Міністерство освіти і науки
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Вища математика

Застосування визначеного інтеграла

методичні вказівки
до виконання розрахункової роботи
для студентів
Інституту прикладного системного аналізу
денної форми навчання за спеціальностями

122 – комп'ютерні науки
124 – системний аналіз

Рекомендована Вченою радою
Інституту прикладного системного аналізу
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Київ— 2017

Гриф надано
вченою радою ІПСА
НТУУ
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»
(протокол № 4 від 25.04.2017)

Вища математика. Застосування визначеного інтеграла: методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи для студентів Інституту системного аналізу денної форми навчання / Укладачі: О.О. Калюжний, Г.Б. Подколзін, Ю.А. Чаповський. — К.:НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017. — 15 с.

Вища математика

Застосування визначеного інтеграла

методичні вказівки
до виконання розрахункової роботи
для студентів
Інституту прикладного системного аналізу
денної форми навчання за спеціальностями

122 – комп'ютерні науки
124 – системний аналіз

Укладачі: О.О. Калюжний, Г.Б. Подколзін, Ю.А. Чаповський

Відповідальний редактор професор Ю. В. Богданський

Рецензент доцент А. Б. Ільєнко

Зміст

1 Вступ

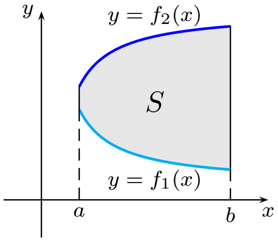
Самостійна робота студентів є визначальною для засвоєння апарату математичних дисциплін. Самостійне навчання передбачає активне опанування знань і свідоме користування ними: осмислене читання підручника й додаткової літератури, розкриття змісту спеціальних термінів і понять, точне їх визначення, доведення тих чи інших положень при розв'язуванні задач та під час відповідей на поставлені запитання. Одним з найважливіших елементів цієї роботи є самостійне розв язання запропонованих задач і вміння користуватися додатковою літературою.

Вивчення студентами першого курсу інституту прикладного системного аналізу з обох спеціальностей 122 — «комп'ютерні науки та інформаційні технології», 124 — «системний аналіз» першого розділу кредитного модуля «Застосування визначених інтегралів» є дуже важливою складовою для подальшого застосування методів математичного аналізу.

Данні методичні вказівки служать для поглибленого самостійного опрацювання курсу студентом й самоперевірки своїх знань за темою «Визначений інтеграл», містять теоретичні відомості до розділу та приклади розв язання типових задач.

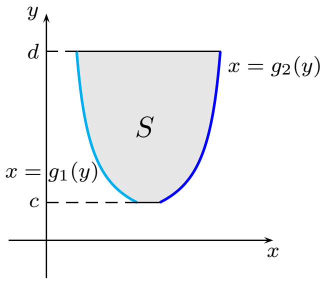
2 Теоретичні відомості

2.1 Обчислення площі



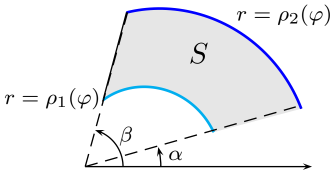
$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx$$

Рис. 2.1. Площа, що обмежена графіками функцій.



$$S = \int_c^d \big(g_2(y) - g_1(y)\big)\,dy$$

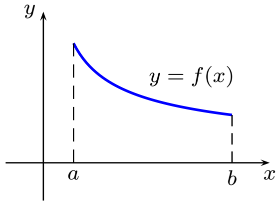
Рис. 2.2. Площа, що обмежена графіками функцій.



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\big)\,d\varphi$$

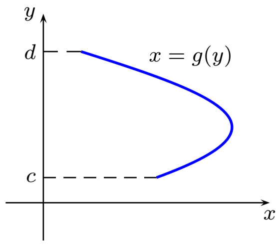
Рис. 2.3. Площа, що обмежена кривими в полярній системі координат.

2.2 Обчислення довжини



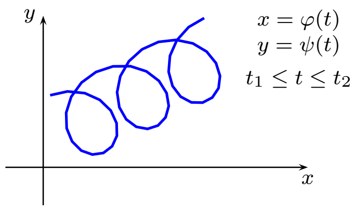
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$$

Рис. 2.4. Довжина графіка функції.



