq r < n$.

Итак, если $\frac{1}{7} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, то α_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, находятся следующим образом:

$$\begin{array}{rcll}
1 & = & 0\cdot 7+1 & (\alpha_0 = 0, \quad r_1 = 1),\\
10\,r_1 = 10 & = & 1\cdot 7+3 & (\alpha_1 = 1, \quad r_2 = 3),\\
10\,r_2 = 30 & = & 4\cdot 7+2 & (\alpha_2 = 4, \quad r_3 = 2),\\
10\,r_3 = 20 & = & 2\cdot 7+6 & (\alpha_3 = 2, \quad r_4 = 6),\\
10\,r_4 = 60 & = & 8\cdot 7+4 & (\alpha_4 = 8, \quad r_5 = 4),\\
10\,r_5 = 40 & = & 5\cdot 7+5 & (\alpha_5 = 5, \quad r_6 = 5),\\
10\,r_6 = 50 & = & 7\cdot 7+1 & (\alpha_6 = 7, \quad r_7 = 1),\\
10\,r_7 = 10 & = & 1\cdot 7+3 & (\alpha_7 = 1, \quad r_8 = 3),\\
 & \vdots & &
\end{array}$$

Отсюда видно, что $r_7 = r_1$, а значит будем иметь, что $\alpha_7 = \alpha_1$ и $r_8 = r_2$, а значит будем иметь, что $\alpha_8 = \alpha_2$ и $r_9 = r_3$, и т.д. Следовательно,

$$\frac{1}{7} = 0,1428571\ldots = 0,(142857).$$

Это получилось потому, что при делении на n с остатком, остаток r может принимать только конечное число значений, $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. ◀

Пример 1.5.8. *Представить* $12,34(567)$ *в виде рационального числа.*

▶ Пусть

$$x = 12,34(567).$$

Тогда

$$10^2\,x = 1234,(567).$$

и

$$10^5\,x = 1234567,(567).$$

Следовательно,

$$10^5\,x - 10^2\,x = 1234567,(567) - 1234,(567) = 1234567 - 1234.$$

Таким образом,
$$x = \frac{1234567 - 1234}{10^5 - 10^2}.$$
◀

Замечание 1.5.9. Из определения действительного числа следует, что
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Определение 1.5.10. Пусть $x, y \in \mathbb{R}_+$ имеют следующие представления:
$$x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \qquad y = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots .$$

Действительное число x называется *меньшим* действительного числа y (а число y называется *большим* числа x) если $\alpha_0 < \beta_0$ либо существует такое $n \in \mathbb{Z}_+$, что
$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n, \quad \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}.$$

Утверждение 1.5.11 (аксиома Архимеда)**.** *Каково бы ни было действительное число $a \in \mathbb{R}_+$, существует такое натуральное число n, что $n > a$.*

Доказательство. Действительно, если $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, то положим $n = \alpha_0 + 1$. □

Определение 1.5.12. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Число $c \in A$ называется *максимальным* в A, если $c \geq x$ для всех $x \in A$. Оно обозначается
$$c = \max A = \max\{x : x \in A\} = \max_{x \in A} x.$$

Число $b \in A$ называется *минимальным* в A, если $b \leq x$ для всех $x \in A$. Оно обозначается
$$b = \min A = \min\{x : x \in A\} = \min_{x \in A} x.$$

Пример 1.5.13. 1. Пусть $A = \{2, 3, 4\}$. Тогда $\min A = 2$, $\max A = 4$.

2. Пусть $A = [0, 1]$. Тогда $\min A = 0$, $\max A = 1$.

3. Пусть $A = (0, 1]$. Тогда $\min A$ не существует, а $\max A = 1$.

Определение 1.5.14. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Число $M \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* множества A, если $M \geq x$ для всех $x \in A$. Если множество A имеет верхнюю грань, то оно называется *ограниченным сверху*.

Число $m \in \mathbb{R}$ называется *нижней гранью* множества A, если $m \leq x$ для всех $x \in A$. Если множество A имеет нижнюю грань, то оно называется *ограниченным снизу*.

Множество, которое ограничено и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Если множество не является ограниченным, то оно называется *неограниченным*.

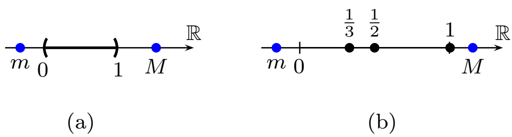


Рис. 1.17: Верхние и нижние грани множеств.

Пример 1.5.15. 1. Множество $(0, 1)$ ограничено. В качестве нижней грани m можно взять любое число $m \in (-\infty, 0]$, а в качестве верхней грани M — любое число $M \in [1, +\infty)$ (рис. 1.17(a)).

2. Множество $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ является ограниченным с $m \in (-\infty, 0]$ и $M \in [1, +\infty)$ (рис. 1.17(b)).

3. Множество $\mathbb{N}$ не является ограниченным. Оно неограничено сверху, но ограничено снизу, например, $m = 0$.

4. Множество $\mathbb{R}$ не является ограниченным ни сверху, ни снизу.

Определение 1.5.16. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Число a^* называется *точной верхней гранью* множества A и обозначается

$$a^* = \sup A = \sup\{x : x \in A\} = \sup_{x \in A} x,$$

если 1) a^* является верхней гранью A, т.е. $a^* \geq a$ для всех $a \in A$, и 2) a^* является минимальным в множестве всех верхних граней A, т.е., если $\tilde{a} < a^*$, то $\tilde{a}$ не является верхней гранью (существует такое $a \in A$, что $\tilde{a} < a$).

Число a_* называется *точной нижней гранью* множества A и обозначается

$$a^* = \inf A = \inf\{x : x \in A\} = \inf_{x \in A} x,$$

если 1) a_* является нижней гранью A, т.е. $a_* \leq a$ для всех $a \in A$ и 2) является максимальным в множестве всех нижних граней A, т.е. если $\tilde{a} > a_*$, то $\tilde{a}$ не является нижней гранью (существует такое $a \in A$, что $a < \tilde{a}$).

Пример 1.5.17. 1. Пусть $A = (0, 1)$. Тогда $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

2. Пусть $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Тогда $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

3. Пусть $A = \mathbb{N}$. Тогда $\sup A$ не существует, $\inf A = 1$.

4. Если $A = \mathbb{R}$, то $\sup A$ и $\inf A$ не существуют.

Теорема 1.5.18. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $A \neq \emptyset$. Если A ограничено сверху, то точная верхняя грань существует. Если A ограничено снизу, то точная нижняя грань существует.*

Идея доказательства. Положим $A^+ = A \cap \mathbb{R}_+$, и $A^- = A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+)$. Если $A^+ \neq \emptyset$ и $A^- \neq \emptyset$, то $\sup A = \sup A^+$, а $\inf A = \inf A^-$.

Если $A^+ = \emptyset$, т.е. $A = A^-$, то $\sup A = \sup A^-$ и $\inf A = \inf A^-$. Аналогичная ситуация имеет место, если $A^- = \emptyset$.

Пусть $A^+ \neq \emptyset$, и рассмотрим существование $\sup A = \sup A^+$, если A ограничено.

Для каждого элемента $a \in A^+$ запишем его десятичное представление:

$$a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\dots.$$

Положим

$$\Gamma_0 = \{\gamma_0 : \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots \in A^+\}.$$

Так как A ограничено, то существует такое $M \in \mathbb{Z}_+$, что $\gamma_0 \leq M$ для всех $a \in A^+$. Это означает, что $\Gamma_0 \subset \mathbb{Z}_+$ конечно. Пусть $\omega_0 = \max \Gamma_0$.

Положим

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1 : \omega_0, \gamma_1\gamma_2\ldots \in A^+\}.$$

Поскольку $\Gamma_1 \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то Γ_1 конечное множество. Пусть $\omega_1 = \max \Gamma_1$.

Положим

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2 : \omega_0, \omega_1\gamma_2\gamma_3\ldots \in A^+\}.$$

Множество $\Gamma_2 \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, поэтому существует $\omega_2 = \max \Gamma_2$.

Продолжая таким образом получим элемент

$$\omega_0, \omega_1\omega_2\omega_3\ldots,$$

который и будет точной верхней гранью множества A^+. $\square$

Пример 1.5.19. Пусть $A = \mathbb{Q} \cap (0, \frac{\pi}{2})$. Тогда

$$\sup A = \frac{\pi}{2} = 1.5707963268\ldots$$

В этом случае $\Gamma_0 = \{0, 1\}$, поскольку

$$a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\ldots \in A \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_0 \in \{0, 1\}.$$

Таким образом, $\omega_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Далее имеем, что $\Gamma_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, поскольку

$$a = 1, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots \in A \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Таким образом, $\omega_1 = \max\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = 5$.

Далее,

$$a = 1, 5\gamma_2\gamma_3 \ldots \in A \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Следовательно, $\Gamma_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, и $\omega_2 = \max \Gamma_2 = 7$.

Продолжая таким образом, получим $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 7$ и т.д. То есть

$$\sup A = \omega_0, \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots = 1, 570 \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

Определение 1.5.20. Пусть $x, y \in \mathbb{R}_+$, причем

$$x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \qquad y = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$$

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\begin{aligned} x'_n &= \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n, & x''_n &= \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}, \\ y'_n &= \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n, & y''_n &= \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n + 10^{-n}. \end{aligned}$$

Тогда арифметические действия с действительными неотрицательными числами определяются следующим образом:

$$x + y = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (x'_n + y'_n), \qquad x \cdot y = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (x'_n \cdot y'_n),$$

$$x - y = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} (x'_n - y''_n), \qquad \frac{x}{y} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{x'_n}{y''_n}, \quad y \neq 0.$$

Пример 1.5.21. Поскольку

$$\sqrt{2} = 1, 41421356237 \ldots, \qquad \sqrt{3} = 1, 73050807568 \ldots,$$

то

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}+\sqrt{3} &= \sup\{1+1; 1,4+1,7; 1,41+1,73; 1,414+1,730; \ldots\},\\
\sqrt{2}-\sqrt{3} &= \sup\{1-2; 1,4-1,8; 1,41-1,74; 1,414-1,731; \ldots\},\\
\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} &= \sup\{1\cdot 1; 1,4\cdot 1,7; 1,41\cdot 1,73; 1,414\cdot 1,730; \ldots\},\\
\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} &= \sup\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1{,}4}{1{,}8}, \tfrac{1{,}41}{1{,}74}, \tfrac{1{,}414}{1{,}731}, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Замечание 1.5.22. Арифметические действия продолжаются на не обязательно неотрицательные числа естественным образом. Для $x, y \in \mathbb{R}_+$ имеем:

$$\begin{aligned}
(-x)+y &= y-x, & (-x)+(-y) &= -(x+y),\\
(-x)-y &= -(x+y), & (-x)-(-y) &= y-x,\\
(-x)\cdot y &= -(x\cdot y), & (-x)\cdot(-y) &= x\cdot y,\\
\frac{-x}{y} &= -\frac{x}{y}, & \frac{-x}{-y} &= \frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Определение 1.5.23. Для $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x \le y \quad &\Longleftrightarrow \quad y - x \in \mathbb{R}_+,\\
x < y \quad &\Longleftrightarrow \quad (x \le y) \quad \text{и} \quad (x \ne y).
\end{aligned}$$

Теорема 1.5.24. *Операции сложения, умножения и соотношение* *порядка на $\mathbb{R}$ удовлетворяют следующим свойствам:*

$$
\begin{array}{clc}
(\mathrm{I}_1) & \forall\, x, y \in \mathbb{R}: & x + y = y + x, \\
(\mathrm{I}_2) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: & x + (y + z) = (z + y) + z, \\
(\mathrm{I}_3) & \forall\, x \in \mathbb{R}: & x + 0 = x, \\
(\mathrm{I}_4) & \forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists\, (-x) \in \mathbb{R}: & x + (-x) = 0, \\
(\mathrm{II}_1) & \forall\, x, y \in \mathbb{R}: & x \cdot y = y \cdot x, \\
(\mathrm{II}_2) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: & x \cdot (y \cdot z) = (z \cdot y) \cdot z, \\
(\mathrm{II}_3) & \forall\, x \in \mathbb{R}: & x \cdot 1 = x, \\
(\mathrm{II}_4) & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\; \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}: & x \cdot x^{-1} = 1, \\
(\mathrm{I}, \mathrm{II}) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\
(\mathrm{III}_1) & \forall\, x \in \mathbb{R}: & (x \le x), \\
(\mathrm{III}_2) & \forall\, x, y \in \mathbb{R}: & (x \le y) \text{ или } (y \le x), \\
(\mathrm{III}_3) & \forall\, x, y \in \mathbb{R}: & (x \le y) \text{ и } (y \le x) \quad \Longrightarrow \quad x = y, \\
(\mathrm{III}_4) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: & (x \le y) \text{ и } (y \le z) \quad \Longrightarrow \quad (x \le z), \\
(\mathrm{I}, \mathrm{III}) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}: & (x \ge y) \quad \Longrightarrow \quad (x + z \le y + z) \\
(\mathrm{II}, \mathrm{III}) & \forall\, x \in \mathbb{R}: & (0 \le x) \text{ и } (0 \le y) \quad \Longrightarrow \quad (0 \le x \cdot y).
\end{array}
$$

(IV) (*аксиома полноты*) *Пусть X, Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что $x \le y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \le c \le y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Докажем только свойство (IV).

Положим $c = \sup X$ и докажем, что

$$x \le c \le y, \qquad x \in X, \ y \in Y.$$

Действительно, поскольку $c = \sup X$ является верхней гранью X по определению, то $x \le c$ для всех $x \in X$.

Произвольный $y \in Y$ является верхней гранью множества X по условию. Но $c = \sup X$ является минимальной верхней гранью X. Таким образом, $c \leq y$ для всех $y \in Y$. $\square$

Замечание 1.5.25. Операции сложения, умножения и свойство порядка с перечисленными в теореме 1.5.24 свойствами являются определяющими для множества действительных чисел.

Задачи

[6] *КР*: I.4.13, 1.4.14,
1.4.17, I.4.20, I.4.22, 1.4.30 (1,2),
1.4.33 (b)

ДЗ: 1.4.15,
1.4.18, I.4.21, I.4.23, I.4.30 (3,4),
1.4.33 (a)

Глава 2

Числовые последовательности

2.1 Расширенная числовая ось. Окрестности

Определение 2.1.1. Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ называется *расширенной числовой осью.* Имеем

$$-\infty < x < +\infty$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Также будет рассматриваться множество $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

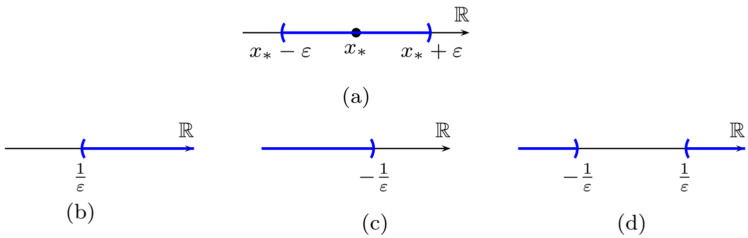


Рис. 2.1: ε-окрестности точки x_*: (a) $x_* \in \mathbb{R}$, (b) $x_* = +\infty$, (c) $x_* = -\infty$, (d) $x_* = \infty$.

