Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ:

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ

для студентів Інституту прикладного системного аналізу

денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
спеціальності 124 – Системний аналіз

Рекомендовано Вченою радою

Інституту прикладного системного аналізу

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»

Київ 2017

Гриф надано

вченою радою ІПСА НТУУ «КПІ

ім. І. Сікорського»

(протокол № 5 від 25.05.2017)

Гармонічний аналіз та операційне числення: Перетворення Лапласа і його застосування: текст лекцій для студентів Інституту прикладного системного аналізу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» / Укладач: В.Г.Бондаренко— К.: НТУУ «КПІ», 2017.— 70 с.

Гармонічний аналіз та операційне числення

Перетворення Лапласа і його застосування

текст лекцій для студентів Інституту прикладного системного аналізу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» спеціальності 124 — системний аналіз

Укладач: В.Г.Бондаренко

Відповідальний

редактор професор Ю. В. Богданський

Рецензенти

Завідувач кафедри прикладної математики НТУУ «КПІ ім.Ігоря Сікорського» , д.т.н., професор О.Р.Чертов

Завідувач кафедри диференціальних рівнянь НТУУ «КПІ ім.Ігоря Сікорського», д.ф.-м.н., професор, М.Є.Дудкін

Зміст

ВСТУП.

Тема «Перетворення Лапласа і його застосування» є складовою частиною дисципліни «Гармонічний аналіз та операційне числення», що викладається в 4 семестрі для студентів спеціальності «Системний аналіз та управління». Зміст даної теми використовує знання, що надаються в дисциплінах: «Алгебра та геометрія», «Математичний аналіз» (зокрема, в розділі « Теорія комплексної змінної»); своє використання перетворення Лапласа знаходить в таких дисциплінах, як «Диференціальні рівняння», «Рівняння математичної фізики», «Функціональний аналіз», а також в дисциплінах, присвячених аналізу лінійних динамічних систем (зокрема, «Теорія управління»).

Пропонований посібник містить значну кількість прикладів і завдань для самостійної роботи.

ЛЕКЦІЯ 1

РОЗДІЛ 1

ВИЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1.1. Основні означення та приклади

Означення оригіналу. Оригіналом називається функція *f(t)* дійсної змінної *t*, яка задовольняє такі умови:

1) *f(t)* – неперервна або кусково-неперервна функція;

2) *f(t) = 0* при $t < 0$;

3) існують такі додатні числа *M* та *s*, які не залежать від *t*, що для всіх *t > 0*

$$|f(t)| < Me^{st}$$

Число s_0, для якого нерівність в умові 3) виконується при будь-якому $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) і не виконується при $s = s_0 - \varepsilon$ (s_0 – точна нижня межа чисел s) називається показником зростання функції *f(t).*

Зауваження. На функцію-оригінал можна накладати більш загальні умови..

Означення зображення. Зображенням функції-оригіналу *f(t)* називається функція *F(p)* комплексної змінної $p = s + i\sigma$, $s = Re\, p$, $\sigma = Im\, p$, яка визначається інтегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad (1)$$

Функцію *F(p)* будемо називати зображенням по Лапласу.

Твердження. Якщо функція *f(t)* – оригінал с показником зростання s_0 , то інтеграл Лапласа збігається до півплощини $Re\, p > s_0$.

Доведення:

$|f(t)| < Me^{s_0 t}$ *та* $Re\, p > s_0$. *Тоді*

$$\left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\right| \le \int_0^\infty |e^{-pt} f(t)dt| < M\int_0^\infty e^{-st} e^{s_0 t}dt = \frac{M}{s-s_0}$$

Оскільки $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ збігається абсолютно при $Re\, p = s > s_0$ та для всіх $t > 0$ виконується нерівність $e^{st} \le e^{s_0 t}$, то за ознакою рівномірної збіжності інтеграл *F(p)* = $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ збігається рівномірно відносно p в області $Re\, p > s_0$. ■

Теорема. 1) Якщо інтеграл *F(p)* = $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ збігається при $Re\, p > s_0$, то функція *F(p)* аналітична у півплощині $Re\, p > s_0$ та похідна

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

2)Виконується співвідношення: $F(p) \to 0,\ p \to \infty,\ Re\, p > s_0$.

Довести теорему самостійно.

Формула (1) ставить у відповідність кожній функції *f(t)* з класу функцій-оригіналів певну функцію *F(p)* комплексної змінної, аналітичну у півплощині $Re\, p = s > s_0$, де s_0 – показник зростання функції *f(t).* Це співвідношення називається перетворенням Лапласа.

Операційним численням будемо називати теорію перетворення Лапласа.

Співвідношення між оригіналом *f(t)* та зображенням *F(p)* будемо записувати символом: *f(t)* ↔ *F(p),* бо $F(p) = L(f)(p)$. У подальшому в перетворенні Лапласа оригінал будемо позначати малою літерою, а його зображення – відповідною великою літерою *(x(t)* ↔ *X(p)).*

Приклади:

Функція-оригінал

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$$

називається одиничною функцією Хевісайда.

Якщо функція *f(t)* задовольняє умови 1) та 3) функції-оригіналу, але не задовольняє умови 2), то функція

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t) \text{ при } t > 0, \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$$

задовольняє всі умови оригіналу.

Для стислості запису функції-оригіналу *f(t)η(t)* будемо писати без множника *η(t),* домовившись, що всі функції, які задовольняють умовам 1) та 3) функцій-оригіналів, дорівнюють нулю для від'ємних значень *t*.

Обчислимо зображення деяких оригіналів:

1) $f(t) = \eta(t)$

$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} 1 dt = lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-pt} dt = lim_{a\to\infty} \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^a = lim_{a\to\infty} \Big(\frac{1}{p} -$
$1p\, e{-}pa.$

Якщо $Re\, p > 0$, то $\lim_{a\to\infty} e^{-pa} = 0$; . отже, $\boldsymbol{\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}, Re\, p > 0.}$

2) $f(t) = e^{\alpha t}$

$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t} dt = lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-(p-\alpha)t} dt = lim_{a\to\infty} \frac{e^{-(p-\alpha)t}\,|_0^a}{p-\alpha} =$

$= lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{e^{-(p-\alpha)\alpha}}{p-\alpha}\right).$

Якщо $Re\,(p - \alpha) > 0$, то $lim_{a\to\infty} e^{-(p-\alpha)\alpha} = 0$; отже, $e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p-\alpha}$, $Re\, p > Re\, \alpha.$

Гамма-функція. Гамма-функція визначається інтегралом

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \qquad s > 0. \tag{2}$$

Мають місце формули:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \tag{3}$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Знайдемо значення гамма-функції при $s = \frac{1}{2}$. Маємо

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^\infty e^{-\varrho^2} d\varrho = \sqrt{\pi}.$

З (3) випливає: $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}.$

При $s > 0$ функція $\Gamma(s)$ додатня, має неперервну похідну $\Gamma'(s)$ та $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, то за теоремою Ролля на інтервалі (1, 2) існує така точка s, в якій $\Gamma'(s) = 0.$

В цій точці (s = 1,461632…) функція *Γ(s)* має мінімум (Γ(1,461632…) = 0,885603…) .

Функцію *Γ(s),* користуючись формулою (3), можна визначити для $s < 0$. Якщо $-1 < s < 0$ або $0 < s+1 < 1$, то права частина рівняння $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ визначена, отже, і вираз у лівій частині має сенс, тобто функція *Γ(s)* визначається на інтервалі (-1, 0). Аналогічно визначається *Γ(s)* при $s < 0$ та на інтервалах (-2, -1), (-3, -2) і т.д. Для натурального числа n маємо

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \cdot \sqrt{\pi}\ .$$

З рівняння $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ випливає, що якщо s прямує до 0, -1, -2, …, то *Γ(s)* прямує до ±∞.

У комплексній області гамма-функція визначається інтегралом

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(p-1)} dt$$

або у вигляді нескінченого добутку (була визначена Вейерштрассом)

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p e^{cp} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right) e^{-\frac{p}{n}} \qquad (4)$$

де c = $lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \ln m\right) = 0{,}5772157\ldots$ – стала Ейлера.

Рівність (4) називається формулою Вейєрштраса.

З (4) випливає, що функція *Γ(p)* аналітична всюди, окрім точок p = 0, -1, -2, …, в яких вона має прості полюси.

Таким чином, гамма-функція *Γ(p)* у півплощині $Re\ p > 0$ може бути зображенням, так як у цій півплощині вона існує і аналітична.

Зображення степеневої функції t^α, $\alpha > -1$.

За визначенням зображення, користуючись (2), отримуємо:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^\alpha}{p^\alpha} \cdot \frac{du}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1)\ ,$$

$\alpha + 1 > 0$, тобто $\boldsymbol{t^\alpha \leftrightarrow \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \alpha > -1}$

Для натуральних $\alpha = n$ $\quad \boldsymbol{t^n} \leftrightarrow \frac{\Gamma(\boldsymbol{n+1})}{\boldsymbol{p^{n+1}}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p^{n+1}}}$

Приклади:

1. $f(t) = t^{\frac{3}{2}}$. $\quad t^{\frac{3}{2}} \leftrightarrow \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{p^{\frac{5}{2}}}$

2. $f(t) = t^5$. $\quad t^5 \leftrightarrow \frac{5!}{p^6}$ або $t^5 \leftrightarrow \frac{120}{p^6}$

3. $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$. $\quad t^{-\frac{1}{2}} \leftrightarrow \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{p^{-\frac{1}{2}+1}}$ або $\frac{1}{\sqrt{t}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$

1.2. Основні властивості перетворення Лапласа

Лінійність оператора L.