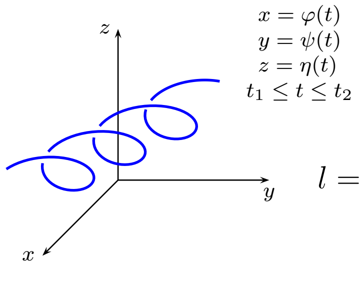
$$l = \int_c^d \sqrt{1 + \big(g'(y)\big)^2}\, dy$$

Рис. 2.5. Довжина графіка функції.



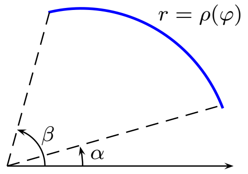
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt$$

Рис. 2.6. Довжина кривої, заданої параметрично в $\mathbb{R}^2$.



$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2 + \big(\eta'(t)\big)^2}\, dt$$

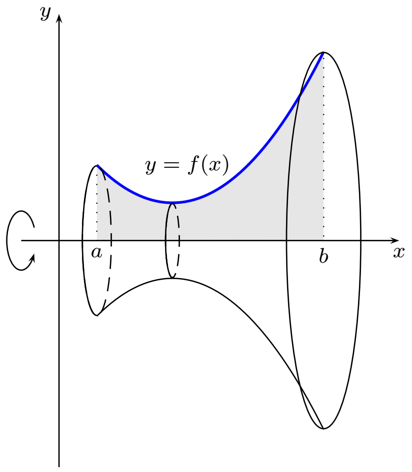
Рис. 2.7. Довжина кривої, заданої параметрично в $\mathbb{R}^3$.



$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$$

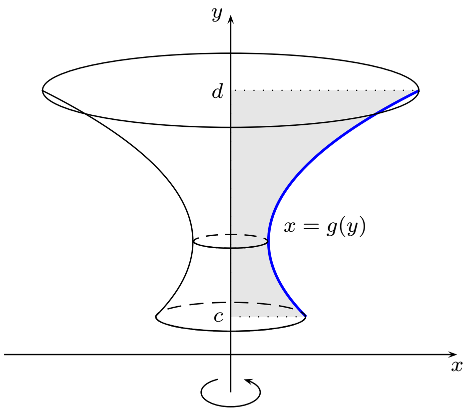
Рис. 2.8. Довжина кривої, заданої в полярній системі координат.

2.3 Обчислення об'єму тіл обертання



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Рис. 2.9. Об'єм тіла обертання навколо вісі Ox.



$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy$$

Рис. 2.10. Об'єм тіла обертання навколо вісі Oy.

3 Приклади розв'язування задач

Задача 1. Обчислити площу, обмежену кривими

$$y = 2x - x^2, \qquad y = x.$$

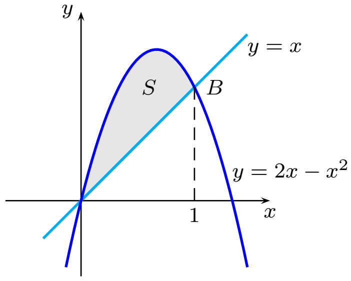


Рис. 3.1.

Розв'язок. Знайдемо точки перетину перетину графіків двох функцій (рис. 3.1). Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y &= 2x - x^2, \\ y &= x. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є координати точок $O(0,0)$ і $B(1,1)$. Таким чином (рис. 2.1), маємо

$$S = \int_0^1 \left((2x - x^2) - x\right) dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$

Задача 2. Обчислити площу, обмежену кривими

$$\begin{cases} x &= 3(t - \sin t), \\ y &= 3(1 - \cos t), \end{cases} \qquad y = \frac{3}{2}, \qquad \left(0 \le x \le 6\pi,\ y \ge \frac{3}{2}\right).$$

Розв'язок. Знайдемо t, які відповідають точкам перетину A і B двох кривих (рис. 3.2). Ці значення є розв'язками рівняння

$$3(1 - \cos t) = \frac{3}{2}.$$

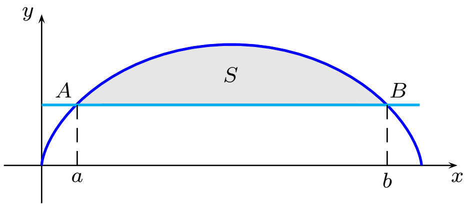


Рис. 3.2.