Определение 2.1.2. Для заданных $\varepsilon > 0$ и $x_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ следующие множества называются ε-окрестностью точки x_*, см. рис. 2.1:

$$\begin{aligned}
x_* \in \mathbb{R}: &\quad U_\varepsilon(x_*) = (x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_*| < \varepsilon\},\\
x_* = +\infty: &\quad U_\varepsilon(+\infty) = (\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \tfrac{1}{\varepsilon}\},\\
x_* = -\infty: &\quad U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\tfrac{1}{\varepsilon}\},\\
x_* = \infty: &\quad U_\varepsilon(\infty) = U_\varepsilon(-\infty) \cup U_\varepsilon(+\infty).
\end{aligned}$$

Определение 2.1.3. *Числовой последовательностью* называется функция $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Если $x_n = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, то числовая последовательность обозначается как $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ или (x_n). Значения x_n называются *членами последовательности.*

Пример 2.1.4.

1. Если $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, т.е. $x_n = \frac{1}{n}$, то членами последовательности (x_n) будут следующие числа:
$$x_n : \quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$
2. Если $\varphi(n) = (-1)^n$, т.е. $x_n = (-1)^n$, то членами последовательности (x_n) будут следующие числа:
$$x_n : \quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$$
3. Если $\varphi(n) = n$, т.е. $x_n = n$, то членами последовательности (x_n) будут следующие числа:
$$x_n : \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Определение 2.1.5. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху* (*ограниченной снизу*) если множество $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ является ограниченным сверху (снизу).

Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу, то она называется *ограниченной*.

Пример 2.1.6.

1. Последовательность (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$, является ограниченной, поскольку множество
$$X = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\}$$
является ограниченным.
2. Последовательность (x_n), $x_n = (-1)^n$, также является ограниченной, поскольку
$$X = \{-1, 1\}$$
является ограниченным.
3. Последовательность (x_n), $x_n = n$, не является ограниченной. Она ограничена снизу но не ограничена сверху, т.к.
$$X = \{n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

2.2 Предел числовой последовательности

2.2.1 Определение предела числовой последовательности

Определение 2.2.1. Элемент $x_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ называется *пределом* числовой последовательности (x_n), что записывается как

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{или} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_* \quad \text{или} \quad x_n \to x_*,\ n \to \infty,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ его ε-окрестность $U_\varepsilon(x_*)$ содержит все члены последовательности кроме их конечного числа, см. рис. 2.2.

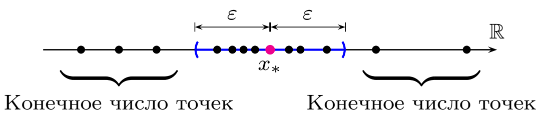


Рис. 2.2: $x_* \in \mathbb{R}$ — предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Утверждение 2.2.2. *Элемент x_* является пределом числовой последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N$.*

Доказательство. Если x_* является пределом числовой последовательности (x_n), то заданная окрестность $U_\varepsilon(x_*)$ содержит все члены x_n кроме их конечного числа, т.е. существует только конечное число точек

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \tag{2.2.1}$$

которые не принадлежат $U_\varepsilon(x_*)$. Тогда, если $N = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, то при $n > N$ точка x_n не является одной из точек в (2.2.1), и, следовательно, $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$.

Обратно, если для заданной ε-окрестности существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N$, то точки x_n такие, что $x_n \notin U_\varepsilon(x_*)$ могут быть только среди точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_N. \tag{2.2.2}$$

Следовательно, число точек x_n таких, что $x_n \notin U_\varepsilon(x_*)$, не превосходит N и, значит, конечно.

Это верно для произвольного $\varepsilon > 0$, что означает, что $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$. □

Пример 2.2.3. 1. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

► Здесь $x_n = \frac{1}{n}$.

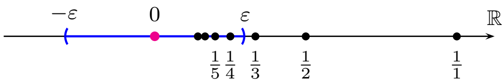


Рис. 2.3: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и покажем, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n \in U_\varepsilon(0)$ для всех $n > N$.

Поскольку

$$U_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \varepsilon\},$$

то условие $x_n \in U_\varepsilon(0)$ означает, что

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Решая это неравенство относительно n, имеем

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

В частотности, если $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$. ◄

2. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty.$$

▶ Здесь $x_n = 2n$.

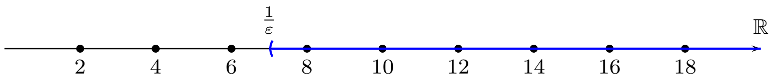


Рис. 2.4: $\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и покажем, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ для всех $n > N$.

Поскольку

$$U_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

то условие $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ означает, что

$$x_n = 2n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Решая это неравенство относительно n, имеем

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

В частности, если $n > N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$, т.е. $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, то $2n > \frac{1}{\varepsilon}$, и $2n \in U_\varepsilon(+\infty)$.

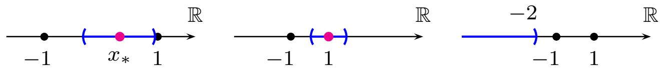
◀

3. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

не существует.

▶ Достаточно доказать, что, если $x_* = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$, то $x_* \notin \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$.



(a) (b) (c)

Рис. 2.5: $\lim_{n\to\infty}$ не существует.

Будем доказывать от противного.

Пусть $x_* \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два случая: (a) $x_* \notin \{-1, 1\}$ и (b) $x_* \in \{-1, 1\}$.

(a) Поскольку $x_* \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_*) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$, см. рис. 2.5(a) (можно положить, например, $\varepsilon = \min\{|x_* - 1|, |x_* + 1|\}$). Но это будет означать, что $U_\varepsilon(x_*)$ вообще не содержит точек последовательности $x_n = (-1)^n$ и, следовательно, x_* не является пределом этой последовательности.

(b) Пусть $x_* \in \{-1, 1\}$. Если $x_* = 1$, см. рис. 2.5(b), то возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим $U_1(1)$. Тогда для всех нечетных $n = 2k - 1$ имеем, что $x_{2k-1} = -1 \notin U_1(1)$. Поскольку таких n бесконечно много, то 1 не может быть пределом последовательности $(-1)^n$. Аналогичные рассуждения показывают, что $x_* = -1$ также не может быть пределом рассматриваемой последовательности.

Пусть $x_* = -\infty$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и рассмотрим $U_{\frac{1}{2}}(-\infty)$ (см. рис. 2.5(c)). Эта окрестность точки $-\infty$ не содержит вообще точек последовательности $(-1)^n$, то есть $-\infty$ не может быть её пределом.

Случаи $x_* \in \{+\infty, \infty\}$ рассматриваются аналогично. ◀

Определение 2.2.4. Последовательность (x_n) называется *сходящейся*, если она имеет предел x_* и $x_* \in \mathbb{R}$. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Пример 2.2.5. 1. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ является сходящейся, поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}$.

2. Последовательность $x_n = 2n$ является расходящейся, поскольку $\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty \notin \mathbb{R}$.

3. Последовательность $x_n = (-1)^n$ является расходящейся, поскольку $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

Определение 2.2.6. Пусть x_* — предел последовательности (x_n). Если $x_* = 0$, то последовательность называется *бесконечно малой.* Если $x_* \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, то последовательность называется *бесконечно большой.*

Пример 2.2.7. 1. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой.

2. Последовательность $x_n = 2n$ является бесконечно большой.

2.2.2 Важные пределы

1. *Для $a > 1$ доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0. \tag{2.2.3}$$

► Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку

$$U_\varepsilon(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\varepsilon}\},$$

для того, чтобы $x_n \in U_\varepsilon(+\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Получим оценку для a^n. Поскольку $a > 1$, то $\alpha = a - 1 > 0$, и имеем, что $a = 1 + \alpha$. Поэтому, используя неравенство Бернулли, получим, что

$$a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha > n\alpha.$$

Таким образом, для того, чтобы $a^n > \frac{1}{\varepsilon}$, достаточно если будет

$$n\alpha > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Решая это неравенство относительно n, получим

$$n > \frac{1}{\varepsilon\alpha}.$$

Следовательно, если $N = \left[\frac{1}{\varepsilon\alpha}\right]$, то $a^n \in U_\varepsilon(+\infty)$ для всех $n > N$, и $+\infty$ является пределом последовательности (a^n).

Для доказательства второго предела опять зададимся $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, что $\frac{1}{a^n} \in U_\varepsilon(0)$ для всех $n \geq N$.

Поскольку

$$U_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \varepsilon\},$$

то условие $\frac{1}{a^n} \in U_\varepsilon(0)$ эквивалентно условию $\frac{1}{a^n} < \varepsilon$ или

$$a^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют предыдущие, и точно также получаем, что при $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon\alpha}\right]$ будем иметь $\frac{1}{a^n} \in U_\varepsilon(0)$. ◀

2. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0. \tag{2.2.4}$$

► Пусть $\varepsilon > 0$ будет задано, и найдем для него $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\sqrt[n]{a} \in U_\varepsilon(1)$ для всех $n > N$. Поскольку

$$U_\varepsilon(1) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \varepsilon\},$$

то условие $\sqrt[n]{a} \in U_\varepsilon(1)$ эквивалентно условию

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon. \tag{2.2.5}$$

Рассмотрим следующие случаи: (a) $a > 1$, (b) $a = 1$, (c) $0 < a < 1$.

(a) Поскольку $a > 1$, то $\alpha_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Найдем оценку для α_n.

Имеем $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, и

$$a = (1 + \alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n > n\alpha_n$$

по неравенству Бернулли. Следовательно,

$$\alpha_n < \frac{a}{n}.$$

Таким образом,

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = |\alpha_n| = \alpha_n < \frac{a}{n}.$$

Поэтому, неравенство (2.2.5) будет выполняться, если

$$\frac{a}{n} < \varepsilon,$$

что имеет место для всех $n > N = \left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$.

(b) В этом случае $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$|\sqrt[n]{1} - 1| = 0 < \varepsilon$$

для всех $\varepsilon > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $N = 1$.

(c) Поскольку $a < 1$, то $\sqrt[n]{a} < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому,

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a}\left|1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right| < \left|1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right| = \left|\sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1\right|.$$

Если положим $b = \frac{1}{a}$, то $b > 1$, и из последнего неравенства следует, что

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < |\sqrt[n]{b} - 1|.$$

Однако для заданного $\varepsilon > 0$ существование N для которого

$$|\sqrt[n]{b} - 1| < \varepsilon$$

для всех $n > N$ следует из (а). ◀

3. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

▶ Пусть $\varepsilon > 0$ задано, и найдем такое N, что

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$$

для всех $n > N$. Заметим, что $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$, и найдем оценку для α_n. Т.к. $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n$ и $n = (1+\alpha_n)^n$, то, используя бином Ньютона, имеем

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + C_n^1\alpha_n + C_n^2\alpha_n^2 + C_n^3\alpha_n^3 + \dots + \alpha_n^n > \\ > C_n^2\alpha_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

поскольку $\alpha_n > 0$, и все слагаемые положительны.

Таким образом,

$$\alpha_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

или

$$\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Поэтому, для того, чтобы имело место

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \alpha_n < \varepsilon$$

достаточно выполнить условие

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon,$$

решая которое относительно n имеем

$$\frac{2}{n-1} < \varepsilon^2,$$

откуда

$$n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1.$$

Отсюда видно, что можно взять $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right]$. ◀

4. *Доказать, что*

$$\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

▶ Вычислим сначала

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = s_n. \tag{2.2.6}$$

Умножив обе части (2.2.6) на q и получив

$$q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n-1} + q^n = qs_n, \tag{2.2.7}$$

вычтем (2.2.7) из (2.2.6). Тогда все члены, кроме первого и последнего, сократятся, и получим

$$1 - q^n = s_n - qs_n = (1-q)s_n.$$

Следовательно,

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

Рассмотрим

$$\left|s_n - \frac{1}{1-q}\right| = \left|\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} - \frac{1}{1-q}\right| = \left|-\frac{q^n}{1-q}\right| = \frac{|q|^n}{1-q}$$

поскольку $|q| < 1$ и, следовательно, $1 - q > 0$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. Требуется доказать, что существует N такое, что

$$\left|s_n - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{|q|^n}{1-q} < \varepsilon$$

для всех $n > N$. Это означает, что $|q|^n < \varepsilon(1-q)$ или

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} < \varepsilon(1-q).$$

Однако, поскольку $\varepsilon(1-q) > 0$ и $\frac{1}{|q|} > 1$, используя (2.2.3), получаем существование необходимого N. ◀

2.2.3 Некоторые теоремы о пределах

Теорема 2.2.8. *Если последовательность (x_n) имеет предел, то этот предел единственный.*

Доказательство. Докажем от противного.

Пусть $x_*^1, x_*^2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ суть два различных предела последовательности (x_n). Тогда существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что $U_{\varepsilon_1}(x_*^1) \cap U_{\varepsilon_2}(x_*^2) = \emptyset$ (см. рис. 2.6).

Противоречие заключается в том, что два не пересекающихся множества содержат все точки последовательности, кроме их конечного числа. □

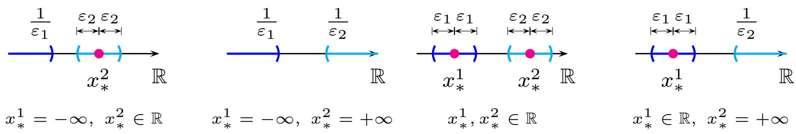


Рис. 2.6: Расположение окрестностей $U_{\varepsilon_1}(x_*^1)$ и $U_{\varepsilon_2}(x_*^2)$.

Теорема 2.2.9. *Если последовательность (x_n) является сходящейся, то она ограничена.*

Доказательство. Поскольку последовательность (x_n) сходится, то существует $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $x_* \in \mathbb{R}$.

Для $\varepsilon = 1$ найдем такое N, что $|x_n - x_*| < 1$ для всех $n \geq N$. Тогда, поскольку $|a+b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$, для таких n имеем:

$$|x_n| = |(x_n - x_*) + x_*| \leq |x_n - x_*| + |x_*| < 1 + |x_*|.$$

Поэтому, для всех $n \in N$:

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_*|\},$$

и последовательность ограничена. □

Определение 2.2.10. Последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называются *отличающимися конечным числом членов*, если существуют такие $r, s \in \mathbb{Z}_+$, что $x_{n+r} = y_{n+s}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2.2.11. 1. Последовательности

$$\begin{array}{ll} x_n: & -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots,\ (-1)^n, \ldots \\ y_n: & 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots \end{array}$$

отличаются конечным числом членов. Здесь $r = 0$, $s = 1$.