Якщо

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(p), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(p), \ \ldots, \quad f_n(t) \leftrightarrow F_n(p)$$

та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – комплексні числа, то

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots \alpha_n f_n \leftrightarrow \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots \alpha_n F_n$$

Приклади: Користуючись властивістю лінійності та рівністю

$$e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p-\alpha},$$

знайдемо зображення функції:

1. $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \leftrightarrow \frac{1}{2i}(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}) = \frac{1}{p^2+1}$

$$\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}, \ Rep > 0.$$

2. $sh\, t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}) = \frac{1}{p^2-1}$

$$sh\, t \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1}, \quad Rep > 1.$$

3. $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}) = \frac{p}{p^2+1}$

$$\cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}, Rep > 0.$$

4. $ch\, t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) \leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}) = \frac{p}{p^2-1}$

$$ch\, t \leftrightarrow \frac{p}{p^2-1},\ Rep > 1.$$

Вправи:

Знайти зображення функцій:

1. $f(t) = \frac{1}{2}(ch\, t + \cos t)$

   Відповідь: $F(p) = \frac{p^3}{p^4-1}$

2. $f(t) = \frac{1}{2}(sh\, t + \sin t)$

   Відповідь: $F(p) = \frac{p^2}{p^4-1}$

3. $f(t) = \frac{1}{2}(sh\, t - \sin t)$

   Відповідь: $F(p) = \frac{1}{p^4-1}$

4. $f(t) = \frac{1}{2}(ch\, t - \cos t)$

   Відповідь: $F(p) = \frac{p}{p^4-1}$

Теорема подібності

Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\boldsymbol{f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}), \quad \alpha > 0}$$

Доведення:

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$$

(заміна $\alpha t = \tau$). ■

Приклади:

1. $\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\frac{p}{\alpha})^2+1} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$

2. $sh\ \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(\frac{p}{\alpha})^2-1} = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$

3. $\cos \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{(\frac{p}{\alpha})^2+1} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}$

4. $ch\ \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{(\frac{p}{\alpha})^2-1} = \frac{p}{p^2-\alpha^2}$

5. $\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right) = \frac{2p^2+4\alpha^2}{2p(p^2+4\alpha^2)} = \frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$

6. $ch^2\ \alpha t = \frac{1}{2}(1 + ch2\alpha t) \leftrightarrow \frac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$

7. $\sin^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right) = \frac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$

8. $sh^2\ \alpha t = \frac{1}{2}(ch2\alpha t - 1) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-4\alpha^2} - \frac{1}{p}\right) = \frac{2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$

9. $\sin \alpha t \cdot \cos \beta t = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)t + \sin(\alpha+\beta)t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{p^2+(\alpha-\beta)^2} + \frac{\alpha+\beta}{p^2+(\alpha+\beta)^2}\right) =$
$= \frac{\alpha(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+(\alpha-\beta)^2)(p^2+(\alpha+\beta)^2)}$

Вправи:

Знайти зображення функцій:

1. $f(t) = sh\ \alpha t \cdot ch\ \beta t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{\alpha(p^2-\alpha^2+\beta^2)}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)}$.

2. $f(t) = \cos \alpha t \cdot \cos \beta t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{(p^2+(\alpha-\beta)^2)(p^2+(\alpha+\beta)^2)}$.

3. *f(t) = ch αt · ch βt.*

Відповідь: *F(p)* = $\frac{p(p^2-\alpha^2+\beta^2)}{(p^2-(\alpha-\beta)^2)(p^2-(\alpha+\beta)^2)}$.

4. *f(t) = sin αt · sin βt.*

Відповідь: *F(p)* = $\frac{2\alpha\beta p}{(p^2+(\alpha-\beta)^2)(p^2+(\alpha+\beta)^2)}$.

5. *f(t) = sh αt · sh βt.*

Відповідь: *F(p)* = $\frac{2\alpha\beta p}{(p^2-(\alpha+\beta)^2)(p^2-(\alpha-\beta)^2)}$.

Теорема запізнення

Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$ і $t_0 > 0$, то $f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 p}F(p)$.

Доведення:

За означенням оригіналу маємо:

$$f(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ f(t-t_0), & t > t_0. \end{cases}$$

Зображення оригіналу $f(t-t_0)$ дорівнює:

$$f(t-t_0) \leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)dt$$

Замінюючи змінну інтегрування $t - t_0 = \tau$, отримуємо:

$$f(t-t_0) \leftrightarrow \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau)d\tau = e^{-pt_0}\int_{0}^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau)d\tau = e^{-pt_0}F(p)$$

■

Застосовуючи теореми подібності і запізнення, можна знайти зображення для оригіналу виду $f(at-t_0)$, де $a > 0$ і $t_0 > 0$.

Нехай $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тоді за теоремою подібності:

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

а за теоремою про запізнення знаходимо:

$$f(at-t_0) = f\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)e^{-\frac{t_0}{a}p}$$

Тоді:

$$f(at-t_0) \leftrightarrow e^{-\frac{t_0}{a}p}\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), a>0, t_0>0 \qquad (1)$$

Приклади:

1. $\sin(\omega t-\varphi_0) \leftrightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.
2. $sh(\omega t-\varphi_0) \leftrightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$.
3. $cos(\omega t-\varphi_0) \leftrightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{p}{p^2+\omega^2}$.
4. $ch(\omega t-\varphi_0) \leftrightarrow e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{p}{p^2-\omega^2}$.

Теорема запізнення є зручним способом для знаходження зображень кусочно-неперервних функцій-оригіналів.

Приклади:

1. $f(t) = \begin{cases} a, & 0<t<\tau, \\ 0, & t<0 \; і \; t>\tau \end{cases}$

Функцію $f(t)$ за допомогою одиничної функції $\eta(t)$ і теореми запізнення можна записати формулою:

$$f(t) = [\eta(t)-\eta(t-\tau)]a \; .$$

Знаходимо зображення оригіналу $f(t)$. Маємо:

$$f(t) \leftrightarrow a\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$$

2. $f(t) = \begin{cases} t, & 0<t<a, \\ 2a-t, & a<t<2a \\ 0, & t>2a \; і \; t<0 \end{cases}$ Трикутний імпульс

Користуючись теоремою запізнення і одиничною функцією $\eta(t)$, оригінал $f(t)$ можна записати формулою:

$$f(t) = t\eta(t) - t\eta(t-a) + (2a-t)\eta(t-a) + (t-2a)\eta(t-2a)$$

Або: $f(t) = t\eta(t) - 2(t-a)\eta(t-a) + (t-2a)\eta(t-2a)$

Зображення функції $f(t)$ дорівнює:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-ap} + \frac{1}{p^2}e^{-2ap} = \frac{(1-e^{-ap})^2}{p^2}$$

Звідси, $f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}(1-e^{-ap})^2$.

3. $$f(t) = \begin{cases} t-2a, & 2a < t < a+b, \\ 2b-t, & a+b < t < 2b \\ 0, t > 2b \; і \; t < 2a \end{cases}$$

Функцію $f(t)$ запишемо формулою:

$$f(t) = (t-2a)\eta(\mathrm{t}-2\mathrm{a}) - (t-2a)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{a}-\mathrm{b}) + (2b-t)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{a}-\mathrm{b}) + (t-2b)\eta(\mathrm{t}-2\mathrm{b})$$

Або:

$$f(t) = (t-2a)\eta(\mathrm{t}-2\mathrm{a}) - 2(t-a-b)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{a}-\mathrm{b}) + (t-2b)\eta(\mathrm{t}-2\mathrm{b})$$

Знаходимо зображення $F(p)$ для даної функції. Маємо:

$$F(p) = \frac{e^{-2ap}}{p^2} - 2\frac{e^{-(a+b)p}}{p^2} + \frac{e^{-2bp}}{p^2} = \frac{\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right)^2}{p^2}$$

4. $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n, & n \le t < n+1, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Функцію $f(t)$можна записати у вигляді:

$$f(t) = \eta(\mathrm{t}-1) - \eta(\mathrm{t}-2) + 2\eta(\mathrm{t}-2) - 2\eta(\mathrm{t}-3) + 3\eta(\mathrm{t}-3) - 3\eta(\mathrm{t}-4) + \cdots + (n-1)\eta\big(\mathrm{t}-(\mathrm{n}-1)\big) - (n-1)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{n}) + n\eta(\mathrm{t}-\mathrm{n}) + \cdots$$

Або:

$$f(t) = \eta(\mathrm{t}-1) + \eta(\mathrm{t}-2) + \eta(\mathrm{t}-3) + \cdots + n\eta(\mathrm{t}-\mathrm{n}) + \cdots$$

Зображення $F(p)$ для функції $f(t)$ дорівнює:

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-3p}}{p} + \cdots + \frac{e^{-p}}{p} = \frac{1}{p}\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}.$$

5. $$f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ t-a, & a < t < b \\ b-a, & t > b \end{cases}$$

Маємо:

$$f(t) = (t-a)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{a}) - (t-a)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{b}) + (b-a)\eta(\mathrm{t}-\mathrm{b})$$

Або:

$$f(t) = (t-a)\eta(\mathrm{t-a}) - (t-b)\eta(\mathrm{t-b})$$

Зображення функції $f(t)$ буде:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{e^{-ap}}{p^2} - \frac{e^{-bp}}{p^2} = \frac{1}{p^2}(e^{-ap} - e^{-bp}).$$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2a \; i \; t > 2b \\ 1, & 2a < t < a+b \\ -1, & a+b < t < 2b \end{cases}$

Дану функцію $f(t)$ запишемо формулою:

$$f(t) = \eta(\mathrm{t-2a}) - 2\eta(\mathrm{t}-a-\mathrm{b}) + \eta(\mathrm{t-2b})$$

Тоді зображення функції $f(t)$ буде:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{e^{-ap}}{p} - 2\frac{e^{-(a+b)p}}{p} + \frac{e^{-2bp}}{p} = \frac{(e^{-ap} - e^{-bp})^2}{p}.$$

Вправи:

Знайти зображення функцій $f(t)$:

1. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t > a \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = \eta(t-a)$; $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p}$.

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \text{ і } t > b \\ 1, & a < t < b \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b)$; $F(p) = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$.

3. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \; i \; t > 2a, \\ 1, & 0 < t < a, \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-a) + \eta(t-2a)$; $F(p) = \frac{(1-e^{-ap})^2}{p}$.

4. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & t > a \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = \eta(t-a)$; $F(p) = \frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$.

5. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ e^{-b(t-a)}, & t > a \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = \eta(t-a)$; $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p+b}$.

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0\,, \\ t, & 0 < t < a\,, \\ a, & t > a \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = t\eta(t) - (t-a)\eta(t-a)$; $F(p) = \frac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

7. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n, & na \le t < (n+1)a; \end{cases}$ n=0, 1, 2, …

Відповідь: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(t-na)$; $F(p) = \frac{1}{p(e^{-ap}-1)}$.

8. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n\left(t - \frac{(n+1)a}{2}\right), & na \le t < (n+1)a; \end{cases}$ n=0, 1, 2, …

Відповідь: $f(t) = \eta(t-na)\sum_{n=1}^{\infty} \eta(t-na)$; $F(p) = \frac{1}{p^2(e^{-ap}-1)}$.

9. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ n+1, & n \le t < n+1 \end{cases}$ n=0, 1, 2, …

Відповідь: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta(t-n)$; $F(p) = \frac{1}{p\,(1-e^{-p})}$.

10. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0\,, \\ 1, & 0 < t < a\,, \\ -\frac{1}{b} + 1 + \frac{a}{b}, & a < t < a+b \end{cases}$

Відповідь: $f(t) = \eta(t) - \frac{1}{b}(t-a)\eta(t-a) + \frac{1}{b}\eta(t-a-b)\eta(t-a-$
b; Fp=1p−1be−app2(1−e−bp).