Це рівняння є еквівалентним рівнянню

$$1 - \cos t = \frac{1}{2}$$

або

$$\cos t = \frac{1}{2}.$$

Звідки знаходимо, що

$$t_k^{\pm} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Враховуючи, що за умови

$$x_k^{\pm} = 3(t_k^{\pm} - \sin t_k^{\pm}) \in [0, 6\pi],$$

маємо

$$0 \leq t_k^{\pm} - \sin t_k^{\pm} \leq 2\pi.$$

Цю нерівність задовольняють два значення:

$$t_0^{+} = \frac{\pi}{3}, \qquad t_1^{-} = \frac{5\pi}{3}.$$

Позначимо відповідні значення x через a і b, тобто

$$a = 3\Big(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\Big) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad b = 3\Big(\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{3}\Big) = 5\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

через $f(x)$ позначимо функцію, що задається параметрично, і нехай $g(x) = \frac{3}{2}$ — друга функція з умови задачі. Тоді, використовуючи загальну формулу (рис. 2.1), маємо:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо. Для другого інтегралу маємо:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_{\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{5\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}x\Big|_{\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{5\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}\Big(5\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \Big(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big)\Big) =$$

$$= \frac{3}{2}\big(4\pi + 3\sqrt{3}\big) = 6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}. \quad (2.1)$$

Для обчислення першого інтегралу зробимо заміну змінних, використовуючи параметричні рівняння, що задають функцію $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x = 3(t-\sin t), \\ f(x) = y = 3(1-\cos t), \\ x = a \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{3}, \\ x = b \;\Rightarrow\; t = \frac{5\pi}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} 3(1-\cos t)\,d\big(3(t-\sin t)\big) = 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \Big(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\Big)\,dt =$$

$$= 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \Big(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\Big)\,dt = 9\Big(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\Big)\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{5\pi}{3}} =$$

$$= \frac{27}{2}\Big(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\Big) - 18\Big(\sin\frac{5\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\Big) + \frac{9}{4}\Big(\sin\frac{10\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\Big) =$$

$$= 18\pi - 18\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + \frac{9}{4}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 18\pi + \frac{63\sqrt{3}}{4}. \quad (2.2)$$

Таким чином, з (2.2) та (2.1) отримуємо, що

$$S = \Big(18\pi + \frac{63\sqrt{3}}{4}\Big) - \Big(6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}\Big) = 12\pi + \frac{45\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $12\pi + \frac{45\sqrt{3}}{2}$

Задача 3. Обчислити площу, обмежену кривою, що задана в полярній системі координат:

$$r = \sqrt{3} + 2\cos\varphi.$$

Розв'язок. Оскільки крива задана в полярних координатах, то $r \geq 0$. З цієї умови маємо, що

$$\sqrt{3} + 2\cos\varphi \geq 0,$$

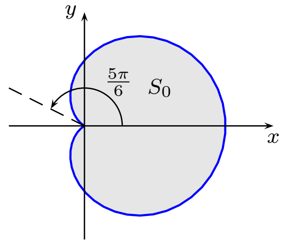


Рис. 3.3.

або

$$\cos\varphi \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

З цього випливає, що $\varphi \in [-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ (рис. 3.3). Оскільки

$$r = \sqrt{3} + 2\cos\varphi,$$

і функція $\cos\varphi$ парна, маємо, що

$$r(-\varphi) = r(\varphi).$$

Тому крива є симетрично відносно вісі Ox, и загальна площа S є

$$S = 2S_0,$$

де S_0 є площа частини площини, що обмежена кривою $r = r(\varphi)$ та промінням $\varphi = 0$ і $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Таким чином (рис. 2.3),

$$\begin{aligned}
S = 2\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(\sqrt{3} + 2\cos\varphi\right)^2 d\varphi = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(3 + 4\sqrt{3}\cos\varphi + 4\cos^2\varphi\right) d\varphi = \\
= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(3 + 4\sqrt{3}\cos\varphi + 4\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \\
= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left(5 + 4\sqrt{3}\cos\varphi + 2\cos 2\varphi\right) d\varphi = \\
= \left(5\varphi + 4\sqrt{3}\sin\varphi + \sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{5\pi}{6}} = \\
= \frac{25\pi}{6} + 4\sqrt{3}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{25\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Задача 4. Обчислити довжину дуги кривої, що задана рівнянням в прямокутній системі координат.

$$y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{1 - x}, \qquad \frac{11}{36} \le x \le \frac{15}{16}.$$

Розв'язок. Для використання відповідної формули (рис. 2.4) треба обчислити y'. Враховуючи, що $x > 0$, маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{1 - x}\right)' = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x - x^2}}(1 - 2x) + \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - x}}(-1) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}\right) = -\frac{x}{\sqrt{x - x^2}} = -\sqrt{\frac{x}{1 - x}}. \end{aligned}$$

