



АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ. ЧАСТИНА 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>124 Системний аналіз</i>
Освітня програма	<i>Системний аналіз і управління</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна(ПО 02.2)</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредитів ЄКТС, 150 год. (лекції – 36 год., практ. – 36 год., СРС – 78 год.)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен/МКР</i>
Розклад занять	<i>Rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., доцент Подколзін Гліб Борисович, podkolzin.gleb@lil.kpi.ua, Практичні: к.ф.-м.н., доцент Подколзін Гліб Борисович, к.ф.-м.н., доцент Мальцев Антон Юрійович, podkolzin.gleb@lil.kpi.ua, maltsev.anton@lil.kpi.ua</i>
Розміщення курсу	<i>Google classroom</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вона включає:

- Ранг матриці. Методи обчислення рангу матриці, дослідження систем лінійних рівнянь;*
- Перетворення координат та матриця лінійного оператора;*
- Власні числа та вектори лінійного оператора, жорданова форма оператора*
- Унітарний простір, ортонормований базис унітарного простору, спряжені та самоспряжені оператори;*
- Квадратичні форми та поверхні другого порядку;*
- Норми лінійного оператора, Функції від лінійного оператора*

У процесі навчання студент має оволодіти такими загальними, фаховими компетентностями:

ЗК 01 Здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях; ЗК 02 Здатність планувати і управляти часом; ЗК 03 Здатність абстрактно мислити, застосовувати методи аналізу і синтезу; ЗК 05 Здатність спілкуватися державною мовою усно і письмово; ЗК 09 Здатність до адаптації та дії в новій ситуації; ЗК 14 Здатність забезпечувати та оцінювати якість виконуваних робіт; ЗК 15 Здатність реалізовувати свої права та обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності громадянського (вільного демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності; ФК 02 Здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів та аналізу даних; ФК 09 Здатність представляти математичні

аргументи і висновки з них з якістю і точністю в таких формах, які підходять для занять в аудиторіях як усно, так і в письмовій формі.

По завершенню курсу студент має набутися наступні програмні результати навчання:

ПРН 01 Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу; ПРН 05 Знати основні положення теорії метричних просторів, лебегівської теорії міри та інтеграла, теорії обмежених лінійних операторів в банахових та гільбертових просторах, застосовувати техніку і методи функціонального аналізу для розв'язання задач керування складними процесами в умовах невизначеності; ПРН 07 Знати основи теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень, вміти застосовувати їх на практиці для розв'язування прикладних задач управління і проектування складних систем.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна передуює і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Математичний аналіз» (ПО 1), «Фізика» (ПО 4), «Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики» (ПО 5), «Теорія ймовірностей» (ПО 6), «Математична статистика» (ПО 23), «Чисельні методи» (ПО 7), «Гармонічний аналіз та операційне числення» (ПО 20), «Функціональний аналіз» (ПО 8), «Теорія стійкості та варіаційне числення» (ПО 21) «Теорія прийняття рішень» (ПО 17), «Основи системного аналізу» (ПО 16), «Методи оптимізації і дослідження операцій» (ПО 12), «Теорія керування» (ПО 14), «Курсова робота з теорії керування» (ПО 15), «Дипломне проектування» (ПО 28). Вивчення курсу ґрунтується на використанні основних результатів дисципліни «Алгебра і геометрія» (ПО 02.1). Також програми що входять до сертифікатної програми "системна математика": «Теорія випадкових процесів», «Стаціонарні випадкові процеси», «Аналіз часових рядів», «Системний аналіз стохастичних розподілених процесів», «Основи фінансової математики», «Конфліктно керовані процеси»

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Відображення лінійних просторів.

Тема 1.1. Лінійні оператори. Ізоморфізм лінійних просторів.

Тема 1.2. Матриця лінійного оператора. Алгебра лінійних операторів.

Тема 1.3. Лінійні та полі лінійні функціонали. Визначник довільного порядку.

Розділ 2. Системи лінійних рівнянь.

Тема 2.1. Ранг матриці. Методи обчислення рангу матриці.

Тема 2.2. Дослідження систем лінійних рівнянь.

Розділ 3. Лінійні оператори.

Тема 3.1. Перетворення координат та матриця лінійного оператора.

Розділ 4. Структура лінійного оператора.

Тема 4.1. Власні числа та вектори лінійного оператора.

Тема 4.2. Жорданова форма оператора.

Розділ 5. Евклідові та унітарні простори.

Тема 5.1. Евклідові та унітарні простори. Ортонормований базис.

Знаковизначені півторалінійні функціонали. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Метод ортонормування системи векторів Грама-Шмідта. Ортогональне доповнення, ортогональна проекція на підпростір.