Зображення періодичного оригіналу

Твердження: Якщо оригінал $f(t)$є періодичною функцією: $f(t) = f(t+T)$, то його зображення $F(p) = \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt,\ \ Re\,p > 0$.

Доведення:

$$F(p) == \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}dt$$

Виконаємо в кожному доданку заміну: $\tau = t - kT$. Тоді

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau)e^{-p(\tau+kT)}d\tau = \int_0^T f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTp} = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$$

(скористалися нерівністю $\left|e^{-kpT}\right| < 1$ для $Re\,p > 0$, і сума ряду є сумою збіжної геометричної прогресії).

■

Приклади:

1. $$f(t) = f(t+2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi \\ 0, & (2n+1)\pi \le t < (2n+2)\pi \end{cases} \qquad \text{n=0, 1, 2, …}$$

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t\ dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\ \frac{e^{-pt}}{p^2+1}\ (-p\sin t - \cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{p^2+1}\ \frac{1}{1-e^{-\pi p}}.$$

2. $$\eta(t)f(t) = f\left(t+\frac{\pi}{a}\right) = |sinat|$$

$$|sinat| \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\ \frac{e^{-pt}}{p^2+a^2}(-p\sin at\ - a\cos at)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{p}} = \frac{a}{p^2+a^2}\ cth\, p\frac{\pi}{2a}.$$

3. $$f(t) = f(t+2\pi) = \frac{\sin t}{|sint|} = \begin{cases} 1, & 2\pi n < t < (2n+1)\pi \\ -1, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Знаходимо зображення $F(p)$. Отримаємо:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\int_0^{\pi} e^{-pt}dt\ - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^{\pi} + \frac{e^{-pt}}{p}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(-\frac{e^{-\pi p}}{p} + \frac{1}{p} + \frac{e^{-2\pi p}}{p} + \frac{e^{-\pi t}}{p}\right) = \frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p(1-e^{-2\pi p})}$$

$$= \frac{1}{p}\ \frac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}} = \frac{1}{p}\ th\frac{\pi p}{2}.$$

4. $$f(t) = f(t+4a) = \begin{cases} \frac{t}{a} - 4n, & 4na < t < (4n+1)a \\ -\frac{t}{a} + 4n + 2, & (4n+1)a < t < (4n+2)a \\ 0, & (4n+2)a < t < (4n+4)a \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Переходячи до зображення, отримаємо:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4ap}}\int_0^{4a} e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-4ap}}\left[\int_0^{a} e^{-pt}dt\ +\int_a^{2a} e^{-pt}\left(2-\frac{t}{a}\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{a(1-e^{-4ap})}\left[\left(-\frac{te^{-pt}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Big|_0^a+\left(\frac{te^{-pt}}{p}+\frac{e^{-pt}}{p^{\,2}}-\frac{2ae^{-pt}}{p}\right)\Big|_a^{2a}\right]$$

$$=\frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})}=\frac{th\dfrac{ap}{2}}{ap^2(1+e^{-2ap})}.$$

Вправи:

Знайти зображення періодичних функцій $f(t)$:

1. $$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}1, & 2na<t<(2n+1)a\\ -1, & (2n+1)a<\ t<(2n+2)a\\ 0, & t<0\end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p)=\frac{1}{p}\ th\frac{ap}{2}$.

2. $$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\frac{t}{a}-2n, & 2na<t<(2n+1)a\\ -\frac{t}{a}+2(n+1), & (2n+1)a<\ t<(2n+2)a\\ 0, & t<0\end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p)=\frac{1}{ap^2}\ th\frac{ap}{2}$.

3. $$f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\frac{2t}{a}-(4n+1), & 2na<t<(2n+1)a\\ -\frac{2t}{a}+4n+3, & (2n+1)a<\ t<(2n+2)a\\ 0, & t<0\end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p)=\frac{2}{ap^2}\ th\frac{ap}{2}-\frac{1}{p}$.

4. $$f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\frac{2t}{a}-(2n+1), & na<t<(n+1)a\\ 0, & t<0\end{cases}$$ n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p)=\frac{-2-ap-(2+ap)e^{-ap}}{ap^2(1-e^{-ap})}$.

5. $$f(t) = f\left(t + 2\frac{\pi}{a}\right) = \begin{cases} \sin at, & \frac{2\pi n}{a} < t < \frac{(2n+1)\pi}{a} \\ 0, & \frac{(2n+1)\pi}{a} < t < \frac{(2n+2)\pi}{a} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p) = \frac{a}{p^2+a^2}\,\frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}$.

6. $$f(t) = f(t + 2a) = \begin{cases} \frac{t}{a} - 2n, & 2na < t < (2n+1)a \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p) = \frac{1-(1+ap)e^{-ap}}{ap^2(1-e^{-2ap})}$.

7. $$f(t) = f(t + 2a) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a \\ -1, & (2n+1)a < t < (2n+2)a \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p) = \frac{ap+1-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}$.

8. $$f(t) = f(t + 4a) = \begin{cases} 0, & 2na < t < (2n+1)a \\ 1, & (4n+1)a < t < (4n+2)a \\ -1, & (4n+3)a < t < (4n+4)a \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p) = \frac{1-e^{-ap}}{p(e^{ap}+e^{-ap}}$.

9. $$f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{2n\pi}{a} < t < \frac{(2n+1)\pi}{a} \\ \sin at, & \frac{2n+1}{a}\pi < t < \frac{2n+2}{a}\pi \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p) = \frac{a}{p^2+a^2}\,\frac{1}{1-e^{\frac{\pi p}{a}}}$.

10. $$f(t) = f(t + 2a) = \begin{cases} \frac{t}{a} - 2n, & 2na < t < \left(2n + \frac{1}{m}\right)a, \\ \frac{1}{m}, & a\left(2n + \frac{1}{m}\right) < t < (2n+1)a \\ -1, & (2n+1)a < t < (2n+2)a \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

n=0, 1, 2, …

Відповідь: $F(p) = \frac{m - me^{-\frac{ap}{m}} - ape^{-ap}}{amp^2(1-e^{-2ap})}$.

Теорема зміщення

Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p), p_0$ −комплексне число, то $e^{-p_0 t} f(t) \leftrightarrow F(p+p_0)$.

Доведення:

$$e^{-p_0 t} f(t) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} e^{-p_0 t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(p+p_0)t} f(t) dt = F(p+p_0),$$

$$Re\, p > s_0 - Re\, p_0$$

Так як $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, то

$|e^{-p_0 t} f(t)| = |e^{-p_0 t}||f(t)| < \ Me^{s_0 t} e^{-Re\, p_0 t} =< \ Me^{(s_0 - Re\, p_0)t}$,

отже, $s_0 - Re\, p_0$ є показником росту функції $e^{-p_0 t} f(t)$.

Тоді функція $F(p+p_0)$ визначена в півплощині

$Re\, p > s_0 - Re\, p_0$ ■

Теорема зміщення застосовується при розгляданні фізичних явищ, пов’язаних з затухаючими коливаннями.

Приклади:

Користуючись теоремою зміщення, зайдемо зображення наступних функцій:

1. $e^{-at} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$.
2. $e^{-at} \operatorname{sh} \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p+a)^2-\omega^2}$.
3. $e^{-at} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$.
4. $e^{-at} \operatorname{ch} \omega t \leftrightarrow \frac{p+a}{(p+a)^2-\omega^2}$.
5. $t^n e^{-\beta t} \leftrightarrow \frac{n!}{(p+\beta)^{n+1}}$.
6. $\frac{t^n}{n!} \sin \alpha t = \frac{1}{2i}\left[\frac{t^n}{n!} e^{\alpha i t} - \frac{t^n}{n!} e^{-\alpha i t}\right] \leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(p-\alpha i)^{n+1}} - \frac{1}{(p+\alpha i)^{n+1}}\right]$

або $\frac{t^n}{n!} \sin \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{2i} \ \frac{(p+\alpha i)^{n+1} - (p-\alpha i)^{n+1}}{(p^2+a^2)^{n+1}}$

7. $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \sin \alpha t \leftrightarrow \frac{1}{2i} \ \frac{(p-\beta+\alpha i)^{n+1} - (p-\beta-\alpha i)^{n+1}}{[(p-\beta)^2+\alpha^2]^{n+1}}$.

Вправи:

Знайти оригінали функцій $F(p)$:

1. $F(p) = \frac{1}{p^2-4p+20}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{4}e^{2t}\sin 4t$.

2. $F(p) = \frac{p-2}{p^2-4p+13}$.

Відповідь: $f(t) = e^{2t}\cos 3t$.

3. $F(p) = \frac{3p+19}{2p^2+8p+19}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{3}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{\frac{11}{2}}t + \frac{13}{\sqrt{22}}e^{-2t}\sin\sqrt{\frac{11}{2}}t$.

4. $F(p) = \frac{5p-1}{p^3-1}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{4}{3}e^{t} - \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + 2\sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$.

5. $F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p}$.

Відповідь: $f(t) = e^{-t}\,\mathrm{ch}\,t$.

Знайти зображення функцій $f(t)$:

6. $f(t) = e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{p^2+8p+41} + \frac{1}{p^2+8p+17}\right]$.

7. $f(t) = e^{3t}\cos 3t\cos 4t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{p-3}{(p-3)^2+49} + \frac{p-3}{(p-3)^2+1}\right]$.

8. $f(t) = \mathrm{sh}\,t\cos 2t\sin 3t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\left[\frac{5}{(p-1)^2+25} + \frac{1}{(p-1)^2+1} - \frac{5}{(p+1)^2+25} - \frac{1}{(p+1)^2+1}\right]$.

9. $f(t) = \mathrm{ch}\,t\sin 2t\sin 3t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{p-1}{(p-1)^2+25} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+25}\right]$

10. $f(t) = \mathrm{ch}\,3t\sin^2 t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-3} - \frac{p-3}{(p-3)^2+4} + \frac{1}{p+3} - \frac{p-3}{(p+3)^2+4}\right]$.

11. $f(t) = \mathrm{sh}\,4t\cos^2 3t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-4} + \frac{p-4}{(p-4)^2+36} - \frac{1}{p+4} - \frac{p+4}{(p+4)^2+36}\right]$.

ЛЕКЦІЯ 2

Диференціювання оригіналу

Теорема. Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$ та функції $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$

$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$

....

$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ \dots \ - f^{(n-1)}(0),$

Доведення:

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt$$

Інтегруємо праву частину рівності частинами та отримуємо

$$f'(t) \leftrightarrow e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

Оскільки $Re\, p = s > s_0$, то

$$|e^{-pt}f(t)| < e^{-st}Me^{-s_0t} = Me^{-(s-s_0)t}$$

і тому $\lim_{t\to\infty} e^{-pt}f(t) = 0$.