Тому

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x}{1 - x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}.$$

Використовуючи загальну формулу (рис. 2.4), отримуємо:

$$\begin{aligned} l &= \int_{\frac{11}{36}}^{\frac{15}{16}} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{\frac{11}{36}}^{\frac{15}{16}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{-\frac{1}{2} + 1}(1 - x)^{-\frac{1}{2} + 1}\Big|_{\frac{11}{36}}^{\frac{15}{16}} = \\ &= -2\left(\sqrt{1 - \frac{15}{16}} - \sqrt{1 - \frac{11}{36}}\right) = -2\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{7}{6}$

Задача 5. Обчислити довжину дуги кривої, що задана параметричними рівняннями:

$$x = t\cos\ln t, \quad y = t\sin\ln t, \qquad 1 \le t \le \sqrt{2}.$$

Розв'язок. Для використання загальної формули (рис. 2.6), обчислимо $x'(t)$ і $y'(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (t\cos\ln t)' = \cos\ln t + t(-\sin\ln t)\,\frac{1}{t} = \cos\ln t - \sin\ln t, \\ y'(t) &= (t\sin\ln t)' = \sin\ln t + t\cos\ln t\,\frac{1}{t} = \sin\ln t + \cos\ln t. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{(\cos\ln t - \sin\ln t)^2 + (\sin\ln t + \cos\ln t)^2} = \\ &= \sqrt{2\cos^2\ln t + 2\sin^2\ln t} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Тому

$$l = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\, t\Big|_{t=1}^{t=\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Відповідь: $2 - \sqrt{2}$

Задача 6. Обчислити довжину дуги кривої, що задана рівнянням в полярній системі координат:

$$r = \varphi^2, \qquad 0 \le \varphi \le 4.$$

Розв'язок. Використовуючи загальну формулу (рис. 2.8), маємо:

$$l = \int_0^4 \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_0^4 \sqrt{\varphi^4 + (2\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^4 \varphi\sqrt{\varphi^2 + 4}\, d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (\varphi^2 + 4)^{\frac{1}{2}}\, d(\varphi^2 + 4) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{3}{2}}(\varphi^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 =$$
$$= \frac{1}{3}\Big((4^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\Big) = \frac{20\sqrt{20} - 8}{3}.$$

Відповідь: $\frac{20\sqrt{20}-8}{3}$

Задача 7. Знайти об'єм тіла, що утворюється обертанням фігури, обмеженої графіками функцій при обертанні навколо осі Ox:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

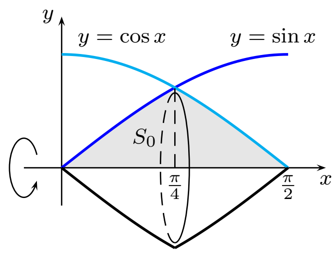


Рис. 3.4.

Розв'язок. Тіло, яке отримується обертанням площі, що обмежена кривими показано на рис. 3.4. Оскільки тіло є симетричним відносно площини $x = \frac{\pi}{4}$, його об'єм

$$V = 2V_0,$$

де V_0 — об'єм тіла, отриманого обертанням частини площини S_0. Таким чином, використовуючи загальну формулу (рис. 2.9), маємо

$$V = 2V_0 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx =$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx = \pi\Big(x - \frac{\sin 2x}{2}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big).$$

Відповідь: $\pi\big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\big)$

Задача 8. Знайти об'єм тіла, що утворюється обертанням фігури, обмеженої графіками функцій при обертанні навколо осі Oy:

$$y = \sin x, \quad y = 0, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

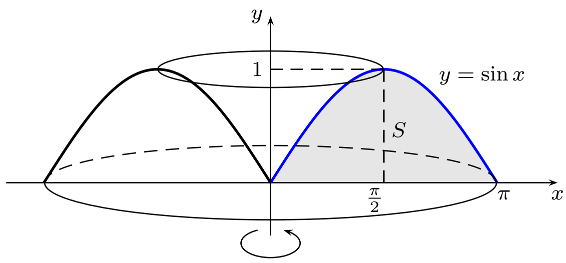


Рис. 3.5.