2. Последовательности

$$\begin{array}{ll} x_n: & 4,\ 3,\ 2,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n-3},\ \ldots \\ y_n: & -3, -2, \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n-2},\ \ldots \end{array}$$

отличаются конечным числом членов. Здесь $r = 3$, $s = 2$.

Теорема 2.2.12. *Пусть последовательности (x_n) и (y_n) отличаются конечным числом членов. Тогда, если хотя бы один из пределов $\lim_{n\to\infty} x_n$ или $\lim_{n\to\infty} y_n$ существует, то существует и другой предел, и они равны,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство. Пусть $x_{n+r} = y_{n+s}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ существует. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N$. Следовательно, $y_{n+s} = x_{n+r} \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N$, поскольку $n + r > N$ для $n > N$, так как $r \geq 0$. Это означает, что $y_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N + s$. □

2.2.4 Арифметические свойства пределов

Утверждение 2.2.13. *Последовательность (x_n) является бесконечно малой (бесконечно большой) тогда и только тогда, когда последовательность $(|x_n|)$ является бесконечно малой (бесконечно большой).*

Доказательство. Условиями того, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, соответственно, $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ являются

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n = 0 &&\iff &&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: \quad |x_n - 0| < \varepsilon, \\ &\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0 &&\iff &&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: \quad \big||x_n| - 0\big| < \varepsilon, \end{aligned}$$

соответственно, которые очевидно равносильны.

Вторая часть утверждения, касающаяся бесконечно больших последовательностей, доказывается аналогично. □

Утверждение 2.2.14. *Число $x_* \in \mathbb{R}$ является пределом последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда последовательность $(x_n - x_*)$ является бесконечно малой.*

Доказательство. По определению предела, $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: \qquad |x_n - x_*| < \varepsilon. \tag{2.2.8}$$

По определению, последовательность $(x_n - x_*)$ бесконечно мала, если $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_*) = 0$, что по определению предела означает выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: \qquad |(x_n - x_*) - 0| < \varepsilon. \tag{2.2.9}$$

Условия (2.2.8) и (2.2.9) очевидно тождественны. □

Теорема 2.2.15. *Пусть* (x_n), (y_n) *— бесконечно малые последовательности, последовательность* (z_n) *ограничена, и* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда последовательности* $(x_n + y_n)$, (αx_n), $(x_n \cdot z_n)$ *и* $(x_n \cdot y_n)$ *являются бесконечно малыми.*

Доказательство. а) Докажем, что последовательность $(x_n + y_n)$ является бесконечно малой.

Зададимся $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (x_n) бесконечно мала, то найдется $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_n - 0| = |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n \geq N_1$.

Аналогично имеем, что найдется $N_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|y_n - 0| = |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n \geq N_2$.

Полагая $N = \max\{N_1, N_2\}$ и используя неравенство треугольника имеем

$$|(x_n + y_n) - 0| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n \geq N$.

б) Докажем, что последовательность (αx_n) является бесконечно малой.

Если $\alpha = 0$, то $\alpha x_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = 0$, т.е. (αx_n) бесконечно мала.

Если $\alpha \neq 0$, то, задавшись $\varepsilon > 0$, рассмотрим условие

$$|\alpha x_n| = |\alpha|\,|x_n| < \varepsilon.$$

Это эквивалентно условию

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|},$$

которое выполняется для всех $n > N$ с некоторым $N \in \mathbb{R}$, поскольку последовательность (x_n) бесконечно мала.

в) Докажем, что последовательность $(x_n \cdot z_n)$ является бесконечно малой.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность (z_n) ограничена, это означает, что существует $C > 0$ такое, что $|z_n| < C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$|x_n \cdot z_n| = |x_n|\,|z_n| < |x_n|\,C.$$

Таким образом, для того, чтобы выполнялось

$$|x_n \cdot z_n| < \varepsilon,$$

достаточно, чтобы выполнялось $|x_n|\,C < \varepsilon$, или

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Однако, поскольку (x_n) бесконечно мала, то существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что предыдущее неравенство верно для всех $n > N$.

г) Покажем, наконец, что $(x_n \cdot y_n)$ бесконечно мала. Так как последовательность (y_n) бесконечно мала, то она является сходящейся (к нулю), а в силу теоремы 2.2.9 об ограниченности сходящейся последовательности, она является ограниченной. Таким образом, г) следует из в). $\square$

Утверждение 2.2.16. *Последовательность (x_n), $x_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, является бесконечно малой тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ является бесконечно большой.*

Доказательство. Последовательность (x_n) является бесконечно малой тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \qquad |x_n| < \varepsilon.$$

Последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Эти условия очевидно равносильны. $\square$

Лемма 2.2.17. *Пусть $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и существует $y_* = \lim_{n\to\infty} y_n$, причем $y_* \neq 0$. Тогда последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ ограничена.*

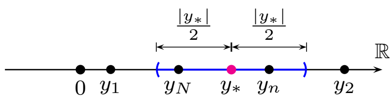


Рис. 2.7: Ограниченность последовательности $\left(\frac{1}{y_n}\right)$.

Доказательство. Положим $y_* = \lim_{n\to\infty} y_n$. Тогда существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|y_n - y_*| < \frac{|y_*|}{2}$$

для всех $n > N$ (см. рис. 2.7), поскольку $\frac{|y_*|}{2} > 0$ по условию. Для таких n, используя свойство модуля $|a+b| \geq \big||a|-|b|\big|$, тогда имеем

$$|y_n| = |y_* + (y_n - y_*)| \geq \big||y_*| - |y_n - y_*|\big| > \Big||y_*| - \frac{|y_*|}{2}\Big| = \frac{|y_*|}{2}.$$

Таким образом,

$$|y_n| > \frac{|y_*|}{2},$$

и

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y_*|}, \qquad n > N.$$

Поскольку $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то, используя найденное N, имеем

$$\Big|\frac{1}{y_n}\Big| \leq \max\Big\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \ldots, \frac{1}{|y_N|}, \frac{2}{|y_*|}\Big\}.$$

□

Теорема 2.2.18. *Пусть последовательности (x_n) и (y_n) являются сходящимися, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда сходящимися являются последовательности $(x_n + y_n)$, (αx_n), $(x_n \cdot y_n)$, и*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2.2.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{2.2.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.2.12}$$

Если $y_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательности $(\frac{1}{y_n})$ и $(\frac{x_n}{y_n})$ также сходятся, и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \tag{2.2.13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \tag{2.2.14}$$

Доказательство. Пусть $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $y_* = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Для доказательства равенства (2.2.10) необходимо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_* + y_*,$$

или, используя утверждение 2.2.14, что последовательность

$$\big((x_n + y_n) - (x_* + y_*)\big) \tag{2.2.15}$$

является бесконечно малой. Однако,

$$(x_n + y_n) - (x_* + y_*) = (x_n - x_*) + (y_n - y_*),$$

а последовательности $(x_n - x_*)$ и $(y_n - y_*)$ являются бесконечно малыми в силу утверждения 2.2.14. Так как сумма бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой по утверждению 2.2.15, то последовательность (2.2.15) является бесконечно малой, и имеет место (2.2.10).

Для доказательства (2.2.11) докажем, что

$$(\alpha x_n - \alpha x_*) \tag{2.2.16}$$

является бесконечно малой. Однако,

$$\alpha x_n - \alpha x_* = \alpha(x_n - x_*),$$

а последовательность $(x_n - x_*)$ является бесконечно малой. Используя утверждение 2.2.15, убеждаемся, что последовательность (2.2.16) также является бесконечно малой.

Чтобы доказать (2.2.12), достаточно доказать, что последовательность

$$(x_n \cdot y_n - x_* y_*) \tag{2.2.17}$$

является бесконечно малой.

Действительно, имеем:

$$x_n y_n - x_* y_* = (x_n y_n - x_n y_*) + (x_n y_* - x_* y_*) = x_n(y_n - y_*) + y_*(x_n - x_*). \tag{2.2.18}$$

Последовательность (x_n) является сходящейся, а потому ограниченной по теореме 2.2.9. Последовательность (y_n) является сходящейся по условию, а потому последовательность $(y_n - y_*)$ является бесконечно малой по утверждению 2.2.14. Таким образом, последовательность

$$x_n(y_n - y_*) \tag{2.2.19}$$

является бесконечно малой по утверждению 2.2.15.

Рассмотрим второе слагаемое в (2.2.18),

$$y_*(x_n - x_*). \tag{2.2.20}$$

Поскольку (x_n) является сходящейся, то $(x_n - x_*)$ является бесконечно малой, а поскольку (y_n) является сходящейся, то $y_* \in \mathbb{R}$. Таким образом, по утверждению 2.2.15 последовательность с общим членом (2.2.20) является бесконечно малой. Используя (2.2.18) и утверждение 2.2.15, убеждаемся, что последовательность (2.2.17) является бесконечно малой.

Для доказательства (2.2.13) докажем, что

$$\left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_*}\right) \tag{2.2.21}$$

является бесконечно малой.

Имеем

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_*} = \frac{y_* - y_n}{y_n\, y_*} = -\frac{1}{y_*}\,\frac{1}{y_n}\,(y_n - y_*),$$

где $-\frac{1}{y_*} \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ — ограниченная последовательность по лемме 2.2.17, а $(y_n - y_*)$ бесконечно мала. Таким образом, последовательность (2.2.21) также бесконечно мала.

Равенство (2.2.14) теперь непосредственно следует из (2.2.12) и (2.2.13). Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}.$$

□

Задачи

[5] *КР*: 41, 42 (а, в), 44,
58
67 (а, в).
46, 47, 48,
127 (а), 128 (а), 129, 130.

ДЗ: 42 (б, г), 43 (а), 45,
60, 62,
67 (в),
49, 50,
127 (б), 128 (б).

2.2.5 Переход к пределам в неравенствах

Теорема 2.2.19. *Пусть последовательности* (x_n) *и* (y_n) *имеют пределы,* $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y_* = \lim_{n\to\infty} y_n$, *где* $x_*, y_* \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, *и* $x_n \le y_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}x_n \le \lim_{n\to\infty}y_n. \tag{2.2.22}$$

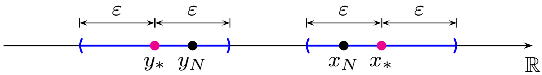


Рис. 2.8: Доказательство теоремы 2.2.19

Доказательство. Рассмотрим случай когда $x_*, y_* \in \mathbb{R}$. Предположим, что (2.2.22) не верно, т.е. $x_* > y_*$.

Пусть $\varepsilon > 0$ будет таким, чтобы $U_\varepsilon(y_*) \cap U_\varepsilon(x_*) = \emptyset$. Поскольку $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, то существует N_1 такое, что $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N_1$. Точно также, существует N_2 такое, что $y_n \in U_\varepsilon(y_*)$ для всех $n > N_2$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $x_N \in U_\varepsilon(x_*)$ и $y_N \in U_\varepsilon(y_*)$, и, следовательно, $y_N < x_N$ (см. рис. 2.8), что противоречит условию, что $x_n \le y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Случаи $x_* \in \{-\infty, +\infty\}$ или $y_* \in \{-\infty, +\infty\}$ рассматриваются аналогично. $\square$

Замечание 2.2.20. Если $x_n < y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то может случиться, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Например, для $x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ и $y_n = \frac{1}{n+1}$ имеем, что $x_n < y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, однако

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

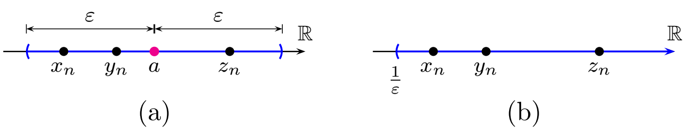


Рис. 2.9: Связность окрестности $U_\varepsilon(a)$: (a) $a \in \mathbb{R}$; (b) $a = +\infty$.

Теорема 2.2.21 (про двух милиционеров (полицейских)). *Пусть* (x_n), (y_n) *и* (z_n) *последовательности такие, что*

$$x_n \le y_n \le z_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.23}$$

Если существуют $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ *и* $z_* = \lim_{n\to\infty} z_n$*, и* $x_* = z_* = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*, то существует* $y_* = \lim_{n\to\infty} y_n$*, причем* $y_* = a$*.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n > N_1$, а $z_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n > N_2$. Тогда $x_n, z_n \in U_\varepsilon(a)$ для всех $n > \max\{N_1, N_2\}$. Но тогда для таких n весь отрезок $[x_n, z_n] \subset U_\varepsilon(a)$ (рис. 2.9), и, поскольку $y_n \in [x_n, z_n]$, то $y_n \in U_\varepsilon(a)$. □

Задачи

[6] *КР*: II.1.18 (8, 12, 20)
ДЗ: II.1.18 (13, 19, 27)

2.2.6 Предел монотонной последовательности. Число e

Определение 2.2.22. Последовательность (x_n) называется *монотонно неубывающей* (*возрастающей*), если $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$) для всех $n \in \mathbb{N}$. Эта последовательность называется *монотонно невозрастающей* (*убывающей*), если $x_n \ge x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Монотонно неубывающая или монотонно невозрастающая последовательность называется *монотонной.*

Теорема 2.2.23 (Вейерштрасс)**.** *Пусть* (x_n) *монотонно неубывающая (невозрастающая) последовательность. Если она ограничена сверху (снизу), то она является сходящейся и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n\right).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда (x_n) является неубывающей. Случай невозрастающей последовательности рассматривается аналогично.

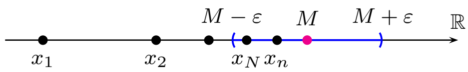


Рис. 2.10: Доказательство теоремы Вейерштрасса

Пусть $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Докажем, что $M = \lim_{n\to\infty} x_n$. Для этого зададимся $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n \in U_\varepsilon(M)$ для всех $n \geq N$.

Если $x_n \notin U_\varepsilon(M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x_n \leq M - \varepsilon$ (см. рис. 2.10). Но тогда $M - \varepsilon$ является верхней гранью множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, и $M - \varepsilon < M$, что невозможно, так как M является наименьшей верхней гранью. Таким образом, существует $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_N \in U_\varepsilon(M)$. Но тогда

$$x_N \leq x_n \leq M$$

для всех $n \geq N$ в силу монотонности последовательности. А это означает, что $x_n \in U_\varepsilon(M)$ для всех $n > N - 1$. □

Следствие 2.2.24. *Если последовательность (x_n) монотонна и ограничена, то она сходится.*

Доказательство. Ограниченность последовательности означает, что она ограничена как сверху, так и снизу. Поэтому если (x_n) монотонно неубывающая или невозрастающая последовательность, то она сходится по теореме 2.2.23. □

Число e

Лемма 2.2.25. *Рассмотрим последовательности (x_n) и (y_n), заданные как*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{2.2.24}$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n, \tag{2.2.25}$$

т.е. последовательность (x_n) *является монотонно возрастающей, последовательность* (y_n) *является монотонно убывающей, и* $x_n < y_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для доказательства первого неравенства докажем, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n} >$$

$$> \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) =$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1,$$

где первое неравенство было получено применением неравенства Бернулли.