Таким чином,

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0), \qquad Re\, p > s_0.$$

Якщо $f(0) = 0$, то $f'(t) \leftrightarrow pF(p)$. Це позначає, що диференціюванню оригіналу $f(t)$ відповідає в просторі зображення множення на p функції $F(p)$.

Аналогічно, повторне інтегрування частинами $\int_0^\infty e^{-pt}f''(t)dt$ приводить до співвідношення

$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

За методом математичної індукції

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ \dots \ - f^{(n-1)}(0). \qquad \blacksquare$$

Приклад:

Знайти зображення диференціального виразу:

$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8$

при початкових умовах:

$x'''(0) = 2,\ x''(0) = -1, x'(0) = 0, x(0) = 5.$

Позначимо $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за теоремою про диференціювання оригіналу маємо:

$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - 5,$

$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - 5p,$

$x'''(t) \leftrightarrow p^3X(p) - 5p^2 + 1,$

$x^{IV}(t) \leftrightarrow p^4X(p) - 5p^3 + p - 2.$

Звідси за властивістю лінійності отримуємо:

$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8 \ \leftrightarrow \ p^4X(p) - 5p^3 + p - 2 - 5(p^3X(p) - 5p^2 + 1) - 4(p^2X(p) - 5p) + 2(pX(p) - 5) - X(p) + \frac{8}{p} = (p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)X(p) - 5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}$.

Вправи:

Знайти зображення наступних диференціальних виразів:

1. $x^{IV}(t) + 4x'''(t) + 4x''(t);$
$x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2, x'''(0) = 3.$
Відповідь: $(p^4 + 4p^3 + 4p^2)X(p) - p^3 - 6p^2 - 10p - 3.$

2. $3x'''(t) - 2x''(t) + 5$

$x(0) = -1,\ x'(0) = 2, x''(0) = 3.$

Відповідь: $(3p^3 - 2p^2)X(p) + 3p^2 - 8 - 5 + \frac{5}{p}$.

3. $4x^{IV}(t) + 3x''(t) + x(t)$

$x(0) = 0,\ x'(0) = 3, x''(0) = 0, x'''(0) = -1.$

Відповідь: $(4p^4 + 3p^2 + 1)X(p) - 12p^2 - 5.$

4. $x^V(t) + 2x^{IV}(t) + 4x(t)$

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = x^{IV}(0) = -1.$

Відповідь: $(p^5 + 2p^4 + 4)X(p) + p + 3.$

Диференціювання зображення

Теорема. Якщо $F(p) \leftrightarrow f(t)$, $Re\, p > s_0$, то

$F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$

$F''(p) \leftrightarrow (-1)^2 t^2 f(t)$

$\dots$

$F^{(n)}(t) \leftrightarrow (-1)^n t^n f(t) \quad (Re\, p > s_1 > s_0),$

тобто диференціювання зображення відповідає множенню оригіналу на величину $(-t)$.

Доведення:

1. Функція $t^n f(t)$ є оригіналом. Дійсно, функція $t^n f(t)$ – неперервна або кусково неперервна, оскільки $f(t)$ – оригінал; при $t < 0$ $f(t) = 0$, тому і $t^n f(t) = 0$ при $t < 0$.

При $t > 0$ маємо

$$|t^n f(t)| = t^n |f(t)| < t^n M e^{s_0 t} = M e^{(s_0 + \alpha)t}$$

($\alpha > 0$ – мале число).

2. Зображення $F(p)$ для функції $f(t)$ на півплощині $Re\, p > s_0$ є аналітичною функцією та похідна функції дорівнює

$F'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial e^{-pt}}{\partial p} f(t)dt \leftrightarrow -tf(t)$ ■

.

Приклади:

Користуючись теоремою диференціювання зображення, знайти зображення наступних функцій: $t\sin t$, $t\cos t$, $t\operatorname{sh} t$, $t\operatorname{ch} t$.

З рівностей

$\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\cos \alpha t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\alpha^2}$, $\operatorname{sh} \alpha t \leftrightarrow \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$, $\operatorname{ch} \alpha t \leftrightarrow \frac{p}{p^2-\alpha^2}$

знаходимо

1. $t\sin \alpha t \leftrightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$;
2. $t\cos \alpha t \leftrightarrow \frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$;
3. $t\operatorname{sh} \alpha t \leftrightarrow \frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}$;
4. $t\operatorname{ch} \alpha t \leftrightarrow \frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}$;

Вправи:

Знайти зображення функції $f(t)$:

1. $f(t) = t^2\cos \alpha t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{2p(p^2-3\alpha^2)}{(p^2+\alpha^2)^3}$;

2. $f(t) = t^2\sin \alpha t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{2p(3p^2-\alpha^2)}{(p^2+\alpha^2)^3}$;

3. $f(t) = t\sin \alpha t \operatorname{sh} \alpha t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{2\alpha^2(3p^4-4\alpha^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}$;

4. $f(t) = t \cos \alpha t \operatorname{ch} \alpha t$.

Відповідь: $F(p) = \frac{p^2(p^4-12\alpha^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}$;

Інтегрування оригіналу

Теорема. Якщо $F(p) \leftrightarrow f(t)$, $Re\, p > s_0$, то функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ також є оригіналом та

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}, \quad Re\, p > s_0.$$

Доведення:

Функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам 1) та 2) функції-оригіналу, а також умові 3), оскільки

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f(\tau)||d\tau| < \int_0^t Me^{s_0\tau}d\tau = \frac{M}{s_0}e^{s_0\tau}\Big|_0^t = \frac{M}{s_0}(e^{s_0t}-1) < M_1e^{s_0t}$$

де $M_1 = \left|\frac{M}{s_0}\right|$.

Нехай $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(p)$, $Re\, p > s_0$, тоді за теоремою про диференціювання оригіналу маємо:

$$\varphi'(t) \leftrightarrow p\Phi(p), \qquad \varphi(0) = 0.$$

Оскільки $\varphi'(t) = f(t)$, то $F(p) = p\Phi(p)$. Звідси

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Таким чином,

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p} \qquad \blacksquare$$

Інтегрування зображення

Теорема: Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $Re\, p > s_0$ та інтеграл$\int_p^\infty F(q)dq$ збігається на півплощині $Re\, p > s_1 > s_0$, то:

$$\int_p^\infty F(q)dq \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}, Re\, p > s_1 > s_0.$$

Доведення: На півплощині $Re\, p > s_0$ інтеграл Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ збігається рівномірно відносно p, тому в цій півплощині його можна інтегрувати по параметру p.

Маємо

$$\int_p^{\infty} F(q)dq = \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

до того ж за контур інтегрування можна обрати будь-який промінь, що виходить з точки p та утворює гострий кут з дійсною віссю. Оскільки за умовою інтеграл $\int_p^{\infty} F(q)dq$ збігається на півплощині $Re\, p > s_1 > s_0$, то

$$\int_p^{\infty} dq \int_0^{\infty} e^{-qt} f(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)dt \int_p^{\infty} e^{-qt} dq = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt$$

або

$$\int_p^{\infty} F(q)dq = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt. \qquad \blacksquare$$

Таким чином, інтегрування зображення $F(p)$ зводиться в просторі оригіналів до ділення на t функції $f(t)$, тобто

$$\int_p^{\infty} F(q)dq \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}, Re\, p > s_1 > s_0.$$

Приклад:

Знайти зображення інтегрального синусу

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^{t} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$$

З рівності $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$ за теоремою інтегрування зображення маємо:

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = arctg\, p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctg\, p = arctg\, \frac{1}{p}$$

Звідси за теоремою інтегрування оригіналу отримуємо

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p}\,arctg\,\frac{1}{p}.$$

Вправи:

Знайти зображення функцій $f(t)$:

1. $f(t) = \frac{e^{-at}\sin t}{t}$.

Відповідь: $F(p) = arctg\,\frac{1}{p+a}$.

2. $f(t) = \frac{\mathrm{sh}^2 t}{t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2-4}$.

3. $f(t) = \frac{\sin 7t\ \sin 3t}{t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}$.

4. $f(t) = \frac{\mathrm{ch}\,at - \mathrm{ch}\,bt}{t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2-b^2}{p^2-a^2}$.

5. $f(t) = \frac{\mathrm{sh} t}{t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$.

6. $f(t) = \frac{\cos at - \cos bt}{t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}$.

7. $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}e^{-t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{2}\ln\frac{(p+1)^2+1}{(p+1)^2}$.

8. $f(t) = \frac{1-e^{-at}}{te^t}$.

Відповідь: $F(p) = \ln\frac{p+1-a}{p+1}$.

9. $f(t) = \frac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{4}\ln\frac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}$.

1.3 Інші властивості перетворення Лапласа

Теорема про граничний перехід по параметру

Якщо оригінал та його зображення залежать від параметра $\lambda, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, тобто $f(t,\lambda) \leftrightarrow F(p,\lambda)$ та існує границя $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda)$, $\lambda_0 \in [\lambda_1;\lambda_2]$, то

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \leftrightarrow \lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda).$$

Доведення: За умовою $F(p,\lambda) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t,\lambda)dt$.

Візьмемо від обох частин цієї рівності границю при $\lambda \to \lambda_0$. Маємо

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \leftrightarrow \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^\infty e^{-pt} f(t,\lambda)dt.$$

Оскільки невласний інтеграл Лапласа збігається рівномірно відносно p та λ ($Re\, p > s_0$ та $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$), то дії границі $\lim_{\lambda\to\lambda_0}$ та інтегралу можна переставити.

Отже,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda)dt$$

або $\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \leftrightarrow \lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda)$. ■

Диференціювання по параметру

Теорема: Якщо оригінал та його зображення залежать від параметра λ, тобто $f(t,\lambda) \leftrightarrow F(p,\lambda)$, $Re\, p > s_0$, та існує похідна $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)$ при $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ та $t > 0$ то

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda} F(p,\lambda).$$

Доведення: Задамо параметру λ приріст $\Delta\lambda$, тоді функція $F(p,\lambda)$ отримає відповідний приріст $\Delta F(p,\lambda)$.