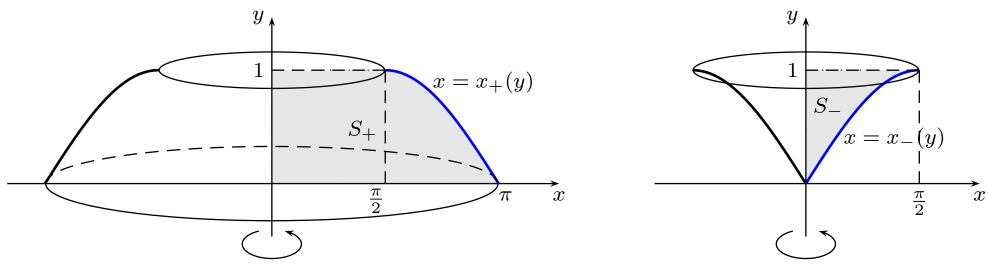


Рис. 3.6.

Розв'язок. Частина площини S, що обертається навколо вісі Oy показана на рис. 3.5. Об'єм отриманого тіла може бути підрахований як

$$V = V_+ - V_-,$$

де V_+ — об'єм тіла, отриманого обертанням навколо Oy частини площини S_+, а V_- — об'єм, отриманий при обертанні S_- (рис. 3.6). Тут функції $x_+(y)$ та $x_-(y)$ є неперервними розв'язками відносно x рівняння

$$y = \sin x$$

на проміжках $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ та $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, відповідно (рис. 3.5 та 3.6).

Тому, згідно з формулою (рис. 2.10) маємо

$$V_+ = \pi \int_0^1 x_+(y)^2\, dy, \qquad V_- = \pi \int_0^1 x_-^2(y)\, dy.$$

Таким чином,

$$V = V_+ - V_- = \pi\Big(\int_0^1 x_+^2(y)\, dy - \int_0^1 x_-^2(y)\, dy\Big). \tag{8.1}$$

Перетворимо кожний інтеграл окремо, розглядаючи функції $x = x_+(y)$ та $x = x_-(y)$ як функції, задані параметрично,

$$y = \sin t, \qquad x = t$$

на відрізках $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ для функції $x = x_+(y)$, і $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ для функції $x = x_-(y)$, і роблячи відповідну заміну змінних.

Для першого інтегралу маємо:

$$\int_0^1 x_+^2(y)\, dy = \left[\begin{array}{l} y = \sin t, \\ x_+(y) = x = t, \\ y = 0 \;\Rightarrow\; t = \pi, \\ y = 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} t^2\, d(\sin t).$$

Так само:

$$\int_0^1 x_-^2(y)\, dy = \left[\begin{array}{l} y = \sin t, \\ x_-(y) = x = t, \\ y = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \\ y = 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, d(\sin t).$$

Таким чином,

$$\int_0^1 x_+^2(y)\, dy - \int_0^1 x_-^2(y)\, dy = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} t^2\, d(\sin t) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, d(\sin t) =$$
$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t^2\, d(\sin t) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, d(\sin t) = -\int_0^{\pi} t^2\, d(\sin t)$$

Обчислимо отриманий інтеграл, використовуючи два рази формулу інтегрування по частинам:

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Маємо:

$$-\int_0^\pi t^2\,d(\sin t) = -\Big(t^2\sin t\big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,d(t^2)\Big) = -\Big(0 - \int_0^\pi 2t\sin t\,dt\Big) =$$
$$= -2\int_0^\pi t\,d(\cos t) = -2\Big(t\cos t\big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos t\,dt\Big) =$$
$$= -2\Big(-\pi - \sin t\big|_0^\pi\Big) = 2\pi.$$

Таким чином, з формули (8.1) випливає, що

$$V = \pi\,2\pi = 2\pi^2.$$

Відповідь: $2\pi^2$

Література

[1] Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Т. 1. — 400 с.

[2] Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Т. 2. — 424 с.

[3] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 1. — 680 с.

[4] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 2. — 864 с.

[5] Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. — М. : ФАЗИС, 1997. — Т. 1. — 554 с.

[6] Дороговцев, А. Я. Математический анализ / А. Я. Дороговцев. — К. : Факт, 2004. — 560 с.

[7] Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие / Б. П. Демидович. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1997. — 623 с.

[8] Дороговцев, А. Я. Математический анализ: Сборник задач / А. Я. Дороговцев. — К. : Вища шк., 1987. — 408 с.

[9] Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — М. : Наука, 1975. — 416 с.

[10] Задачник по курсу математического анализа / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон, др. ; Под ред. Н. Я. Виленкин. — М. : «Просвещение», 1971. — Т. 1. — 343 с.

[11] Задачник по курсу математического анализа / Н. Я. Виленкин, К. А. Бохан, И. А. Марон, др. ; Под ред. Н. Я. Виленкин. — М. : «Просвещение», 1971. — Т. 2. — 336 с.