То, что $x_n < y_n$, $n \in \mathbb{N}$, сразу следует, поскольку $\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n.$$

Докажем теперь, что последовательность (y_n) убывает. Для этого достаточно показать, что $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$, $n \geq 2$. Имеем:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n >$$

$$> \frac{n}{n+1} \cdot \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2+n-1}{n^2-1} =$$

$$= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1,$$

где снова первое неравенство получено с использованием неравенства Бернулли. □

Теорема 2.2.26. *Последовательность* $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *является сходящейся.*

Доказательство. Из неравенства (2.2.25) следует, что

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < y_n < \cdots < y_2 < y_1,$$

т.е. последовательность (x_n) является монотонно возрастающей и ограниченной сверху числом $y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4$. По теореме Вейерштрасса (теорема 2.2.23) она является сходящейся. □

Определение 2.2.27. Предел

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828182845\ldots$$

называется *вторым замечательным пределом*, а его значение обозначается буквой e. Также $\log_e$ обозначается через $\ln$.

Следствие 2.2.28. *Для всех* $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Доказательство. Из неравенства (2.2.25) следует, что

$$x_n < e < y_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

то есть,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Поскольку $e > 1$, то функция ln является возрастающей, и поэтому, из последнего неравенства следует, что

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

или

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Из первого неравенства следует, что

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

а из второго, что

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

□

Задачи

[5] *КР*: 59, 77, 80
ДР: 61, 78, 79, 81

2.3 Теоремы Коши-Кантора и Больцано–Вейерштрасса

Теорема 2.3.1 (Коши–Кантора)**.** *Пусть система отрезков* $[a_n, b_n]$*,* $n \in \mathbb{N}$*, является вложенной, т.е.*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \tag{2.3.1}$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

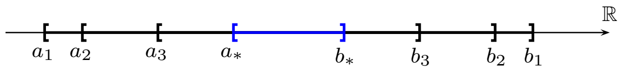


Рис. 2.11: Доказательство теоремы Коши–Кантора

Доказательство. Прежде всего заметим, см. рис. 2.11, что из включений (2.3.1) следует, что

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Отсюда следует, что последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ является неубывающей и ограниченной сверху, например, b_1. Следовательно она имеет предел a_*,

$$a_* = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Точно также последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ является невозрастающей и ограниченной снизу, а значит существует предел,

$$b_* = \lim_{n\to\infty} = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

Заметим, что каждое b_n является верхней гранью для всех a_k, $k \in \mathbb{N}$, поэтому $a_* \leq b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, поскольку a_* является наименьшей верхней гранью всех a_k по определению супремума. Это показывает, что a_* является нижней гранью для всех b_n, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $a_* \leq b_*$ по определению инфимума.

Итак, имеем цепочку неравенств

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq a_* \leq b_* \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Докажем, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a_*, b_*].$$

Действительно, $[a_*, b_*] \subset [a_n, b_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а значит

$$[a_*, b_*] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Если же $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, то $c \in [a_n, b_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $a_n \leq c$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и c является верхней гранью для a_n, а значит $a_* \leq c$. Точно также $c \leq b_*$, и, следовательно, $c \in [a_*, b_*]$. Таким образом,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subset [a_*, b_*],$$

т.е. имеет место равенство

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a_*, b_*].$$

$\square$

Следствие 2.3.2. *Пусть система отрезов $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, является вложенной и*

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

для некоторой $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Действительно,

$$b_* - a_* = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

по условию. Следовательно, $c = b_* = a_*$, и $[a_*, b_*] = \{c\}$. □

Определение 2.3.3. Пусть $\varepsilon > 0$. *Выколотой ε-окрестностью* точки $x_* \in \mathbb{R}$ называется множество $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_*) = U_\varepsilon(x_*) \setminus \{x_*\}$. Если $x_* \in \{\infty, -\infty, +\infty\}$, то $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_*) = U_\varepsilon(x_*)$.

Определение 2.3.4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Точка $x_* \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty, +\infty\}$ называется предельной точкой множества X, если $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_*) \cap X \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$.

Пример 2.3.5.

1. Пусть $X = (0,1)$. Тогда все точки $x_* \in [0,1]$ являются предельными.
2. Пусть $X = (0,1) \cup \{2\}$. Тогда множество предельных точек X также совпадает с $[0,1]$.
3. Для $X = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ множество предельных точек совпадает с $[0,1]$.
4. Пусть $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда 0 является единственной предельной точкой множества X.
5. Пусть $X = \mathbb{N}$. Единственной предельной точкой является $+\infty$.

Утверждение 2.3.6. *Точка $x_* \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда существует последовательность (x_n) в X (т.е. $x_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$) такая, что $x_n \neq x_*$ для всех n и $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Доказательство. Пусть x_* — предельная точка множества X, и построим такую последовательность (x_n) в X, что $x_n \to x_*$, $n \to \infty$.

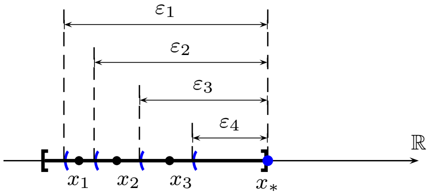


Рис. 2.12: Нахождение последовательности (x_n), $x_n \to x_*$ для $X = [0,1]$, $x_* = 1$.

Возьмем произвольное ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$ (см. рис. 2.12). Поскольку x_* — предельная точка, то $X \cap \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_1}(x_*) \neq \emptyset$, т.е. существует $x_1 \in X \cap \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_1}(x_*)$. Так как $x_* \notin \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_1}(x_*)$, то $x_1 \neq x_*$. Поэтому, существует такое ε_2, $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$, что $x_1 \notin \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_2}(x_*)$.

Опять $X \cap \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_2}(x_*) \neq \emptyset$, т.е. существует $x_2 \in X \cap \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_2}(x_*)$. Как и ранее, $x_2 \neq x_*$. Поэтому, существует такое ε_3, $0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{3}$, что $x_2 \notin \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_3}(x_*)$.

Аналогично находим $x_3 \in X \cap \overset{\circ}{U}_{\varepsilon_3}(x_*)$, и т.д.

Докажем, что построенная последовательность (x_n) сходится к x_*. По построению, $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_*)$, т.е

$$|x_n - x_*| < \frac{1}{n},$$

откуда и следует, что $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Обратно, пусть $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in X \setminus \{x_*\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и докажем, что x_* — предельная точка множества X.

Действительно, поскольку $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x_*)$ для всех $n > N$. Следовательно,

$$X \cap \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x_*) \supset \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\},$$

и $X \cap \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_*) \neq \emptyset$. $\square$

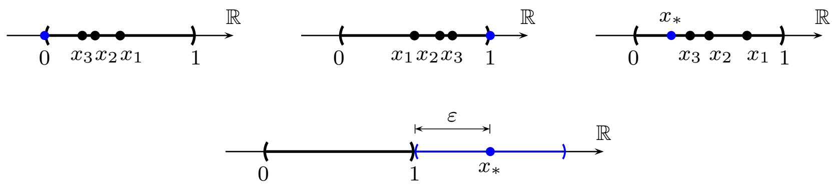


Рис. 2.13: Предельные точки $X = (0, 1)$.

Пример 2.3.7. Пусть $X = (0, 1)$. Покажем, что множество предельных точек совпадает с отрезком $[0, 1]$ (см. рис. 2.13).

Действительно, 0 является предельной точкой, т.к. последовательность $x_n = \frac{1}{n+1}$ лежит в X и имеет 0 своим пределом.

Аналогично 1 является предельной точкой, т.к. $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \in (0, 1)$ и $x_n \to 1$.

Если $x_* \in (0, 1)$ то возьмем $\delta > 0$ такое, что $x_* + \delta < 1$ (например, $\delta = \frac{1}{2}(1 - x_*)$) и рассмотрим последовательность $x_* + \frac{\delta}{n}$. Тогда $x_n \in (0, 1)$ и $x_n \to x_*$.

Если $x_* \notin [0, 1]$, то $x_* > 1$ или $x_* < 0$. Если $x_* > 1$, то для $\varepsilon = x_* - 1$ имеем $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_*) \cap (0, 1) = \emptyset$. Таким образом, x_* не является предельной точкой. Аналогично доказывается, что $x_* < 0$ не является предельной точкой.

Теорема 2.3.8 (Больцано–Вейерштрасса). *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — бесконечное ограниченное множество. Тогда X имеет хотя бы одну предельную точку в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Поскольку множество X ограничено, то существуют такие $m, M \in \mathbb{R}$, что $X \subset [m, M]$. Положим $a_1 = m$ и $b_1 = M$ (см. рис. 2.14).

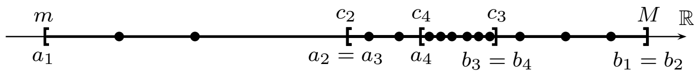


Рис. 2.14: Предельные точки бесконечного ограниченного множества

Пусть точка c_2 делит отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Поскольку множество X бесконечно, то какой-нибудь отрезок $[a_1, c_2]$ или $[c_2, b_1]$ (а может и оба) содержит бесконечное количество точек. Пусть, например, это будет отрезок $[c_2, b_1]$. Тогда обозначим точку c_2 через a_2, а b_1 через b_2.

Теперь разделим отрезок $[a_2, b_2]$ пополам точкой c_3, и рассмотрим два отрезка $[a_2, c_3]$ и $[c_3, b_2]$. По построению, отрезок $[a_2, b_2]$ содержит бесконечное количество точек множества X. Следовательно, один из отрезков $a_2, c_3]$ или $[c_3, b_2]$ (или оба) содержит бесконечное количество элементов множества X. Предположим, что это отрезок $[a_2, c_3]$. Тогда обозначим a_2 через a_3 а c_3 через b_3.

Разделим отрезок $[a_3, b_3]$ пополам точкой c_4, и опять рассмотрим два отрезка $a_3, c_4]$ и $[c_4, b_3]$ и выберем тот, который содержит бесконечное количество элементов множества X.

Продолжая таким образом, получим систему вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots,$$

причем $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Из следствия 2.3.2 имеем, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

для точки

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

(c не обязательно лежит в X).

Докажем, что c является предельной точкой множества X. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $U_\varepsilon(c)$. Поскольку $c = \lim_{n\to\infty} a_n$, то существует такое N_1, что $a_n \in U_\varepsilon(c)$ для всех $n > N_1$. Точно также, существует такое N_2, что $b_n \in U_\varepsilon(c)$ для всех $n > N_2$. Положив $N = \max\{N_1, N_2\}$, получим, что $a_{N+1}, b_{N+1} \in U_\varepsilon(c)$, а значит $[a_{N+1}, b_{N+1}] \subset U_\varepsilon(c)$. Поскольку $[a_{N+1}, b_{N+1}]$ содержит бесконечное количество точек множества X по построению, и эти точки принадлежат $U_\varepsilon(c)$, то $X \cap \overset{\circ}{U}_\varepsilon(c) \neq \emptyset$. □

2.4 Подпоследовательности. Частичные пределы

2.4.1 Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 2.4.1. Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — последовательность, а $K \subset \mathbb{N}$ — бесконечное множество. Тогда функция $\tilde{\varphi}\colon K \to \mathbb{R}$, являющаяся ограничением функции φ на K, т.е. $\tilde{\varphi}(k) = \varphi(k)$ при $k \in K$, называется *подпоследовательностью* последовательности φ.

Замечание 2.4.2. Если $x_n = \varphi(n)$ и

$$K = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_j, \dots : n_1 < n_2 < \dots\},$$

то соответствующей подпоследовательностью будет

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_j}, \dots,$$

которая сама является последовательностью $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$.

Пример 2.4.3.

1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, а $K = \{10, 20, 30, 40, \dots, 10j, \dots\}$. Тогда соответствующей подпоследовательностью будет

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots, \frac{1}{10k}, \dots,$$

или $(\frac{1}{10k})_{k=1}^{\infty}$.

2. Пусть $x_n = (-1)^n$. Если $K_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, то соответствующей подпоследовательностью будет $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$, которая представляет из себя последовательность чисел

$$-1, -1, -1, \dots, -1, \dots.$$

Если рассмотреть $K_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, то соответствующей подпоследовательностью будет $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$, являющаяся последовательностью чисел

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots.$$

Утверждение 2.4.4. *Пусть последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел* $x_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$, *т.е.* $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$. *Если* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *— произвольная подпоследовательность, то она имеет тот же предел,* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, и рассмотрим $U_\varepsilon(x_*)$ — ε-окрестность точки x_*. Поскольку $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n \geq N$.

Заметим, что если

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

является подпоследовательностью последовательности (x_n), то $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$, и т.д., то есть $n_k \geq k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому, если $k > N$, то $n_k \geq k > N$, то есть $x_{n_k} \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $k > N$. А это означает, что все члены подпоследовательности (x_{n_k}) принадлежат $U_\varepsilon(x_*)$ кроме конечного их числа. □

Теорема 2.4.5 (Больцано–Вейерштрасс). *Пусть последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, т.е. существует такое* $C \in \mathbb{R}$, *что* $|x_n| \leq C$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда эта последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *не является ограниченной сверху (снизу), то существует подпоследовательность* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$ $(\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна сверху.

Поскольку 1 не может быть верхней гранью, существует элемент x_{n_1} такой, что $x_{n_1} > 1$. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=n_1+1}^{\infty}$. Поскольку она отличается от исходной последовательности только отсутствием конечного количества членов, то она также является неограниченной сверху. Поэтому существует такой элемент x_{n_2} ($n_2 > n_1$ по построению), что $x_{n_2} > 2$. Точно также рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=n_2+1}^{\infty}$. Она также неограниченна. Поэтому существует n_3 (по построению, $n_3 > n_2$) такой, что $x_{n_3} > 3$. Продолжая таким образом получим последовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, являющейся подпоследовательностью исходной. По построению, $x_{n_k} > k$ и, следовательно, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Если последовательность (x_n) неограниченна снизу, построение производится аналогично.

Предположим теперь, что последовательность ограничена. Рассмотрим множество $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Если множество X конечно, то существует $x_* \in X$ такое, что множество

$$N_* = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x_*\}$$

является бесконечным. Тогда ограничение $(x_k)_{k\in N_*}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на множество N_* и есть искомая подпоследовательность.