Знайдемо відношення приростів $\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}$. Маємо

$$\frac{F(p,\lambda+\Delta\lambda)-F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t,\lambda+\Delta\lambda)-f(t,\lambda)}{\Delta\lambda}dt.$$

Оскільки, за формулою Лагранжа, $\frac{f(t,\lambda+\Delta\lambda)-f(t,\lambda)}{\Delta\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda+\varepsilon)$,

де $\varepsilon=\varepsilon(t,\lambda,\Delta\lambda)\to 0$ рівномірно при $\Delta\lambda\to 0$, то

$$\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_0^\infty e^{-pt}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda+\varepsilon)\right]dt.$$

За теоремою про граничний перехід можна перейти до границі при $\Delta\lambda\to 0$ під знаком інтеграла:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda)=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}=\int_0^\infty e^{-pt}\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda+\varepsilon)dt.$$

Отже,

$\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda)=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)dt$ або $\frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda)\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda)$. ■

Приклади:

1. З рівності $\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}\leftrightarrow\sin\lambda t$,

користуючись диференціюванням по параметру, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}\right)\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\lambda}\sin\lambda t,$$

або

$$\frac{1}{p^2+\lambda^2}-\frac{2\lambda^2}{(p^2+\lambda^2)^2}\leftrightarrow t\cos\lambda t.$$

Оскільки

$$\frac{1}{p^2+\lambda^2}\leftrightarrow\frac{sin\,\lambda t}{\lambda},$$

то за властивістю лінійності маємо

$$\frac{2\lambda^2}{(p^2+\lambda^2)^2} \leftrightarrow \frac{sin\,\lambda t}{\lambda} - t\cos\lambda t$$

або

$$\frac{2\lambda^3}{(p^2+\lambda^2)^2} \leftrightarrow sin\,\lambda t - \lambda t\cos\lambda t. \qquad (5)$$

2. Диференціюємо по параметру λ рівність $\cos\lambda t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\lambda^2}$:

та отримуємо

$$\frac{t\sin\lambda t}{2\lambda} \leftrightarrow \frac{p}{(p^2+\lambda^2)^2}. \qquad (6)$$

3. Знайти оригінал функції

$$F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4p+8)^2}.$$

Перетворимо:

$$F(p) = \frac{2(p+2)}{[(p+2)^2+2^2]^2} - \frac{1}{[(p+2)^2+2^2]^2}.$$

З рівності (6) при $\lambda = 2$ знаходимо

$$\frac{2p}{(p^2+2^2)^2} \leftrightarrow \frac{t\sin 2t}{2}.$$

За властивістю зміщення маємо

$$\frac{2(p+2)}{[(p+2)^2+2^2]^2} \leftrightarrow e^{-2t}\frac{t\sin 2t}{2}.$$

Користуючись рівністю (5) при $\lambda = 2$ отримуємо

$$\frac{1}{[p^2+2^2]^2} \leftrightarrow \frac{\sin 2t - 2t\cos 2t}{2\cdot 2^3}.$$

Тоді за властивістю зміщення

$$\frac{1}{[(p+2)^2+2^2]^2} \leftrightarrow e^{-2t}\frac{\sin 2t - 2t\cos 2t}{16}.$$

Отже,

$$F(p) \leftrightarrow e^{-2t}\frac{t\sin 2t}{2} + e^{-2t}\frac{2t\cos 2t - \sin 2t}{16}$$

або $\qquad F(p) \leftrightarrow \frac{e^{-2t}}{16}[(8t-1)\sin 2t + 2t\cos 2t].$

4. Знайдемо зображення функції $\ln t$. Диференціюєчи по параметру α обидві частини рівності

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \alpha > -1,$$

отримуємо

$$\int_0^\infty e^{-pt}t^\alpha \ln t\, dt = \frac{\Gamma'(\alpha+1)p^\alpha - p^\alpha \ln p\, \Gamma(\alpha+1)}{pp^{2\alpha}}.$$

Покладемо в рівності $\alpha = 0$ та знайдемо

$$\int_0^\infty e^{-pt} \ln t\, dt = \frac{\Gamma'(1) - \ln p}{p}$$

або

$$\ln t \leftrightarrow \frac{\Gamma'(1) - \ln p}{p}.$$

З формули Вейерштрасса (4), у вигляді

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{p}{n}}}{1+\frac{p}{n}},$$

маємо

$$\ln\Gamma(p) = -cp - \ln p + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p}{n} - \ln(1+\frac{p}{n})\right]$$

та, диференціюючи по p, отримаємо:

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = -c - \frac{1}{p} + p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+p)}.$$

Покладемо $p = 1$:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\text{c} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Звідси $\Gamma'(1) = -c$, оскільки $\Gamma(1) = 1$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Отже,

$$\ln t \leftrightarrow \frac{-c - \ln p}{p}.$$

або, оскільки $c \to \frac{c}{p}$,

$$\ln t + c \leftrightarrow -\frac{\ln p}{p}, (c - \text{стала Ейлера})$$

Користуючись теоремою диференціювання по параметру, можна отримати з відомих операційних рівностей нові операційні рівності. Крім того, цю теорему використовують в операційному численні для розв’язку лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Інтегрування по параметру

Теорема: Якщо оригінал і зображення залежать від параметра λ, тобто $f(t,\lambda) \leftrightarrow F(p,\lambda)$ і існують інтеграли $\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda)d\lambda$ і $\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda)d\lambda$, то

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda)d\lambda \leftrightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda)d\lambda$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_{0}^{A} e^{-pt} f(t,\lambda)dt = \int_{0}^{A} dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t,\lambda)d\lambda. \qquad (7)$$

За умовою границя

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda\int_0^A e^{-pt} f(t,\lambda)dt = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t,\lambda)dt$$

існує, тому існує і границя в рівності (7) при $A\to\infty$, тобто :

$$\lim_{A\to\infty}\int_{0_0}^{A} dt\int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t,\lambda)d\lambda = \int_{0_0}^{\infty} dt\int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t,\lambda)d\lambda.$$

Інтегруючи рівність $F(p,\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t,\lambda)dt$ по λ в межах від λ_0 до λ, отримаємо :

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-pt}\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda)d\lambda\right]dt$$

або $\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda)d\lambda \leftrightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda)d\lambda$

Приклад: з рівності $\frac{1}{p-\lambda}\leftrightarrow e^{\lambda t}$ при $\lambda_0=0$ маємо :

$$\int_{0_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{p-\lambda}\leftrightarrow \int_{0_0}^{\lambda} e^{\lambda t}d\lambda.$$

Інтегруючи по параметру λ, отримуємо нову операційну рівність

$$\ln\frac{p}{p-\lambda}\leftrightarrow\frac{e^{\lambda t}-1}{t} \qquad \blacksquare$$

Граничні теореми

Теорема 1. Якщо $f(t)\leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $f'(t)$ є функцією-оригіналом і існує $\lim_{t\to 0} f(t)$, то $\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0} f(t)$.

Доведення:

З рівності $F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt$ маємо $|F(p)| < \frac{M}{s-s_0}$, оскільки $|f(t)| < Me^{s_0 t}$.

Тому $\lim_{\operatorname{Re} p = s\to\infty} F(p)=0$, тоді якщо p прямує до нескінченності таким чином, що якщо його дійсна частина $Rep = s$ прямує до нескінченності. Якщо точка $p=\infty$ не є особливою точкою функції $F(p)$, то прямування $p\to\infty$

не залежить від шляху, тобто $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$. Оскільки функція $f'(t)$ є оригіналом, то $f'(t)\leftrightarrow pF(p)-f(0)$.

Отже,

$$\lim_{p\to\infty}\left[pF(p)-f(0)\right]=0;$$

або

$$\lim_{p\to\infty} pF(p)=\lim_{t\to 0} f(t).$$

Таким чином, початкове значення оригіналу $f(0)$ можна знайти по його зображенню $F(p)$ за допомогою граничного відношення $f(0)=\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$. ■

Теорема 2: Якщо $f(t)\leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $f'(t)$ є функцією-оригіналом і існує $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, то $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Доведення: Оскільки функція $f'(t)$ - оригінал, то

$f'(t)\to pF(p)-f(0)$, або

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = pF(p)-f(0).$$

Підінтегральна функція інтеграла Лапласа задовольняє всі умови теореми про граничний перехід під знаком інтеграла. Отже,

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = \int_0^\infty \lim_{p\to 0} e^{-pt} f'(t)dt = \int_0^\infty f'(t)dt =$$

$$=\lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} f(t)\,|_0^t = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \left[f(t)-f(0)\right] = \lim_{t\to\infty} f(t)-f(0)$$

Таким чином ,

$$\lim_{t\to\infty} f(t)-f(0)=\lim_{p\to 0} pF(p)-f(0)$$

Або $\lim\limits_{p\to 0} pF(p)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Отже,

$$f(\infty)=\lim_{p\to 0} pF(p). \qquad ■$$

Згортка функцій

Згорткою оригіналів $\varphi(t)$, $f(t)$(позначається$\varphi * f$) називається інтеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{8}$$

Приклад: Знайти згортку функцій $\varphi(t) = t$ і $f(t) = e^t$.

Маємо $t * e^t = \int_0^t e^\tau (t-\tau) d\tau = t\int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau = (te^\tau - e^\tau \tau + e^\tau)|_0^t = e^t - t - 1.$

Отже, $t * e^t = e^t - t - 1.$

Згортка комутативна: $\varphi * f = f * \varphi$. Покладемо в рівності (8) $t - \tau = u$, отримуємо

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = -\int_t^0 \varphi(u) f(t-u) du = \int_0^t f(t-u)\varphi(u) du,$$

тобто

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau.$$

Вправи:

Знайти згортки :

1. $\sin t * sht.$ Відповідь: $\frac{1}{2}(sht - \sin t)$.

2. $\sqrt{1+t} * 1$.

Відповідь: $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+t)^3} - 1\right)$.

3. $e^{\alpha t} * (1 - \alpha t).$ Відповідь: $t.$ te^t

4. $t^2 * t^3.$ Відповідь: $\frac{1}{60} t^6.$

5. $e^t * e^t.$ Відповідь: $te^t.$

Використовуючи властивості згортки, спростити вирази:

6. $\cos^2 t * t + t * \sin^2 t.$

Відповідь: $\frac{1}{2}t^2$.

7. $\cos t * \cos t$.

Відповідь: $\frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$.

Теорема 1. Якщо функції $\varphi(t)$ і $f(t)$- оригінали, згортка $f*\varphi$ теж є функцією-оригіналом.

Доведення:

Для функції $f*\varphi = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$ умови 1) і 2) визначення оригіналу , очевидно, виконуються.

Доведемо, що функція $f*\varphi$ задовольняє і умову 3) визначення функції-оригіналу.

Оскільки $|f(t)| < M_0 e^{s_0 t}$ і $|\varphi(t)| < M_1 e^{s_1 t}$, то

$$|f*\varphi| \le \int_0^t |f(\tau)||\varphi(t-\tau)|d\tau < \int_0^t M_0 e^{s_0\tau} M_1 e^{s_1(t-\tau)}d\tau.$$

Позначимо $M_0 M_1 = M_2$ і нехай $s_0 > s_1$, тоді

$$|f*\varphi| < M_2 \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)}d\tau = M_2 e^{s_0\tau} t = M_2 t e^{-\alpha t} e^{(s_0+\alpha)t},$$

де $\alpha > 0$ і як завгодно мало. ■

Зображення згортки (теорема множення)

Якщо $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ і $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, то $f*\varphi \leftrightarrow F(p)\Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ при $s_0 > s_1$.

Доведення:

$$f*\varphi \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt}[f*\varphi]dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

В цій рівності двократний інтеграл по області $D(0 \le t < \infty, 0 \le \tau \le t)$ збігається абсолютно, оскільки зображення оригіналу $f*\varphi$ визначено в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$. Тому в двократному інтегралі можна змінити порядок інтегрування $(0 \le \tau < \infty, \tau \le t < \infty)$, тобто

$$f * \varphi \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt.$$

Поклавши $t - \tau = u$, отримаємо

$$f * \varphi \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-pu} f(u) du = F(p)\Phi(p).$$

Отже, $f * \varphi \leftrightarrow F(p)\Phi(p)$, тобто згортці в просторі оригіналу відповідає множення функцій в просторі зображень.

Приклад:

Знайдемо згортку $t^\alpha * t^\beta, \alpha > 0, \beta > 0.$

Зображення для t^α і t^β дорівнюють

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leftrightarrow \frac{1}{p^{\alpha+1}} ; \qquad \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \leftrightarrow \frac{1}{p^{\beta+1}} .$$

За теоремою множення маємо

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{p^{\beta+1}} \leftrightarrow \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$$

або

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha t^\beta.$$

Оригінал для лівої частини цієї рівності дорівнює

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \leftrightarrow \frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Як наслідок ,

$$\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} t^\alpha * t^\beta.$$

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}.$$

Якщо $\alpha = m, \beta = n$ - натуральні числа, то

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1}.$$

Оскільки

$$t^\alpha * t^\beta = \int_0^t \tau^\alpha (t-\tau)^\beta d\tau,$$

то

$$\int_0^t \tau^\alpha (t-\tau)^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}.$$

Підставляючи $\tau = tx$ в підінтегральний вираз в цій рівності, отримуємо

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

або

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

З іншого боку, бета-функція $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ визначається формулою

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx., \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

Таким чином доведено формулу:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \qquad \blacksquare$$

Вправи:

Користуючись теоремою множення, знайти оригінали :

1. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}.$

Відповідь $f(t) = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}.$

2. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}.$

Відповідь $f(t)=\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

3. $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$.

Відповідь $f(t)=\frac{1}{5}(2\sin 2t-\cos 2t+e^t)$.

4. $F(p)=\frac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)}$.

Відповідь $f(t)=\frac{1}{6}e^{3t}(2\sin t-\sin 2t)$.

5. $F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$.

Відповідь $f(t)=\frac{1}{2}e^{2t}(t^2-4t+6)-e^{-t}(t+3)$.

6. $F(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$. Відповідь $f(t)=\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)$.

7. $F(p)=\frac{1}{p^2(p-1)}$. Відповідь $f(t)=e^t-t-1$.

Приклад: обчислення зображення штучним зведенням оригінала до згортки. Розглянемо функції

$$f(t)=\int_0^t e^{-ax^2}\,dx,\ \ g(t)=f\left(\sqrt{t}\right),\ \ a>0, \text{ тобто}$$

$$g(t)=\int_0^{\sqrt{t}} e^{-ax^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^t e^{-ay}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$$

Обчислимо зображення $G(p)$ оригінала $g(t)$. Запишемо $g(t)$ у вигляді

$$g(t)=\frac{1}{2}e^{-at}\int_0^t e^{a(t-y)}\frac{1}{\sqrt{y}}dy.$$

Оскільки $\frac{1}{\sqrt{t}}\leftrightarrow\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$, $e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{p-a}$, то згортка $\int_0^t e^{a(t-y)}\frac{1}{\sqrt{y}}dy\leftrightarrow\frac{\sqrt{\pi}}{(p-a)\sqrt{p}}$. За теоремою зміщення

$$g(t)\leftrightarrow G(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p+a}},\ \ Re p>0.$$

1.4 Обернення перетворення Лапласа

Нехай $F(p)$ – зображення деякого невідомого оригіналу $f(t)$. Виведемо формулу, що дозволяє обчислити $f(t)$. .Ця формула ґрунтується на представленні функції інтегралом Фур'є:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)d\omega \qquad (9)$$

де $g(t)$ – інтегровна на осі функція, що задовольняє деяким додатковим умовам неперервності. Якщо $f(t)$ – оригінал з показником зростання $s_0, s > s_0$, то за формулою (9):

$$e^{-st}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i(s+i\omega)\tau}d\tau\right)d\omega$$

Якщо позначити $p=s+i\omega$ і помножити обидві частини рівності на e^{st}, отримаємо формулу:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad (10)$$

де областю інтегрування є вертикальна пряма $Re\ p = s$, що розташована в області аналітичності функції $F(p)$. Співвідношення (10) задає обернене перетворення Лапласа:

$$f(t) = L^{-1}(F)(p)$$

і називається формулою Рімана-Мелліна.

В деяких випадках обчислення інтеграла (10) зводиться до використання **леми Жордана**:

Нехай C_R – півколо $|p - s|=R$, $Re\ p < s$, тобто на C_R $p - s = Re^{i\varphi}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

Якщо підінтегральна функція $h(p) = e^{pt}F(p)$ задовольняє нерівності

$\left|h(Re^{i\varphi})\right| < \varepsilon(R)e^{R\cos\varphi}$, де $\varepsilon(R) \to 0$, $R \to 0$, то $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}|h(p)||dp| = 0$.

Наслідок. Якщо умови леми виконуються, то за теоремою про лишки

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \sum_k Res(e^{pt}F(p))(p_k) \qquad (11)$$

де p_k - особливі точки функції $e^{pt}F(p)$, що розташовані у півплощині $Re\ p<s$.

Формула (11) називається теоремою розкладу.

Зауваження. Найбільш уживаними особливими точками є полюси функції $F(p)$; лишки в полюсі обчислюються за відомими формулами.

Приклади:

1. $F(p) = \frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$.

Функція $F(p)$ має прості полюси: $p_1=2$; $p_2=5$ *та* $p_3=-4$.

Отже, $f(t) = \frac{1}{54}(11e^{4t} + 58e^{5t} - 15e^{2t})$.

2. $F(p) = \frac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

Функція $F(p)$ має прості полюси: $p=\pm 2i$ *та* $p=\pm i$.

Отже, $f(t) = 2Re(\frac{1-i}{6}e^{2it} - \frac{1+i}{6}e^{it})$.

Або $f(t) = \frac{1}{3}(cos2t + sin2t - cost + sint)$.

3. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$.

Функція $F(p)$ має прості полюси: $p=2$; $p=\pm i$ та полюс 3-го порядку $p=1$.

Маємо

$f(t) = Res(F(p)e^{pt})(2) + Res(F(p)e^{pt})(i) + Res(F(p)e^{pt})(-i) + Res(F(p)e^{pt})$

Рахуємо лишки

$Res(F(p)e^{pt})(2) = \left[\frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)}e^{pt}\right]_{p=2} = \frac{1}{5}e^{2t}$;

$Res(F(p)e^{pt})(i) + Res(F(p)e^{pt})(-i) = 2Re(Res(F(p)e^{pt})(i)) =$
$=2Re\left[\frac{1}{(p-1)^3(p+i)(p-2)}e^{pt}\right]_{p=i} = \frac{1}{20}(cost - 3sint)$;

$Res(F(p)e^{pt})(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p^2+1)(p-2)}e^{pt}\right]_{p=1} = \frac{1}{2}\left[\frac{2(6p^4-16p^3+15p^2-3)}{(p^2+1)^3(p-2)^3}e^{pt} -\right.$
$- 23p2-4p+1p2+12p-23tept+ t2eptp2+1\ p-2_{\ p=1} = - et4(t2+1).$

Отже, $f(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{20}(cost - 3sint) - \frac{e^t}{4}(t^2+1)$.

Вправи:

Користуючись теоремою розкладу, знайти оригінали для даних функцій $F(p)$:

1. $F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$.

Відповідь: $f(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{12}e^{-2t}$.

2. $F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$.

3. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{2}\,(t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^{t} - 6e^{t})$.

4. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+3)}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{28}\left(\,(2t^2 - 2t + 1)e^{-t} - e^{-3t}\,\right)$.

5. $F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)^4}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{t^2}{2} - 4t + 10 - e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + \frac{3}{2}t^2 + 6t + 10\right)$.

6. $F(p) = \frac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{e^{t}}{27}\,(t - 1) + \frac{e^{-2t}}{18}\left(t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{2}{3}\right)$.

7. $F(p) = \frac{\alpha^4}{p(p^2+\alpha^2)^2}$.

Відповідь: $f(t) = 1 - cos\alpha t - \frac{\alpha t}{2}sin\alpha t$.

8. $F(p) = \frac{1}{(p-2)^3(p+3)}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{25}\,(e^{-3t} + (5t - 1)e^{2t})$.

9. $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)\,(p^2+2p+5)}$.

Відповідь: $f(t) = e^{t} - e^{-t}(cos2t - \frac{3}{2}sin2t)$.

10. $F(p) = \frac{1}{(p+3)^3(p+1)}$.

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{8}\,(e^{-t} - e^{-3t}(2t^2 + 2t + 1))$.

ЛЕКЦІЯ 3

РОЗДІЛ 2

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

2.1Задача Коші для лінійних диференціальний рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Знайдемо розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t),$$

$$x(0) = c_0, x'(0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \qquad (12)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$– дійсні числа.

Нехай невідома функція $x(t)$ та її похідні $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$ та функція $f(t)$задовольняють умовам функції-оригіналу. Позначимо $f(t) \leftrightarrow F(p)$ та $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тоді за властивістю диференціювання оригіналу маємо

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - c_0,$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - pc_0 - c_1, \dots.$$

$$x^{(n-1)}(t) \leftrightarrow p^{n-1} X(p) - p^{n-2} c_0 - \ \dots \ - c_{n-2},$$
$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n X(p) - p^{n-1} c_0 - \ \dots \ - c_{n-1}.$$

За властивістю лінійності отримуємо

$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x \leftrightarrow p^n X - p^{n-1} c_0 - \ \dots \ - c_{n-1} + a_1 (p^{n-1} X - p^{n-2} c_0 - \ \dots \ - c_{n-2}) + \dots + a_{n-1}(pX - c_0) + a_n X.$

Оскільки $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то за теоремою про єдиність оригінала в просторі зображень отримаємо рівняння

$$p^n X - p^{n-1} c_0 - \ \dots \ - c_{n-1} + a_1 (p^{n-1} X - p^{n-2} c_0 - \ \dots \ - c_{n-2}) + \cdots$$
$$+ a_{n-1}(pX - c_0) + a_n X = F(p)$$

або

$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = F(p) + p^{n-1} c_0 + \dots + c_{n-1} + a_1 (p^{n-2} c_0 + \dots + c_{n-2}) + \dots + a_{n-1} c_0, \qquad (13)$

яке будемо називати операторним рівнянням, що відповідає диференціальному рівнянню (12) з початковими умовами . Операторне рівняння є алгебраїчним рівнянням відносно функції $X(p)$.