Предположим теперь, что множество X бесконечно. Поскольку множество X ограничено, по теореме 2.3.8 оно имеет предельную точку $x_* \in \mathbb{R}$. А по утверждению 2.3.6 существует последовательность в X, т.е. подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к x_*. □

Пример 2.4.6. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$ (см. пример 2.4.3). Она является ограниченной, $|x_n| \le 1$, $n \in \mathbb{N}$. Её сходящимися подпоследовательностями будут $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$ и $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$, причем $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$, а $\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}(-1) = -1$.

2.4.2 Верхние и нижние пределы последовательности

Определение 2.4.7. Точка $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ называется *частичным пределом* последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если существует такая подпоследовательность (x_{n_k}), что $a = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Пример 2.4.8.
1. Последовательность $x_n = (-1)^n$ имеет два частичных предела: $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$.

2. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ имеет единственный частичный предел $a = 0$, поскольку эта последовательность сходится, а любая подпоследовательность сходящейся последовательности также сходится и имеет тот же предел (утверждение 2.4.4).

3. Рассмотрим последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$:

$$\frac{1}{1},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 6,\ \frac{1}{7},\ \ldots.$$

Частичными пределами будут элементы 0, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1} = 0,$$

и $+\infty$, поскольку

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} 2k = +\infty.$$

Определение 2.4.9. Пусть A — множество частичных пределов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *Верхним пределом* последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется величина

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \sup A, & \text{если } A \text{ ограничено сверху,} \\ +\infty, & \text{если } +\infty \in A, \\ -\infty, & \text{если } A = \{-\infty\}. \end{cases}$$

Нижним пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется величина

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \inf A, & \text{если } A \text{ ограничено снизу,} \\ -\infty, & \text{если } -\infty \in A, \\ +\infty, & \text{если } A = \{+\infty\}. \end{cases}$$

Пример 2.4.10.

1. Пусть $x_n = (-1)^n$. Тогда $A = \{-1, 1\}$ и $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1$ а $\varliminf_{n\to\infty} x_n = -1$.

2. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$. Тогда $A = \{0\}$ и $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Тогда $A = \{0, +\infty\}$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$, а $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

4. Пусть $x_n = n$. Тогда $A = \{+\infty\}$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Задачи

КР: 101.1, 103, 106, 112, 121, 122,
ДР: 102, 105, 109, 113, 123

2.4.3 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

Определение 2.4.11. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если выполнено следующее условие:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n_1, n_2 > N: \qquad |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon. \tag{2.4.1}$$

Замечание 2.4.12. Поскольку n_1 и n_2 в условие (2.4.1) входят симметричным образом, то можно предполагать, что $n_2 \geq n_1$, т.е. $n_2 = n_1 + p$, где $p \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому условие (2.4.1) можно переписать как

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}_+: \qquad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon. \tag{2.4.2}$$

Пример 2.4.13. 1. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{1}{n}$. Докажем, что она является фундаментальной.

Зададимся $\varepsilon > 0$. Для $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим

$$|x_n - x_{n+p}| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Поэтому, если $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$, то для $n > N$ будем иметь
$$|x_n - x_{n+p}| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$
и это выполняется для всех $p \in \mathbb{Z}$.

2. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Докажем, что она не является фундаментальной.

   Для $n \in \mathbb{N}$ и $p = 1 \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим
$$|x_n - x_{n+p}| = |x_n - x_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |2(-1)^n| = 2$$
   для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, взяв $\varepsilon = 1$ в условии (2.4.2), видим, что оно не может быть выполнено ни для какого $N \in \mathbb{N}$.

3. Рассмотрим последовательность $x_n = n$. Докажем, что она не является фундаментальной.

   Для $n \in \mathbb{N}$ и $p = 1 \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим
$$|x_n - x_{n+p}| = |x_n - x_{n+1}| = |n - (n+1)| = 1.$$
   Таким образом, взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}$ в условии (2.4.2), видим, что оно не может быть выполнено ни для какого $N \in \mathbb{N}$.

Утверждение 2.4.14. *Сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть последовательность (x_n) сходится, т.е. существует $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $x_* \in \mathbb{R}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, и найдем $N \in \mathbb{N}$, для которого условие (2.4.2) будет выполнено.

Зададимся некоторым $\varepsilon_1 > 0$. Поскольку последовательность (x_n) имеет x_* своим пределом, то существует $N_1 \in \mathbb{N}$, для которого $x_n \in U_{\varepsilon_1}(x_*)$ при $n > N_1$. Т.к. $x_* \in \mathbb{R}$, то последнее означает, что
$$|x_n - x_*| < \varepsilon_1, \qquad n \geq N_1.$$

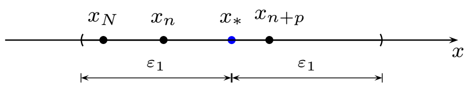


Рис. 2.15: Доказательство утверждения 2.4.14

Поэтому, если $n > N_1$, то $n + p > N_1$ для произвольного $p \in \mathbb{Z}_+$ и, следовательно

$$|x_n - x_{n+p}| = |x_n - x_* + x_* - x_{n+p}| \le |x_n - x_*| + |x_* - x_{n+p}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1.$$

Поэтому, взяв в начале $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ и затем положив $N = N_1$, мы докажем выполнение условия (2.4.2). $\square$

Лемма 2.4.15. *Фундаментальная последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Действительно, если последовательность (x_n) является фундаментальной, то, взяв $\varepsilon = 1$, согласно условию (2.4.1) можно найти такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$|x_{N+1} - x_n| < 1$$

для всех $n > N$. Поэтому, для таких n имеем:

$$|x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}| \le |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|.$$

Следовательно, положив

$$C = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1 + |x_{N+1}|\},$$

получим, что $|x_n| \le C$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность (x_n) является ограниченной. $\square$

Лемма 2.4.16. *Фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Если последовательность (x_n) является фундаментальной, то она является ограниченной по лемме 2.4.15. Тогда по теореме Больцано–Вейерштрасса (теорема 2.4.5) она обладает сходящейся подпоследовательностью. □

Теорема 2.4.17 (критерий Коши). *Последовательность (x_n) является сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Если последовательность (x_n) является сходящейся, то она является фундаментальной (утверждение 2.4.14). Поэтому остается доказать, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

Итак, пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. По лемме 2.4.16 она имеет сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x_* = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, и докажем, что x_* является пределом всей последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$|x_* - x_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$.

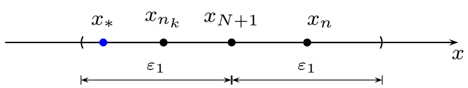


Рис. 2.16: Доказательство теоремы 2.4.17

Возьмем произвольное пока $\varepsilon_1 > 0$, и найдем $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_{N+1} - x_n| < \varepsilon_1$$

для всех $n > N$, что возможно в силу фундаментальности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Поскольку $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, то $n_k > N$, для всех k, начиная с некоторого k_0.

Поэтому, для таких k имеем также, что $|x_{N+1} - x_{n_k}| < \varepsilon_1$ или

$$-\varepsilon_1 < x_{N+1} - x_{n_k} < \varepsilon_1$$

при $k > k_0$. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, и учитывая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_*$, получим

$$-\varepsilon_1 \leq x_{N+1} - x_* \leq \varepsilon_1.$$

Следовательно, при $n > N$ имеем:

$$|x_* - x_n| = |x_* - x_{N+1} + x_{N+1} - x_n| \leq$$
$$\leq |x_* - x_{N+1}| + |x_{N+1} - x_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1.$$

Поэтому, если N было найдено для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, то получим, что $x_n \in U_\varepsilon(x_*)$ для всех $n > N$, т.е. x_* является пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Задачи

КР: 82, 83, 87, 88
ДР: 84, 85

Глава 3

Предел и непрерывность функций действительного переменного

3.1 Предел функции

3.1.1 Определение предела функции

Определение 3.1.1 (по Гейне)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $x_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ является предельной точкой множества X. Точка $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ называется *пределом* функции f в точке x_* и обозначается

$$c = \lim_{x \to x_*} f(x),$$

если для любой последовательности (x_n) в X такой, что $x_n \to x_*$ и $x_n \neq x_*$ для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Пример 3.1.2. 1. Докажем, что

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

(здесь $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $x_* = 2$, $c = 8$).

Действительно, пусть (x_n) — произвольная последовательность такая, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^3 = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)^3 = 2^3 = 8.$$

2. Докажем, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Здесь $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_* = \infty$, $c = 0$.

Действительно, пусть (x_n) — произвольная последовательность такая, что $x_n \neq 0$ для всех n и $x_n \to \infty$, т.е. (x_n) является бесконечно большой. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{x_n} = 0,$$

поскольку $(\frac{1}{x_n})$ является бесконечно малой.

3. Пусть $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

не существует.

Действительно, взяв $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем, что $x_n \to 0$ и $\operatorname{sgn} x_n = \operatorname{sgn} \frac{1}{n} = 1$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$.

С другой стороны, взяв $x'_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем, что $x'_n \to 0$, и $\operatorname{sgn} x'_n = -1$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x'_n = -1$.

А предел c, если он существует, должен быть одним и тем же для любой последовательности (x_n), что не имеет места в данном случае.

4. Пусть $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Докажем, что

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

не существует.

Действительно, найдем все точки x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin \frac{1}{x} = 1.$$

Имеем $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $x_n \to 0$ а $\sin \frac{1}{x_n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Теперь найдем все x такие, что

$$\sin \frac{1}{x} = -1.$$

Имеем $\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Положим

$$x'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $x'_n \to 0$ а $\sin \frac{1}{x'_n} \to -1$, при $n \to \infty$.

Значение предела не может зависеть от выбора последовательности. Следовательно $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

Определение 3.1.3 (по Коши)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $x_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ является предельной точкой множества X. Точка $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ называется *пределом* функции f в точке x_*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$f(X \cap \overset{\circ}{U}_\delta (x_*)) \subset U_\varepsilon(c). \tag{3.1.1}$$

Замечание 3.1.4. Если $x_*, c \in \mathbb{R}$, то условие в (3.1.1) эквивалентно условию

$$\begin{cases} x \in X, \\ 0 < |x - x_*| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - c| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Утверждение 3.1.5. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Предположим в начале, что c является пределом $f(x)$ при $x \to x_*$ по Коши (определение 3.1.3). Пусть (x_n) — произвольная последовательность в X, $x \to x_*$ и $x_n \neq x_*$ для всех n, и докажем, что $f(x_n) \to c$.

Зададимся $\varepsilon > 0$, и выберем $\delta > 0$ с тем, чтобы выполнялось (3.1.1). Для найденного δ, поскольку $x_n \to x_*$, найдем такое N, чтобы $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_*)$ при $n > N$. Тогда, согласно (3.1.1), $f(x_n) \in \overset{\circ}{U}_\delta(c)$ для $n > N$. Это означает, что $f(x_n) \to c$.

Теперь пусть c является пределом $f(x)$ при $x \to x_*$ по Гейне (определение 3.1.1), и, предположив, что c не является пределом по Коши, получим противоречие. Запишем определение (3.1.1) в следующем виде:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta (x_*) : \qquad f(x) \in U_\varepsilon(c).$$

Отрицание этого условия означает следующее:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in X \cap \overset{\circ}{U}_\delta (x_*) : \qquad f(x) \notin U_\varepsilon(c). \tag{3.1.3}$$

Таким образом, фиксируем $\varepsilon > 0$ из условия (3.1.3), и для каждого $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, согласно условию (3.1.3), найдем такое $x_n \in X \cap \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{n}} (x_*)$, что $f(x_n) \notin U_\varepsilon(c)$. Тогда, по построению $x_n \to x_*$, но $f(x_n) \not\to c$, что противоречит тому, что c является пределом по Гейне. □

Задачи

КР: 403, 404, 405.
ДР: 406.

3.1.2 Первый замечательный предел.

Утверждение 3.1.6. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$, x_* — предельная точка множества X и f, g, h — функции, определенные на X, причем*

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \qquad x \in X.$$

Тогда, если существуют $\lim_{x \to x_*} f(x)$ и $\lim_{x \to x_*} h(x)$, и

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = \lim_{x \to x_*} h(x),$$

то существует $\lim_{x \to x_*} g(x)$ и

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = \lim_{x \to x_*} g(x) = \lim_{x \to x_*} h(x).$$

Доказательство. Пусть $x_n \to x_*$ и $c = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n)$. Тогда $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$ по условию. Следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ и равен c по теореме 2.2.21. $\square$

Утверждение 3.1.7. *Для всех* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$*:*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{3.1.4}$$

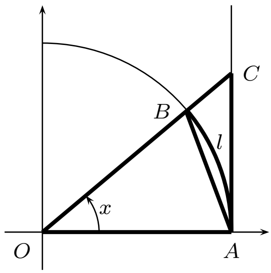


Рис. 3.1: Доказательство утверждения 3.1.7

Доказательство. Рассмотрим единичную окружность, угол x, и треугольник $\triangle OAB$, круговой сектор $OAlB$, треугольник $\triangle OAC$, и пусть $S_{\triangle OAB}$, S_{OAlB}, $S_{\triangle OAC}$ — площади соответствующих фигур (см. рис 3.1). Из построений следует, что

$$S_{\triangle OAB} < S_{OAlB} < S_{\triangle OAC}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2}|OA|\,|OB|\sin x = \frac{1}{2}\sin x, \\ S_{OAlB} &= \frac{1}{2}|OA|\,|OB|\,x = \frac{1}{2}x, \\ S_{\triangle OAC} &= \frac{1}{2}|OA|\,|OA|\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \end{aligned}$$

где $|OA|$, $|OB|$ — длины соответствующих сторон, то из неравенства для площадей следует, что

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

□

Следствие 3.1.8. *Для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем*

$$|\sin x| \leq |x|. \tag{3.1.5}$$

Доказательство. Для $x = 0$ имеет место равенство, поскольку $\sin 0 = 0$.