З рівняння (13) знаходимо

$$X(p)=\frac{F(p)+p^{n-1}c_0+\cdots+c_{n-1}+a_1(p^{n-2}c_0+\cdots+c_{n-2})+\cdots+a_{n-1}c_0}{p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n}.$$

За зображенням $X(p)$ знаходимо функцію $x(t)$. Для цього користуємось в залежності від виду функції $X(p)$ або теоремою обернення, або іншими теоремами операційного числення, або безпосередньо знаходимо з таблиць перетворень Лапласа.

Приклади:

1. Знайти розв'язок диференціального рівняння
$x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t)$ при початкових умовах:
$x(0)=-1, x'(0)=1.$

Переходячи до зображень, отримаємо

$x\leftrightarrow X,\quad x'\leftrightarrow pX+1,\qquad x''\leftrightarrow p^2X+p-1,$

$$\cos t+2\sin t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+1}+2\frac{1}{p^2+1}=\frac{p+2}{p^2+1}.$$

$$e^{-2t}(\cos t+2\sin t)\leftrightarrow\frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Операторне рівняння буде мати вигляд

$$p^2X+p-1+4pX+4+4X=\frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Звідси

$$X(p)=-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1](p+2)^2}.$$

Розкладемо зображення $X(p)$ на елементарні дроби. Маємо

$$-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1](p+2)^2}=\frac{Ap+B}{(p+2)^2+1}+\frac{C}{(p+2)^2}+\frac{D}{p+2},$$

де $A=-1,\ B=-4,\ C=1, D=0.$

Тоді

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2} = -\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{2}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Звідси за властивістю лінійності та теоремі зміщення, отримаємо розв'язок диференціального рівняння

$$x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t).$$

2.Знайти розв'язок диференціального рівняння

$x^V - x' = 8\sin t$ при початкових умовах:

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 0, x^{IV}(0) = 1.$

Оскільки

$x(t) \leftrightarrow X(p),\ x'(t) \leftrightarrow pX(p), x^V(t) \leftrightarrow p^5X(p) - 1,\ \ \sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1},$

операторне рівняння буде мати вигляд

$$p^5X - 1 - pX = \frac{8}{p^2+1}.$$

Звідси

$$X(p) = \frac{p^2+9}{p(p^2-1)(p^2+1)^2}.$$

Обчислюючи інтеграл, отримуємо:

$$x(t) = -9 + \frac{5}{2}\operatorname{ch} t + \frac{13}{2}\cos t + 2t\sin t.$$

Вправи:

Знайти часткові розв'язки диференціальних рівнянь

1. $4x'' + 12x' + 9x = 144e^{-\frac{3}{2}t}$

$x(0) = 1, x'(0) = 0{,}5.$

Відповідь: $x(t) = e^{-\frac{3}{2}t}(18t^2 + 2t + 1).$

2. $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t + 3)$

$x(0) = 2, x'(0) = 2.$

Відповідь: $x(t) = e^t(e^t - t^2 - t + 1).$

3. $x'' + 4x' + 3x = \operatorname{sh} t \sin t$

$x(0) = 0, x'(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = -\frac{79}{170}e^{-3t} + \frac{3}{10}e^{-t} - \frac{6}{170}e^{t}\cos t + \frac{7}{170}e^{t}\sin t +$
$\frac{2}{10}e^{-t}\cos t + \frac{1}{10}e^{-t}\sin t.$

$$4.\, x'' + 2x' + x = e^{-t}(\cos t + t)$$

$x(0) = 1, x'(0) = -1.$

Відповідь: $x(t) = 2e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-t}t^{3} - e^{-t}\cos t.$

$$5.\, x'' + 6x' + 8x = 2e^{-t}(\cos 3t + 1)$$

$x(0) = 2, x'(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = -\frac{25}{12}e^{-4t} + \frac{69}{20}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{30}e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{15}e^{-t}\sin 3t.$

$$6.\ x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t}\sin t$$

$x(0) = x'(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = e^{-t}(3\sin t + (1 - t)\cos t).$

$$7.\, x''' - 3x' + 2x = 8te^{-t}$$

$x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = 2te^{-t} + te^{t} - e^{t} + e^{-2t}.$

$$8.\, x''' - x'' + 4x' - 4x = 5e^{-t}\sin t$$

$x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = \frac{13}{20}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t + e^{t}(\frac{6}{5} - \cos t - \frac{1}{2}\sin t).$

$$9.\, x''' + 2x'' + x' + 2e^{-2t} = 0$$

$x(0) = 2,\ x'(0) = x''(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = 4 - 3e^{-t} + e^{-2t}.$

$$10.\ x''' - x'' - x' + x = 4e^{t}(6t - 1) + 3t$$

$x(0) = 1,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 0.$

Відповідь: $x(t) = e^{t}\left(2t^{3} - 4t^{2} + 5t - \frac{11}{2}\right) + \frac{7}{2}e^{-t} + 3(t + 1).$

$$11.\ x''' - x' = 3(2 - t^{2})$$

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = e^t + t^3$.

$$12.\ x^{IV} - 16x = t^2 + 1$$

$x(0) = x'''(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1.$

Відповідь: $x(t) = -\frac{1}{16}(t^2+1) + \frac{27}{128}e^{2t} - \frac{5}{128}e^{-2t} - \frac{7}{64}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t.$

Розв'язок рівнянь з нульовими початковими умовами за допомогою згортки.

Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t)$$

з нульовими початковими умовами:

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Відповідне рівняння для зображень має вигляд

$$A(p)X(p) = F(p),$$

де $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$, звідки

$X(p) = H(p)F(p), \quad H(p) = \frac{1}{A(p)}$. Позначимо $h(t) \leftrightarrow H(p)$.

Тоді розв'язок $x(t)$ задачі Коші записується згорткою

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

або

$x(t) = \int_0^t h(\tau)f(t-\tau)d\tau$.

Приклад:

Знайти розв'язок задачі Коші

$x^{IV} + 2x'' + x = \cos t$, $\qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

Відповідним операторним рівнянням буде

$$p^4X + 2p^2X + X = F(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

Звідси

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Оригінал для функції $H(p)$ знаходимо за теоремою розкладу. Функція $H(p)$ має комплексно-спряжені полюси 2-го порядка $p = \pm i$. Отже,

$$h(t) = \left\{\frac{d}{dp}\left[(p-i)^2 \frac{1}{(p^2+1)^2} e^{pt}\right]\right\}_{p=i} + \left\{\frac{d}{dp}\left[(p+i)^2 \frac{1}{(p^2+1)^2} e^{pt}\right]\right\}_{p=-i} =$$

$$= \frac{d}{dp}\,\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}(i) + \frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{(p-i)^2}(-i) \; = \frac{1}{2}(sint - tcost).$$

Таким чином,

$$h(t) = \; \frac{1}{2}(sint - tcost).$$

За формулою згортки

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau :$$

$x(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot \frac{1}{2}[\sin(t-\tau) - (t-\tau)\cos(t-\tau)]d\tau = \frac{1}{4}\Big[\tau\sin t + \frac{\cos(t-2\tau)}{2} -$
$t{-}\tau\tau$cos$t{-}$sin$t{-}2\tau2{-}\tau22$cos$t{+}$cos$t{-}2\tau4\ t0.{=}18t$sin$t{-}tcos\ t$

Отже, шуканим розв’язком буде

$$x(t) = \frac{1}{8}t(\sin t - tcos\ t).$$

Вправи:

Знайти часткові розв’язки диференціальних рівнянь:

1. $x'' + 3x' + 2x = e^t$

$x(0) = x'(0) = 0.$

Відповідь: $x(t) = \frac{1}{6}e^t + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{2}{3}e^{-2t}.$

2. $x'' - 4x' + 4x = 8(t^2 + e^{2t} + \sin 2t)$

$x(0) = x'(0) = 0.$

Відповідь: $x(t) = 2t^2 + 4t + 3 + 4e^{2t}(t^2 + t - 1) + \cos 2t.$

3. $x^{IV} - 2x'' + x = 24t\cos t$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$
Відповідь: $x(t) = 3[-4\sin t + 2t\cos t + e^t - e^{-t}]$.

4. $x''' - 6x'' + 11x' + 6x = 1$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
Відповідь: $x(t) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t}$.

5. $x^{IV} + 2x''' + x = t\sin t$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$
Відповідь: $x(t) = \frac{1}{24}[(3t - t^3)\sin t - 3t^2\cos t]$.

6. $x''' + x = \frac{1}{2}t^2e^t$
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
Відповідь: $x(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{24}e^{-t}$.

2.2 Системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами також можна розв’язувати за допомогою операційного метода. Цей розв’язок проводиться аналогічно інтегрування одного рівняння. Розв’язок системи рівнянь розглянемо на прикладі.

Приклад:

Знайти частковий розв’язок системи

$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = y(0) = y'(0) = 0,\ x'(0) = 1$.

Маємо

$x(t) \leftrightarrow X(p), \qquad y(t) \leftrightarrow Y(p),$

Тоді $\quad x' \leftrightarrow pX,$

$$x'' \leftrightarrow p^2X - 1,$$

$$y' \leftrightarrow pY,$$

$$y'' \leftrightarrow p^2Y,$$

$$e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1}, e^{-t} \leftrightarrow \frac{1}{p+1}.$$

Запишемо систему операторних рівнянь:

$$\begin{cases} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y = \dfrac{1}{p-1} \\ pX + 2X - pY + Y = \dfrac{1}{p+1} \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, отримуємо:

$$X(p) = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+1},$$

$$Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Перейдемо до оригіналів. Із рівностей $\frac{1}{p+1} \leftrightarrow e^t$ і $\frac{1}{p^2-1} \leftrightarrow sh\ t$ за теоремою диференціювання зображення знаходимо:

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' \leftrightarrow -te^{-t}$$

$$\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' \leftrightarrow -t\ sh\ t$$

Або $\quad \frac{1}{(p+1)^2} \leftrightarrow te^{-t} \qquad \frac{1}{(p^2-1)^2} \leftrightarrow t\ sh\ t$

Відповідно, розв’язком системи буде:

$$x(t) = \frac{1}{4}\ sh\ t + \frac{3}{4}\ te^{-t}.$$

$$y(t) = \frac{3}{4} t\ sh\ t$$

Вправи:

Знайти часткові розв’язки системи диференційних рівнянь:

1. $\begin{cases} x'' + x - y = 0 \\ y'' = x - y + z \\ z'' = x + y - z \end{cases}$

$x(0) = y(0) = z(0) = 1$

$x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$

Відповідь: $x(t) = y(t) = z(t) = ch\, t$

2. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0 \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0 \end{cases}$