Пусть $x \neq 0$. Тогда неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1, \qquad x \neq 0.$$

Поскольку функция $\frac{|\sin x|}{|x|}$ является четной, то достаточно доказать последнее неравенство для $x > 0$, т.е.

$$\frac{|\sin x|}{x} < 1, \qquad x > 0.$$

Для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, используя (3.1.4), получим

$$\sin x < x,$$

откуда

$$\frac{|\sin x|}{x} = \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Если $x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty)$, то имеем, что

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} \leq x.$$

Следовательно, и в этом случае,

$$\frac{|\sin x|}{x} < 1.$$

□

Теорема 3.1.9 (первый замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{3.1.6}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ четная, то можно считать, что $x_n > 0$. Так как $x_n \to 0$ и значение предела последовательности $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ не изменится, если отбросить конечное число членов, то можно предполагать, что $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Таким образом, применяя (3.1.4), для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\sin x_n < x_n < \operatorname{tg} x_n.$$

Деля все части на $\sin x_n$, получим

$$1 < \frac{x_n}{\sin x_n} < \frac{1}{\cos x_n}.$$

Поэтому,

$$1 \le \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sin x_n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n}. \tag{3.1.7}$$

Однако, поскольку

$$0 < |1-\cos x_n| = |2\sin^2\frac{x_n}{2}| = 2|\sin\frac{x_n}{2}|^2 \le 2\Big|\frac{x_n}{2}\Big|^2 = \frac{x_n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то $\lim_{n\to\infty}\cos x_n = 1$. Возвращаясь к (3.1.7), видим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sin x_n}=1,$$

что и доказывает (3.1.6). □

3.1.3 Предел монотонной функции

Утверждение 3.1.10. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *и* $f\colon (a, x_0) \to \mathbb{R}$ *является монотонно неубывающей и ограниченной сверху (соответственно, невозрастающей и ограниченной снизу) функцией на* (a, x_0). *Тогда* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *существует, и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x) \qquad (\textit{соотв.}, \lim_{x\to x_0} f(x) = \inf_{x\in(x,x_0)} f(x)).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда f является неубывающей и ограниченной сверху, т.е. $f(x_1) \le f(x_2)$ если $x_1 < x_2$, и существует $M = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x) \in \mathbb{R}$.

Возьмем произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \to x_0$, и докажем, что $f(x_n) \to M$.

Для этого зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем N такое, что $f(x_n) \in U_\varepsilon(M)$ при $n > N$.

Поскольку $M = \sup_{x\in(a,x_0)} f(x)$, то существует $x_* \in (a, x_0)$ такое, что

$$M - \varepsilon < f(x_*) \le M,$$

иначе M не являлось бы наименьшей гранью множества $\{f(x) : x \in (a, x_0)\}$. Поскольку $x_n \to x_0$, то существует N такое, что

$$x_* < x_n < x_0$$

для всех $n > N$. Но, поскольку $M - \varepsilon < f(x_*)$, f является неубывающей, и $f(x) \le M$ для всех x, имеем:

$$M - \varepsilon < f(x_*) \le f(x_n) \le M, \qquad n \ge N,$$

что означает, что $f(x_n) \in U_\varepsilon(M)$ при $n > N$. □

3.2 Свойства пределов

В этом разделе $X \subset \mathbb{R}$ и $x_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$ является предельной точкой X.

Определение 3.2.1. Функция $\alpha : X \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* (б.м.) при $x \to x_*$, если $\lim_{x \to x_*} \alpha(x) = 0$.

Функция $\gamma\colon X \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой* (б.б.) при $x \to x_*$, если $\lim_{x \to x_*} \gamma(x) = \infty$.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной* при $x \to x_*$, если существуют такие $M \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, что $f(x) \le M$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_*)$.

Пример 3.2.2.

1. Функция $\alpha(x) = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$. Она также является бесконечно большой при $x \to \infty$. При $x \to 1$ она не является ни бесконечно малой ни бесконечно большой, но является ограниченной.

2. Функция $\beta(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$ и бесконечно малой при $x \to \infty$. Она является ограниченной при $x \to x_*$, если $x_* \ne 0$.

Утверждение 3.2.3. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$. Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом $f(x)$ при $x \to x_*$ тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_*$.*

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную последовательность (x_n), $x_n \in X$, такую, что $x_n \to x_*$, и рассмотрим последовательности $(f(x_n))$ и $(\alpha(x_n))$. На основании утверждения 2.2.14 имеем, что $A = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\alpha(x_n) = f(x_n) - A$ является бесконечно малой. □

Утверждение 3.2.4. *Пусть α, β — функции, заданные на X, и бесконечно малые при $x \to x_*$. Тогда функции $\alpha + \beta$, $C\alpha$ $(C \in \mathbb{R})$, $\alpha\beta$ являются бесконечно малыми при $x \to x_*$.*

Если функция f ограничена при $x \to x_*$, то функция αf является бесконечно малой при $x \to x_*$.

Доказательство. Все эти свойства доказываются с применением утверждения 2.2.15.

Докажем, например, что $\alpha + \beta$ является бесконечно малой. Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \to x_*$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \alpha(x_n) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \beta(x_n) = 0$, поскольку $\lim_{x\to x_*} \alpha(x) = 0$ и $\lim_{x\to x_*} \beta(x) = 0$. Следовательно, последовательности $\alpha(x_n)$ и $\beta(x_n)$ являются бесконечно малыми. На основании утверждения 2.2.15 заключаем, что последовательность $\alpha(x_n)+\beta(x_n)$ также является бесконечно малой, т.е. $\lim_{n\to\infty}(\alpha(x_n)+\beta(x_n)) = 0$. Поскольку рассмотренная последовательность x_n была произвольной, то $\lim_{x\to x_*}(\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, откуда следует, что функция $\alpha + \beta$ является бесконечно малой при $x \to x_*$.

□

Утверждение 3.2.5. *Пусть $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ и $\alpha(x) \neq 0$ для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_*)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Функция α является бесконечно малой при $x \to x_*$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{\alpha}$ является бесконечно большой при $x \to x_*$.*

Доказательство. Доказательство использует лемму 2.2.17 и проводится аналогично доказательству предыдущего утверждения. □

Утверждение 3.2.6. *Пусть $f, g\colon X \to \mathbb{R}$. Пусть существуют $\lim_{x\to x_*} f(x)$ и $\lim_{x\to x_*} g(x)$, и являются действительными числами. Тогда существуют пределы $\lim_{x\to x_*}\big(f(x)+g(x)\big)$, $\lim_{x\to x_*} Cf(x)$ $(C \in \mathbb{R})$ и $\lim_{x\to x_*}\big(f(x)g(x)\big)$. При этом*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_*}\big(f(x)+g(x)\big) &= \lim_{x\to x_*} f(x) + \lim_{x\to x_*} g(x),\\
\lim_{x\to x_*}\big(Cf(x)\big) &= C\lim_{x\to x_*} f(x),\\
\lim_{x\to x_*}\big(f(x)g(x)\big) &= \lim_{x\to x_*} f(x)\lim_{x\to x_*} g(x).
\end{aligned}$$

Если $\lim_{x\to x_*} g(x) \neq 0$, то существует предел $\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)}{g(x)}$. При *этом*

$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_*} f(x)}{\lim_{x\to x_*} g(x)}.$$

Доказательство. Доказательство проводится как и предыдущем утверждении, переходя к последовательностям и используя теорему 2.2.18. □

Утверждение 3.2.7. *Пусть* $f\colon X \to Y$*, и* $g\colon Y \to \mathbb{R}$*. Пусть* x_* *— предельная точка* X*. Если существует* $y_* = \lim_{x\to x_*} f(x)$ *и является предельной точкой* Y*, и существует* $\lim_{y\to y_*} g(y)$*, то существует* $\lim_{x\to x_*}(g\circ f)(x)$*, и*

$$\lim_{x\to x_*}(g\circ f)(x) = \lim_{y\to y_*} g(y).$$

Доказательство. Пусть $x_n \to x_*$. Тогда, обозначив $y_n = f(x_n)$, имеем что $y_n \to y_*$. Поэтому, существует

$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n),$$

поскольку существует $\lim_{y\to y_*} g(y)$ по условию. □

Задачи

КР: 408,
411, 413, 415,
418, 422, 425, 426,
602, 604, 606.

ДР: 409,
412, 414, 416,
419, 420, 427, 428,
603, 605.

3.3 Непрерывность функции действительного переменного

3.3.1 Определение. Примеры

Везде в этом пункте предполагается, что $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ и является предельной точкой X.

Определение 3.3.1. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке x_0, если существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.3.1}$$

Замечание 3.3.2. Если определение предела в левой части равенства (3.3.1) понимается в смысле Гейне, то определение непрерывности f в x_0 означает, что для любой последовательности (x_n), $x_n \in X$ для всех n и $x_n \to x_0$ имеем, что $f(x_n) \to f(x_0)$.

Если предел в (3.3.1) понимается в смысле Коши, то определение эквивалентно следующему условию:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \qquad f\big(X \cap U_\delta(x_0)\big) \subset U_\varepsilon(f(x_0)). \tag{3.3.2}$$

Пример 3.3.3.

1. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ (рис. 3.2).

   Действительно, пусть $x_n \to x_0$. Тогда, используя свойсва пределов, имеем:

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)^2 = x_0^2 = f(x_0).$$

2. Функция $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ не является непрерывной в точке $x_0 = 0$ (рис. 3.3).

   Действительно, для всех $x \neq 0$ имеем, что $f(x) = 1$. Поэтому, для $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$:

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |\operatorname{sgn} x_n| = \lim_{n\to\infty} 1 \neq 0 = f(0).$$

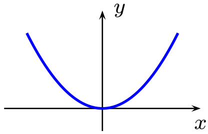


Рис. 3.2: $f(x) = x^2$.

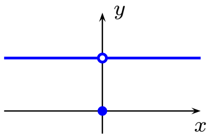


Рис. 3.3: $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$.

3. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x_0 = 0$ (рис. 3.4).

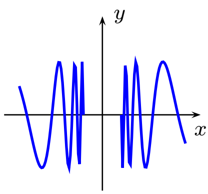


Рис. 3.4: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Действительно, найдем точки, в которых $\sin\frac{1}{x} = 1$:

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Положим $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_n \to 0$, а $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = 1 \to 1$ при $n \to \infty$.

Теперь найдем точки, в которых $\sin \frac{1}{x} = -1$:

$$\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Положим $x'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем, что $x'_n \to 0$ а $f(x'_n) = \sin \frac{1}{x'_n} = -1 \to -1$ при $n \to \infty$.

Таким образом, значение $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ зависит от последовательности (x_n), что означает, что $\lim_{x\to 0} f(x)$ не существует.

4. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

является непрерывной в $x_0 = 0$ (рис. 3.5).

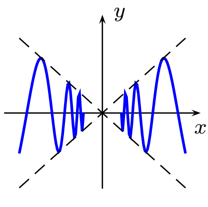


Рис. 3.5: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Действительно, пусть $x_n \to 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \sin\frac{1}{x_n} = 0,$$

поскольку последовательности x_n бесконечно мала а $\sin\frac{1}{x_n}$ ограничена.

Определение 3.3.4. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $X_0 \subset X$. Функция f называется *непрерывной на* X_0, если она непрерывна в каждой точке множества X_0.

Пример 3.3.5.

1. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
2. Функция $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ непрерывна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, но не является непрерывной на $\mathbb{R}$, поскольку не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Задачи

КР: 662, 667, 668,
674 (б, г),
678 (б), 681.

ДР: 666,
674 (в, д),
678 (а), 682, 684, 685.

3.3.2 Свойства непрерывных функций

Теорема 3.3.6. *Пусть $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ функции непрерывные в точке $x_0 \in X$, и $C \in \mathbb{R}$. Тогда функции $f+g$, Cf и fg непрерывны в точке x_0. Если $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Все утверждения теоремы доказываются одинаково с использованием теоремы 2.2.18.

Докажем, например, что функция $\frac{f}{g}$ является непрерывной в точке x_0. Пусть (x_n) — произвольная последовательность такая, что $x_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x_0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

где последнее равенство имеет место, поскольку функции f и g непрерывны в точке x_0 и $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) \neq 0$ по условию. Первое равенство справедливо в силу теоремы 2.2.18. □

Следствие 3.3.7. *Любой многочлен*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ является функцией непрерывной на R.

Доказательство. Очевидно, что функция $f(x) = x$ является непрерывной на $\mathbb{R}$. Тогда функция

$$g(x) = x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{k \text{ раз}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

также является непрерывной. Поэтому функция $a_k x^k$, $k \in \mathbb{N}$, также является непрерывной. А многочлен $P(x)$ суть конечная сумма таких функций и постоянной функции a_0, которая тоже очевидно непрерывна. □

Следствие 3.3.8. *Любая рациональная функция*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, является непрерывной во всех точках x, где $Q(x) \neq 0$.

Доказательство. Согласно следствию 3.3.7, многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ являются непрерывными функциями на $\mathbb{R}$. Тогда по теореме 3.3.6 функция $R(x)$ будет непрерывна во всех точках x, где $Q(x) \neq 0$. $\square$

Утверждение 3.3.9. *Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to \mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in X$ — предельная точка X, f непрерывна x_0. Пусть $y_0 = f(x_0)$ — предельная точка Y и g непрерывна в y_0. Тогда функция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$. Тогда, обозначив $y_n = f(x_n)$ имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0) = y_0,$$

поскольку f непрерывна в x_0. Поскольку g непрерывна в y_0, имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(\lim_{n\to\infty} y_n) = g(y_0) = g(f(x_0)).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = \\ = g(f(\lim_{n\to\infty} x_n)) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

$\square$

Утверждение 3.3.10. *Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на своих областях определения.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\sin x$. Областью её определения является $\mathbb{R}$. Докажем, что она непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть (x_n) — произвольная последовательность такая, что $x_n \to x_0$, т.е. последовательность $(x_n - x_0)$ является бесконечно малой (утверждение 2.2.14), и докажем, что $\sin x_n \to \sin x_0$, т.е. последовательность $(\sin x_n - \sin x_0)$ является бесконечно малой. Для этого рассмотрим

$$|\sin x_n - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x_n - x_0}{2}\cos\frac{x_n + x_0}{2}\right| = \\ = 2\left|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x_n + x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\right| \le \\ \le 2\left|\frac{x_n - x_0}{2}\right| = |x_n - x_0|.$$

Отсюда следует, что последовательность $(\sin x_n - \sin x_0)$ также является бесконечно малой, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0.$$

Непрерывность функции $\cos x$ на $\mathbb{R}$ доказывается аналогично. А именно, пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и $x_n \to x_0$. Тогда

$$|\cos x_n - \cos x_0| = \left|-2\sin\frac{x_n - x_0}{2}\sin\frac{x_n + x_0}{2}\right| = \\ = 2\left|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x_n + x_0}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x_n - x_0}{2}\right| \le \\ \le 2\left|\frac{x_n - x_0}{2}\right| = |x_n - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

и, следовательно, $\cos x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos x_0$, что доказывает непрерывность функции в точке x_0.

Непрерывность функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ в тех точках, где $\cos x \ne 0$ следует из теоремы 3.3.6.

Непрерывность функции $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ в тех точках, где $\sin x \ne 0$ доказывается аналогично. $\square$

Теорема 3.3.11 (Больцано–Вейерштрасс). *Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения противоположных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c) = 0$.*

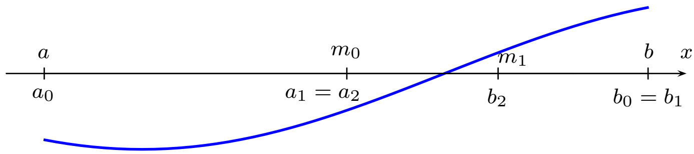


Рис. 3.6: Доказательство теоремы Больцано–Вейерштрасса

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (рис. 3.6). Другой случай, когда $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$ рассматривается аналогично.

Вначале будем последовательно делить отрезок $[a, b]$ пополам и дальше рассматривать ту половину, в левом конце которой функция отрицательна, а в правом конце положительна.

Итак, обозначим $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\Delta_0 = [a_0, b_0]$, и пусть $|\Delta_0| = b - a$ — длина отрезка Δ_0.

Рассмотрим точку $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ — середину отрезка Δ_0. Если $f(m_0) = 0$, то положим $c = m_0$ и теорема доказана. Если $f(m_0) < 0$, то положим $a_1 = m_0$, $b_1 = b_0$, а если $f(m_0) > 0$, то положим $a_1 = a_0$, $b_1 = m_1$. Таким образом, в любом случае имеем, что $a_1 \geq a_0$, $b_1 \leq b_0$, и $f(a_1) < 0$ а $f(b_1) > 0$. (На рис. 3.6 показан случай, когда $f(m_0) < 0$, поэтому $a_1 = m_0$ и $b_1 = b_0$.)

Теперь рассмотрим отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1]$. Имеем, что $|\Delta_1| = \frac{b-a}{2}$. Пусть $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ — середина отрезка Δ_1. Если $f(m_1) = 0$, то положим $c = m_1$ и теорема доказана. Если $f(m_1) < 0$, то положим $a_2 = m_1$, $b_2 = b_1$, а если $f(m_1) > 0$, то положим $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$. Таким образом, в любом случае имеем, что $a_2 \geq a_1$, $b_2 \leq b_1$ и $f(a_2) < 0$ а $f(b_2) > 0$. (На рис. 3.6 показан случай, когда $f(m_1) > 0$, и, поэтому, $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$.)

Таким образом строим последовательность отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n]$, получая при этом, что

$$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_1 \le b_0,$$
$$|\Delta_n| = \tfrac{b-a}{2^n}.$$

Из цепочки неравенств следует, что существуют пределы $a_* = \lim_{n\to\infty} a_n$ и $b_* = \lim_{n\to\infty} b_n$, а, поскольку $|\Delta_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $a_* = b_*$. Положим $c = a_* = b_*$. По построению, $c \in [a, b]$

В силу непрерывности функции f на $[a, b]$, а значит и в точке c, имеем, что

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0,$$

поскольку левые концы a_n выбирались таким образом, чтобы $f(a_n) < 0$.

С другой стороны, точно также,

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0,$$

поскольку $f(b_n) > 0$ для всех n.

Из полученных неравенств $f(c) \le 0$ и $f(c) \ge 0$ следует, что $f(c) = 0$.

Поскольку $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то c не совпадает ни с a ни с b, т.е. $c \in (a, b)$. $\square$

Следствие 3.3.12. *Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$. Положим $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Для любого $C \in [A, B]$ (если $A \le B$) или $C \in [B, A]$ (если $B < A$) существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $A \le B$, см рис. 3.7.

Пусть $C \in [A, B]$. Если $C = A$, то положим $c = a$, если $C = B$, то тогда положим $c = b$.

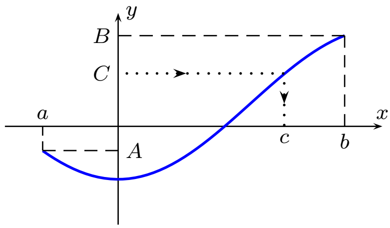


Рис. 3.7: Иллюстрация к следствию 3.3.12

Пусть $C \in (A, B)$. Рассмотрим непрерывную функцию $F(x) = f(x) - C$ на отрезке $[a, b]$. Имеем, что

$$F(a) = f(a) - C = A - C < 0$$

а

$$F(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

По теореме 3.3.11 существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, и значит $f(c) = C$. □

Теорема 3.3.13 (Вейерштрасс)**.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $a < b$. *Если функция* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то* f *ограничена на* $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что функция f не является ограниченной. Тогда, либо f неограничена сверху, либо f неограничена снизу, либо и то и другое.

Рассмотрим случай когда f неограничена сверху; другой случай рассматривается аналогично. Если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f(x) \leq n$ для всех $x \in [a, b]$, то это будет означать, что $\sup_{x\in]a,b]} f(x) \leq n$, что противоречит предположению. Значит, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такой $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > n. \tag{3.3.3}$$

Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Она ограничена (все $x_n \in [a,b]$). По теореме 2.4.5 она имеет сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Поскольку

$$a \le x_{n_k} \le b, \qquad k \in \mathbb{N},$$

то $x_* = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$. Поэтому, с одной стороны,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x_*)$$

так как функция непрерывна, а с другой, используя (3.3.3) имеем, что $f(n_k) > n_k \ge k$, и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

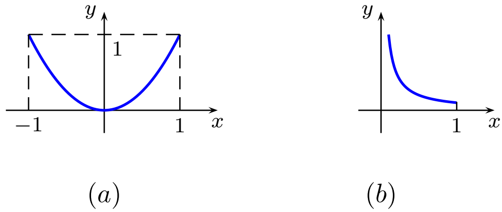


Рис. 3.8: Примеры функций

Пример 3.3.14. 1. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на $[-1,1]$ и ограничена (рис. 3.8 (a)).

2. Функция
$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0,1],$$
являясь непрерывной, не является ограниченной на $(0,1]$ (рис. 3.8 (b)). Это не противоречит теореме 3.3.13, поскольку функция определена не на отрезке.

Теорема 3.3.15 (Вейерштрасс). *Пусть* $X = [a,b]$ *и* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Тогда* f *достигает на* X *своего максимального и минимального значений.*

Доказательство. Докажем часть теоремы, касающуюся максимального значения. Доказательство достижения минимального значения проводится аналогично.

Пусть
$$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$
и докажем, что существует $x^* \in [a,b]$, для которого $f(x^*) = M$.

Используя теорему 3.3.13, имеем, что $M \in \mathbb{R}$. Поскольку M является минимальной верхней гранью, никакое меньшее число не может быть верхней гранью множества $f([a,b])$, и, следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in [a,b]$, для которого
$$M - \frac{1}{n} < f(x_n).$$

Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Она ограничена, так как $x_n \in [a,b]$. Поэтому, используя теорему 2.4.5, можно найти сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, и пусть $x^* = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Поскольку
$$a \le x_{n_k} \le b,$$
то $x^* = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ также удовлетворяет неравенству
$$a \le x^* \le b,$$
т.е. $x^* \in [a,b]$. Поскольку f непрерывна в точке x_*, имеем
$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$
Но из построения последовательности (x_n) следует, что
$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому,

$$M = \lim_{k\to\infty}\Big(M - \frac{1}{n_k}\Big) \le \lim_{k\to\infty} f(n_{n_k}) \le M,$$

откуда получаем, что $f(x^*) = M$, а значит в точке $x^* \in [a, b]$ функция принимает максимальное значение. □

Пример 3.3.16. 1. Функция $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ принимает максимальное значение в точке $x^* = \frac{\pi}{2}$ и минимальное значение в точках $x'_* = 0$, $x''_* = \pi$ (рис. 3.9 (a)).

2. Функция $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$ принимает максимальное значение в точке $x^* = 1$ и минимальное в точке $x_* = 0$ (рис. 3.9 (b)).

3. Функция $f(x) = \{x\} = x - [x]$ (дробная часть числа), $x \in [0, 1]$, принимает минимальное значение в точках $x'_* = 0$ и $x''_* = 1$, но не принимает максимального значения. Однако эта функция не является непрерывной на $[0, 1]$ (рис. 3.9 (c)).

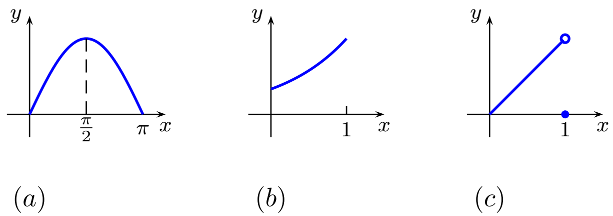


Рис. 3.9: Примеры функций

3.4 Существование и непрерывность обратной функции

Теорема 3.4.1. *Пусть $X = [a, b]$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ монотонно возрастающая (убывающая) непрерывная функция, и $Y = f(X)$. Тогда существует обратная к f функция $g\colon Y \to X$, и g является непрерывной на Y.*

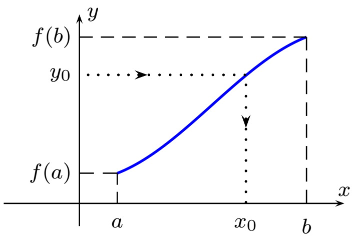


Рис. 3.10: Иллюстрация к доказательству теоремы 3.4.1

Доказательство. Рассмотрим случай когда f является возрастающей (рис. 3.10). Для убывающей f доказательство проводится аналогично.

Если f монотонно возрастающая, то $Y = [f(a), f(b)]$ и, по определению, $f\colon X \to f(X) = Y$ является сюръективной. Поскольку f является возрастающей, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$ (например, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$). Поэтому, f является инъективной, а значит и биективной. В силу утверждения 1.2.23 обратная функция $g\colon Y \to X$ существует.

Докажем теперь, что g является непрерывной на Y. Предположим противное, т.е., что существует $y_* \in Y$, в которой g не является непрерывной, и придем к противоречию.

Непрерывность g в точке y_* означает, что для всякой последовательности $y_n \to y_*$ имеем $g(y_n) \to g(y_*)$. Поэтому, отсутствие непрерывности g в точке y_* означает, что существует такая последовательность $y_n \to y_*$, что $x_n = g(y_n) \not\to g(y_*) = x_*$. Опять-таки, утверждение, что $x_n \to x_*$ эквивалентно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \qquad |x_n - x_*| < \varepsilon.$$

Поэтому, утверждение, что $x_n \not\to x_*$, эквивалентно следующему:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: \qquad |x_n - x_*| \geq \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Это условие позволяет из последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ выбрать подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$|x_{n_k} - x_*| \geq \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.4.2}$$

Действительно, положим в условии (3.4.1) $N = 1$, и найдем такой $n_1 \geq 1$, что $|x_{n_1} - x_*| \geq \varepsilon$. Положим далее $N = n_1 + 1$ и найдем такой $n_2 \geq n_1 + 1$, что $|x_{n_2} - x_*| \geq \varepsilon$. Продолжая таким образом получим подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (3.4.2) для всех $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Эта последовательность ограничена, т.к. $x_{n_k} \in [a, b]$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому она имеет сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса 2.4.5. Для этой подпоследовательности также имеем, что

$$|x_{n_{k_l}} - x_*| \geq \varepsilon, \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{3.4.3}$$

Пусть $x_{**} = \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}}$. Перейдя в (3.4.3) к пределу при $l \to \infty$ и используя теорему 2.2.19, получим, что

$$|x_{**} - x_*| \geq \varepsilon,$$

откуда следует в силу доказанной инъективности f, что

$$f(x_{**}) \neq f(x_*). \tag{3.4.4}$$

Однако,

$$f(x_{**}) = f(\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} f(x_{n_{k_l}}) =$$
$$= \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = \lim_{n\to\infty} y_n = y_* = f(x_*),$$

где первое равенство имеет место в силу определения x_{**}, второе — вследствие непрерывности f, третье — поскольку

$$f(x_{n_{k_l}}) = f(g(y_{n_{k_l}})) = y_{n_{k_l}},$$

четвертое — поскольку $(y_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью сходящейся последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, пятое — по определению последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, шестое — по определению x_*.

Полученное равенство противоречит неравенству (3.4.4). □

Пример 3.4.2. 1. Функция $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Эта функция является монотонной (монотонно возрастающей), в частности, на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и принимает значения на $[-1, 1]$. Поэтому, обратная функция $x = \arcsin y$ определяется для $y \in [-1, 1]$ и принимает значения на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Функция $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ является непрерывной. Графики функций $y = \sin x$ и $x = \arcsin y$ показаны на рис. 3.11.

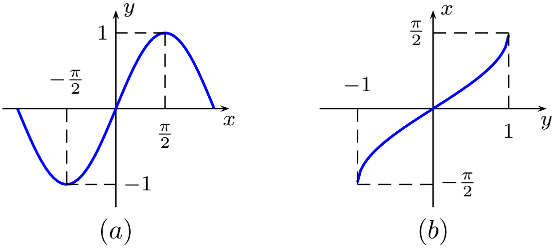


Рис. 3.11: (a) $y = \sin x$; (b) $x = \arcsin y$.

2. Функция $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Эта функция является монотонной (монотонно убывающей), в частности, на $[0, \pi]$, и принимает значения на $[-1, 1]$. Обратная функция $x = \arccos y$ определена для $y \in [-1, 1]$ и принимает значения на $[0, \pi]$.

Функция $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ является непрерывной. Графики функций $y = \cos x$ и $x = \arccos y$ показаны на рис. 3.12.

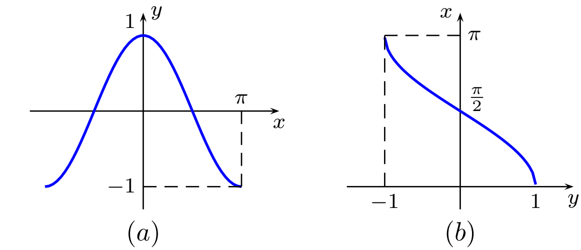


Рис. 3.12: (a) $y = \cos x$; (b) $x = \arccos y$.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.

   Эта функция является монотонно возрастающей, например, на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и принимает значения на $\mathbb{R}$. Обратная функция $x = \operatorname{arctg} y$ определена на $\mathbb{R}$ и принимает значения на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

   Функция $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ является непрерывной. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $x = \operatorname{arctg} y$ показаны на рис. 3.14.

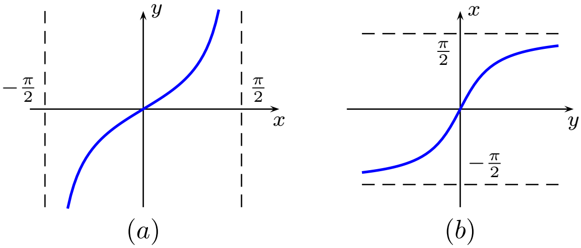


Рис. 3.13: (a) $y = \operatorname{tg} x$; (b) $x = \operatorname{arctg} y$.

КР:	435, 437, 441, 443, 444, 457, 460, 499, 505, 581, 585,
ДР:	436, 438, 440, 442, 448, 458, 463, 500, 582, 584

3.5 Показательная, логарифмическая и степенная функции

3.5.1 Показательная функция $f(x) = a^x$

При постоянном $a > 0$ функция $f(x) = a^x$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$.

Напомним определение значений функции f при $x \in \mathbb{Q}$.