$x(0) = x'(0) = 1$

$y(0) = y'(0) = 0$

Відповідь:

$x(t) = \frac{1}{3}\ (e^t + 2\cos 2t + \sin 2t)$

$y(t) = \frac{1}{3}\ (2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t)$

3. $\begin{cases} 2x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y + z'' - z = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1, x'(0) = y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0$

Відповідь:

$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\ ch\,\sqrt{2t}$

$y(t) = z(t) = \frac{1}{3}\ cost - \frac{1}{3} ch\,\sqrt{2t}$

4. $\begin{cases} x'' - 4x - y' - 2y + z' - 2z = 0 \\ 2x' - y'' + 3y + z'' - 4z = 0 \\ x' - 2x - y + z'' - 4z = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1 = y(0) = z(0) = 1$

$x'(0) = 2, y'(0) = 3, z'(0) = 1.$

Відповідь:

$x(t) = -\frac{1}{8}e^t + \frac{11}{12}e^{3t} + \frac{5}{24}e^{-3t}$

$y(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{11}{12}e^{3t} - \frac{1}{24}e^{-3t}$

$z(t) = \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t}$

5. $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t \\ y' - 4x - 2y = \cos t \end{cases}$

$x(0) = 0$

$y(0) = 1$

Відповідь:

$x(t) = 2\sin t - 3t$

$y(t) = 6t + 3 - 2\cos t - 3\sin t$

2.3 Інтегральні рівняння типу згортки

Рівняння

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t k\,(t,\tau) f(\tau) d\tau, \qquad (14)$$

де $f(t)$ – невідома функція, $\varphi(t)$ і $k(t,\tau)$ – задані функції, a і λ – константи, називається інтегральним рівнянням Вольтера.

Функція $k(t,\tau)$ називається ядром інтегрального рівняння. Якщо $a = 0$, то рівняння (14) називається рівнянням 1-го роду, якщо ж $a \neq 0$, то рівняння (14) – 2-го роду. Якщо ядро $k(t,\tau)$ залежить тільки від різниці $t - \tau$, тобто $k(t,\tau) = k(t - \tau)$, то інтеграл

$$\int_0^t k\,(t-\tau) f(\tau) d\tau = k(t) * f(t)$$

є згорткою функцій $k(t)$ і $f(t)$. В цьому випадку рівняння (14) називається інтегральним рівнянням типу згортки і його розв'язок можна знайти операційним методом.

Інтегральне рівняння 2-го роду. Якщо інтеграл $\int_0^\infty e^{-pt}\, k(t) * f(t) dt$ збігається абсолютно, то перетворення Лапласа переводить згортку $k(t) * f(t)$, за теоремою множення, в добуток зображень, тобто:

$$k(t) * f(t) \leftrightarrow K(p)F(p).$$

Відповідно, інтегральне рівняння згортки

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t k\,(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad (15)$$

після перетворення

$f(t) \leftrightarrow F(p)$, $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(t)$, $k(t) \leftrightarrow K(p)$ перейде в операторне рівняння:

$$aF(p\,) = \Phi(p) + \lambda K(p)F(p).$$

Звідси:

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{a - \lambda K(p)}$$

або

$$F(p) = \frac{1}{a}\Phi(p) + \frac{\lambda}{a}\,\frac{K(p)}{a - \lambda K(p)}\Phi(p).$$

Позначимо

$$\frac{K(p)}{a - \lambda K(p)} = \Psi(p)$$

і нехай $\Psi(p) \leftrightarrow \psi(t)$; тоді рівність

$$F(p) = \frac{1}{a}\Phi(p) + \frac{\lambda}{a}\Psi(p)\Phi(p)$$

переходить в просторі оригіналів в рівність

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda\psi(t) * \varphi(t).$$

.

Розв'язок $F(p)$ операторного рівняння, що відповідає інтегральному рівнянню (15), можна перетворити в простір оригіналів.

Приклад:

Знайти розв'язок інтегрального рівняння 2-го роду типу згортки:

$$f(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau.$$

Переходячи до зображень, отримуємо:

$$f(t) = F(p), \sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau = t^2 * f(t) \leftrightarrow \frac{2}{p^3}F(p).$$

Операторне рівняння, що відповідає даному рівнянню, буде:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{2}{p^3}F(p),$$

звідси

$$F(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Розкладемо зображення $F(p)$ на елементарні дроби:

$$\frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{p^2+p+1},$$

звідси

$$p^3 = A(p^2+1)(p^2+p+1) + (Bp+C)(p^3-1) + (Dp+E)(p-1)(p^2+1).$$

Маємо:

$A = \frac{1}{6}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}, D = -\frac{2}{3}, E = -\frac{1}{3},$ тоді

$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{p+1}{p^2+1} - \frac{2}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{p^2+p+1}.$$

Відповідно, розв'язок матиме вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 3\cos t + 3\sin t - 4e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Вправи: розв'язати інтегральні рівняння

1. $f(t) = \sin t + \int_0^t f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t + \sin t)$.

2. $f(t) = t + \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = sh\, t$.

3. $f(t) = t + 2 - 2\cos t - \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = (1+t)\sin t$.

4. $f(t) = t^2 + \int_0^t f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = 2e^t - 2t - 2$.

5. $f(t) = \cos t + \int_0^t f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{2}(e^t + \cos t + \sin t)$.

6. $f(t) = 1 + \int_0^t e^{t-\tau}f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{2t})$.

7. $f(t) = \sin 2t - \int_0^t e^{t-\tau}f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{2}(\cos 2t + 2\sin 2t - 1)$.

8. $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{t-\tau}f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{13}(2e^{2t} + 11\cos 3t + 3\sin 3t)$.

9. $f(t) = e^{-2t} + 3\int_0^t e^{t-\tau} f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{4}\,(e^{-2t} + 3e^{2t})$.

10. $f(t) = \sin 2t - \frac{8}{3}\int_0^t sh\,3(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{15}\,(13\sin 2t - 16\,\mathrm{sh}\,t)$.

11. $f(t) = \cos 5t - \frac{7}{4}\int_0^t sh4(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{34}\,(41\cos 5t - 7\mathrm{ch}\,3t)$.

12. $f(t) = e^{3t} + \frac{9}{4}\int_0^t sh4(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{80}\,(35e^{3t} + 45\,\mathrm{ch}\,5t + 27\,\mathrm{sh}\,5t)$.

13. $f(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = t^3 + \frac{t^5}{20}$.

14. $f(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = 2te^t - 2e^t + t + 2$.

15. $f(t) = e^{2t} + \cos 3t + \int_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{36}(45e^{2t} + 32\cos 3t - 18t - 5)$.

Додаток

Таблиця 1.Властивості перетворень Лапласа

Назва	Умови	Висновки
1.Лінійність	$f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$ $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$
2.Теорема подібності	$f(t) \leftrightarrow F(p), \alpha > 0$	$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$
3.Теорема запізнення	$f(t) \leftrightarrow F(p)$ $t_0 > 0$ $f(t - t_0) = 0\,,\ 0 < t < t_0$	$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 p} F(p - p_0)$
4.Теорема зміщення	$f(t) \leftrightarrow F(p)$ p_0-комплексне число	$e^{p_0 t} f(t) \leftrightarrow F(p - p_0)$
5.Диференціювання оригіналу	$f(t) \leftrightarrow F(p)$ $f(o) = \lim\limits_{t \to o+o} f(t)$ $\ldots$ $p^{(n-1)}(0) = \lim\limits_{t \to o+o} f^{(n-1)}(t)$	$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$ $f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ $f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
6.Інтегрування оригіналу	$f(t) \leftrightarrow F(p)$	$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$
7.Диференціювання зображення	$f(t) \leftrightarrow F(p)$	$F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$ $\ldots$ $F^{(n)}(p) \leftrightarrow (-1)^n t^n f(t), n = (1,2\ldots)$
8.Інтегрування зображення	$f(t) \leftrightarrow F(p)$	$\int\limits_p^\infty F(q) dq \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}$
9.Інтегрування по параметру	$f(t,\lambda) \leftrightarrow F(p,\lambda)$ Інтеграли $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda) d\lambda$ і $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda) d\lambda$ існують	$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t,\lambda) d\lambda \leftrightarrow \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p,\lambda) d\lambda$

10.Зображення періодичного оригіналу	$f(t)=f(t+T)$	$F(p)=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
11.Теорема множення зображень	$f(t)\leftrightarrow F(p)$ $\varphi(t)\leftrightarrow \Phi(p)$	$F(p)\Phi(p)\leftrightarrow \int_{0_0}^{t} f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau =$ $=\int_{0_0}^{t}\varphi(t-\tau)f(\tau)d\tau$
12.Граничні співвідношення	$f(t)\leftrightarrow F(p)$	$\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)=\lim\limits_{t\to o} f(t)$ $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=\lim\limits_{p\to o} pF(p)$
13.Теорема обернення	$F(p)\leftrightarrow \int_{0_0}^{\infty} e^{-pt}f(t)dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{pt}F(p)dp$
14.Теорема розкладу	$f(t)\leftrightarrow F(p)$, p_k особливі точки $F(p)$	$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[e^{pt}F(p),\, p_k]$

Таблиця 2. Формули перетворення Лапласа

№	Оригінали	Зображення
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-t_0)$	$\frac{1}{p}e^{-t_0 p}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \alpha>-1$
5	t^{n}	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
6	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
7	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
8	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
9	$sh\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$

10	$\sin^2 \alpha t$	$\dfrac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$
11	$\cos^2 \omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
12	$\dfrac{\sin t}{\lvert\sin t\rvert}$	$\dfrac{1}{p} th \dfrac{p\pi}{2}$
13	$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
14	$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
15	$e^{-\alpha t} sh\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$
16	$e^{-\alpha t} ch\omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$
17	$Si(t)$	$\dfrac{1}{p} arctg \dfrac{1}{p}$
18	$\ln t$	$-\dfrac{e+\ln p}{p}$, e- константа Ейлера
19	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}}{\sqrt{\pi p}}$
20	$e^{-\alpha\sqrt{t}}$	$\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi p^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
21	$\sin 2\sqrt{t}$	$\dfrac{1}{p}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}} e^{-\frac{1}{p}}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Краснов М.Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. ; Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: Едиториал 2003 .. - 176 с.

2.Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной/ Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Изд. 3-е.— М.: Наука, 1974. — 319 с.

3.Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. М:, Наука, 1989 .— 478стр

4.Грищенко А.Е. Теория функций комплексного переменного. Решение задач/ Грищенко А.Е., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П.. К.: Вища шк., Головное изд-во, 1986. — 336 с.

5.Мартыненко В.С. Операционное исчисление / Владимир Семенович Мартыненко.—К.: Изд-во Киевского университета, 1965.—186 с.