При $x = n \in \mathbb{N}$ значение функции $f(n)$ определяется как

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

При $x \in \mathbb{Z} \setminus Z_+$, то есть $x = -n$, $n \in \mathbb{N}$, значение функции $f(-n)$ определяется как

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

При $x = 0$, Значение $f(0)$ определено как

$$a^0 = 1.$$

Пусть $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда число

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

определяется как единственное положительное решение t уравнения $t^n = a$. Для $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) значение $f(\frac{m}{n})$ вычисляется как

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Утверждение 3.5.1. *Пусть $a, b > 0$ и $r_1, r_2, r \in \mathbb{Q}$. Тогда:*

1. *при $a > 1$ ($a < 1$) функция f является монотонно возрастающей (убывающей), т.е. $a^{r_1} < a^{r_2}$ ($a^{r_1} < a^{r_2}$), если $r_1 < r_2$;*

2. *$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;*

3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$*;*

4. $a^0 = 1$*;*

5. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$*.*

Доказательство. Без доказательства. □

Определим $f(x) = a^x$ для $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $x = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим последовательность

$$\begin{array}{rcl} y_0 & = & a^{\alpha_0}, \\ y_1 & = & a^{\alpha_0, \alpha_1}, \\ y_2 & = & a^{\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2}, \\ & \vdots & \end{array}$$

Утверждение 3.5.2. *Последовательность* $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда, как следует из утверждения 3.5.1, последовательность (y_n) является монотонно неубывающей, поскольку $r_0 = \alpha_0$, $r_1 = \alpha_0.\alpha_1$, $r_2 = \alpha_1.\alpha_1\alpha_2$ образует монотонно неубывающую последовательность. Кроме того, последовательность (y_n) ограничена сверху числом a^{α_0+1}. Поэтому по теореме Вейерштрасса 2.2.23, последовательность (y_n) является сходящейся.

Если $0 < a < 1$, то последовательность (y_n) является убывающей. Она ограничена снизу числом a^{α_0}. Так что и в этом случае последовательность (y_n) сходится.

Если $a = 1$, то $y_n = 1$ для всех n, так что (y_n) так же является сходящейся. □

Определение 3.5.3. Для $x > 0$

$$a^x = \lim_{n \to \infty} y_n,$$

для $x = 0$
$$a^0 = 1,$$
для $x < 0$,
$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Определение 3.5.4. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Функция a^x, определенная для всех $x \in \mathbb{R}$, называется *показательной функцией* с основанием a.

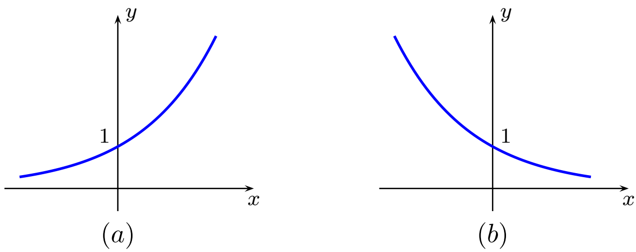


Рис. 3.14: (a) $y = a^x$, $a > 1$; (b) $y = a^x$, $a < 1$.

Утверждение 3.5.5. *Пусть $a > 0$.*

1. $a^x > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
2. *Функция a^x монотонно возрастает если $a > 1$, и монотонно убывает если $a < 1$.*
3. $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ *и* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ *при* $a > 1$, *и* $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ *если* $a < 1$.
4. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.
6. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$.

7. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Приложение A

Некоторые сведения

A.1 Метод математической индукции

Теорема A.1.1 (метод математической индукции)**.** *Пусть* $S((n)$ *— некоторое утверждение, формулировка которого зависит от натурального числа* n*. Если* $S(1)$ *верно, и из того, что* $S(n)$ *верно для произвольного* $n \in \mathbb{N}$*, следует, что* $S(n+1)$ *также верно, то* $S(n)$ *верно для всех натуральных* n*.*

Доказательство. Без доказательства. □

Пример A.1.2. *Доказать, что*

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{A.1.1}$$

► Утверждение $P(n)$ состоит в том, что имеет место (A.1.1). Для $n = 1$ равенство (A.1.1) принимает вид:

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2},$$

и, так как $2\cos\frac{\pi}{2^2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, то $P(1)$ верно.

Предположим теперь, что верно $P(n)$, т.е. выполняется равенство (A.1.1), и докажем, что также верно и $P(n+1)$, т.е.

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ корней}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}. \tag{A.1.2}$$

Для доказательства (A.1.2) заменим последние n корней в левой части равенства, используя (A.1.1) а затем формулу $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$,

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{n+1 \text{ корней}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}})} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1+1}}} = 2\left|\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\right| = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}},$$

поскольку $\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} > 0$. Таким образом, имеет место (A.1.2), и по теореме A.1.1 равенство (A.1.1) имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$. ◀

Замечание A.1.3. Если требуется доказать $P(n)$ для $n \geq n_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$, то, вместо проверки утверждения $P(1)$, необходимо проверять утверждение $P(n_1)$, а затем доказать, что $P(n+1)$ следует из $P(n)$ при $n \geq n_1$.

Пример A.1.4. *Доказать, что*

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \qquad n \geq 2. \tag{A.1.3}$$

▶ Здесь $n_1 = 2$, поэтому проверим неравенство (A.1.3) для $n = 2$, т.е., что

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}.$$

Действительно, умножая обе части на $\sqrt{2}$, получим
$$\sqrt{2}+1>2,$$
что очевидно имеет место.

Предположим теперь, что справедливо (А.1.3), и докажем, что
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}. \tag{A.1.4}$$
Используя (А.1.3) для суммы первых n членов, имеем
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=$$
$$=\frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{\sqrt{n\cdot n}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$
Таким образом, доказано (А.1.4) и, следовательно, (А.1.3) выполнено для всех $n\ge 2$. ◀

А.2 Важные неравенства

Утверждение А.2.1 (неравенство Бернулли)**.** *Для* $x>-1$ *и* $n>1$, $n\in\mathbb{N}$,
$$(1+x)^n\ge 1+nx.$$
Доказательство. Доказательство будем вести по индукции.

Для $n=2$ имеем
$$(1+x)^2=1+2x+x^2\ge 1+2x,$$
т.к. $x^2\ge 0$. Пусть
$$(1+x)^n\ge 1+nx.$$
Тогда имеем
$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\ge(1+nx)(1+x)=$$
$$=1+(n+1)x+nx^2\ge 1+(n+1)x,$$
т.к. $nx^2\ge 0$. □

Лемма А.2.2. *Пусть* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_n > 0$ *и*

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1.$$

Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1.$$

Доказательство. Докажем это по индукции.

Рассмотрим $n = 2$. Если $x_1 x_2 = 1$, то одно число ≤ 1 а другое ≥ 1. Предположим, что $x_1 \leq 1$ и $x_2 \geq 1$. Тогда

$$0 \leq (1 - x_1)(x_2 - 1) = -1 + x_1 + x_2 - x_1 x_2,$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда, например, $x_1 = 1$, а значит в силу условия $x_1 x_2 = 1$, и $x_2 = 1$.

Таким образом,

$$x_1 + x_2 \geq 1 + x_1 x_2.$$

А, поскольку, $x_1 x_2 = 1$, то

$$x_1 + x_2 \geq 1 + 1 = 2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 1$.

Предположим теперь, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$$

для всех $x_1, \ldots, x_n > 0$ таких, что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n = 1$.

Докажем теперь, что если

$$x_1, \ldots, x_{n+1} > 0 \qquad \text{и} \qquad x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1,$$

то
$$x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1,$$
и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 1$.

Не все числа $x_1, \ldots x_{n+1} < 1$ или > 1, поэтому предположим, что $x_n \leq 1$ и $x_{n+1} \geq 1$. Тогда $x_n + x_{n+1} \geq 1 + x_n x_{n+1}$ по доказанному, и, следовательно,

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} \geq x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} + 1 \geq n + 1,$$

т.к. $x_1 \cdot \ldots x_{n-1} \cdot (x_n \cdot x_{n+1}) = 1$ и, по предположению индукции, $x_1 + \ldots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) \geq n$.

Также, по предположению индукции,

$$x_1 + \ldots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) = n$$

только если
$$x_1 = \ldots = x_{n-1} = x_n x_{n+1} = 1.$$

Используя приведенное выше доказательство для $n = 2$, видим, что тогда и $x_n = x_{n+1} = 1$. $\square$

Утверждение А.2.3 (неравенство Коши)**.** *Пусть* $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. *Тогда*
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$
Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = \cdots = a_n$.

Доказательство. Если какое-нибудь $a_k = 0$, то неравенство очевидно. Поэтому предположим, что $a_k > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Тогда неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geq n. \qquad (\text{A.2.1})$$

Обозначим

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

и заметим, что $x_1, \dots, x_n > 0$ и

$$x_1 x_2 \dots x_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}\,\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \dots \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} = 1.$$

Теперь справедливость теоремы следует из леммы А.2.2. $\square$

Утверждение А.2.4 (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть $x_1, \dots x_n$ и $y_1, \dots, x_n$ — действительные числа. Тогда*

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда наборы чисел $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ пропорциональны, т.е. существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda y_1 \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda y_n. \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t) = (x_1 - t y_1)^2 + \dots + (x_n - t y_n)^2 = \\ = (x_1^2 + \dots + x_n^2) - 2t\,(x_1 y_1 + \dots x_n y_n) + t^2\,(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

Функция $f(t)$ — квадратный многочлен относительно t, неотрицательный для любых t. Следовательно, $D \leq 0$, т.е.

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq 0,$$

что совпадает с требуемым неравенством.

Если $x_1 = \lambda y_1, \ldots, x_n = \lambda y_n$, то

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 &= (\lambda y_1^2 + \ldots + \lambda y_n^2)^2 = \lambda^2(y_1^2 + \ldots + y_n^2)^2, \\ (x_1^2 + \ldots x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) &= (\lambda^2 y_1^2 + \ldots + \lambda^2 y_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = \\ &= \lambda^2(y_1^2 + \ldots + y_n^2)^2,\end{aligned}$$

т.е. имеем равенство.

Обратно, если имеет место равенство, то $D = 0$ и, следовательно имеется решение $t = \lambda$ уравнения

$$f(t) = 0.$$

А это в точности означает, что $x_1 = \lambda y_1, \ldots, x_n = \lambda y_n$. $\square$

Приложение B

Задачи

1. Общие понятия

1.1. Множества и операции над ними

[6] *КР*: I.1.1 (1, 3, 5); I.1.2 (1, 3, 5); I.1.3 (1, 3); I.1.4 (1, 3, 5); I.1.5 (1); I.1.6 (1, 3).

ДР: I.1.1 (2, 4, 6); I.1.2 (2, 4, 6); I.1.3 (2, 4, 5); I.1.4 (2, 4, 6); I.1.5 (2); I.1.6 (2, 4).

1.2. Функции

КР: I.2.1 (1, 3); I.2.2 (1, 3); I.2.3 (1, 3), I.2.4 (1, 3, 5), I.2.8.

[5] 175, 178(н), 203 (а, в), 207,
224, 228.

ДР: I.2.1 (2, 4); I.2.2 (2, 4); I.2.3 (2, 4); I.2.4 (2, 4, 6, 7).

[5] 176, 180, 182, 203 (б), 206, 209,
226, 227, 229.

1.3. Мощность множества

КР: I.3.1, I.3.2, I.3.7, 1.3.9
ДР: 1.3.1, I.3.5,

1.4. Комплексные числа

[10] *КР*: 101, 103, 105 (a, b), 107 (b, d), 108 (a), 110 (a),
118 (1, 3, 5), 119 (a, b, c, i, h), 121, 122 (a), 123,
136 (a, b), 137 (a, b), 141,
143 (d, c), 145 (a)
ДР: 102, 105 (c), 106, 107(c), 108 (b), 110 (b),
118 —, 119 —, 122 —, 124,
136 (c), 137 (d), 138, 139, 142,
143 —, 145 —.

1.5. Действительные числа

[6] *КР*: I.4.13, 1.4.14,
1.4.17, I.4.20, I.4.22, 1.4.30 (1,2)
1.4.33 (b)
ДЗ: 1.4.15,
1.4.18, I.4.21, I.4.23, I.4.30 (3,4),
1.4.33 (a)

2.2.1, 2.2.4. Предел: определение, свойства.

[5] *КР*: 41, 42 (а, в), 44,
58
67 (а, в).
46, 47, 48,
127 (а), 128 (а), 129, 130.

ДЗ: 42 (б, г), 43 (а), 45,
60, 62,
67 (в),
49, 50,
127 (б), 128 (б).

2.2.5. Переход к пределам в неравенствах.

[6] *КР*: II.1.18 (8, 12, 20)

ДЗ: II.1.18 (13, 19, 27)

2.2.6. Предел монотонной последовательности.

[5] *КР*: 59, 77, 80

ДР: 61, 78, 79, 81

2.4.2. Верхние и нижние пределы последовательности

КР: 101.1, 103, 106, 112,
121, 122,

ДР: 102, 105, 109, 113,
123

2.4.3. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

КР: 82, 83, 87, 88

ДР: 84, 85

3.1. Предел функции

3.1.1. Определение предела функции

КР: 403, 404, 405.
ДР: 406.

Свойства пределов

КР: 408,
411, 413, 415,
418, 422, 425, 426,
602, 604, 606.
ДР: 409,
412, 414, 416,
419, 420, 427, 428,
603, 605.

3.3. Непрерывность функции действительного переменного

3.3.1. Определение. Примеры

КР: 662, 667, 668,
674 (б, г),
678 (б), 681.
ДР: 666,
674 (в, д),
678 (а), 682, 684, 685.

Непрерывность элементарных функций. Вычисление пределов.

КР: 435, 437, 441, 444,
457, 461,
471, 472, 479, 482
530, 538, 540,
506, 514, 522, 525, 554,
541, 544, 576, 559,
581.

ДР: 436, 438, 443, 446,
458, 463,
473, 474, 474.1, 480, 483,
531, 539, 541,
511, 512, 515, 523, 526, 555,
542, 547, 560,
582, 584.

Литература

[1] Л.Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа. Т. 1, 2. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[2] Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[3] В.А. Зорич. Математический анализ. Ч. 1. — М. : ФАЗИС, 1997.

[4] А.Я. Дороговцев. Математический анализ. — К. : Факт, 2004.

[5] Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1997.

[6] А.Я. Дороговцев. Математический анализ: Сборник задач. — К. : Вища шк., 1987.

[7] Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. — М. : Наука, 1975.

[8] Н. Я. Виленкин и др. Задачник по курсу математического анализа. Т. 1. — М. : «Просвещение», 1971.

[9] Н. Я. Виленкин и др. Задачник по курсу математического анализа. Т. 2. — М. : «Просвещение», 1971.

[10] Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. — М. : Наука, 1972.

[11] Краснов М.Л., Кисилев А.Н., Макаренко Г.Н. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — Москва : УРСС, 2003.