Тема 5.2. Спряжені та самоспряжені оператори.

Спряжені та самоспряжені оператори. Властивості власних чисел та векторів самоспряжених операторів, спектральний розклад.

Тема 5.3. Квадратичні форми та їх приведення до канонічного вигляду унітарним перетворенням. Зведення рівнянь кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду.

РОЗДІЛ 6 Норма лінійного оператора в нормованих просторах.

Тема 6.1. Норми лінійного оператора.

Тема 6.2. Функції від лінійного оператора.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова:

1. О. О. Калюжний, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін, Ю. А. Чаповський. Конспект лекцій з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» [Електронний ресурс - <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/27818>] : навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз», освітніх програм «Системний аналіз і управління; Системний аналіз фінансового ринку» / КПІ ім. Ігоря Сікорського
2. О. О. Калюжний, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін, Ю. А. Чаповський. Методичні вказівки та завдання до розрахунково-графічної роботи «Векторна алгебра та аналітична геометрія» [Електронний ресурс – <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/27817>] : навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз», освітніх програм «Системний аналіз і управління; Системний аналіз фінансового ринку» / КПІ ім. Ігоря Сікорського
3. Подколзін Г.Б. Методичні вказівки та завдання до розрахунково-графічної роботи „Застосування лінійної алгебри до розв’язання систем лінійних рівнянь та аналізу структури лінійного оператора” з дисципліни „Алгебра та геометрія”
4. Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О. Лінійні простори. – К.: Вища школа, 1971.
5. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – Ч.І. – К.: Вища школа, 1974.
6. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – Ч.ІІ. – К.: Вища школа, 1976. – 384 с.

7. Сенчук Ю. Ф. Лінійна алгебра. Теорія лінійних просторів – Харків, НТУ "ХПІ", 2001. – 200 с.
8. Jurliewicz T., Skoczylas Z. Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory. — Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. — 163 str. — ISBN 83-89020-14-9.
9. Lay D. C. Linear Algebra and its Applications, 3rd updated edition. Addison Wesley, 2005. — 576 pp., ISBN: 0-321-28713-4.
10. Meyer C. D. Matrix analysis and applied linear algebra. — SIAM, 2000. — 718 p. — ISBN 0898714540.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Лінійні відображення. Ізоморфізм лінійних просторів. Алгебра лінійних операторів, зв'язок з алгеброю матриць. .
2	Лінійні та полі лінійні функціонали в просторі з фіксованим базисом. Визначник довільного порядку.
3	Обернена матриця. Ранг матриці. Методи обчислення рангу матриці.
4	Системи лінійних однорідних та неоднорідних рівнянь.
5	Сума та перетин лінійних просторів, Пряма сума лінійних просторів, розклад лінійного простору..
6	Перетворення векторів, ковекторів та матриць при перетворенні координат.
7	Власні числа та вектори лінійного оператора.
8-9	Жорданова нормальна форма матриці лінійного оператора.
10	Знаковизначені півторалінійні функціонали. Нерівність Коші-Буняковського.
11	Скалярний добуток. Метод ортогоналізації та нормування системи векторів з унітарного простору..
12	Ортогональне доповнення, ортогональна проекція на підпростір.
13-14	Спряжені та самоспряжені оператори. Властивості власних чисел та векторів самоспряжених операторів, спектральний розклад..
15-16	Унітарні перетворення. Квадратичні форми та їх приведення до канонічного вигляду унітарним перетворенням. Зведення рівнянь кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду..
17	Скінченновимірні нормовані простори. Норми лінійного оператора в нормованих просторах.
18	Функції від матриць, лінійних операторів.

Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	Лінійні відображення, матриця лінійних операторів. Визначники довільних порядків.
2	Ранг матриці.
3	Системи лінійних рівнянь.
4	Сума та перетин лінійних просторів.
5	Перетворення координат. Матриця лінійного оператора
6	МКР на тему: "Лінійні оператори, матриця лінійного оператора "
7-8	Власні числа та вектори лінійного оператора.
9-10	Жорданова нормальна форма матриці лінійного оператора
11	Евклідові та унітарні простори. Метод ортогоналізації систем векторів.
12	Ортогональне доповнення лінійного підпростору. Ортогональна проекція вектора на підпростір.

13-14	Спряжені та самоспряжені оператори. Діагональна форма матриці самоспряженого оператора.
15	МКР на тему: "Жорданова форма матриці. Евклідові простори. Спряжені оператори."
16	Квадратичні форми та приведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.
17	Норми лінійного оператора.
18	Функції від лінійного оператора.

6. Самостійна робота здобувача вищої освіти

Самостійна робота здобувача в семестрі складається з виконання розрахункової роботи на тему «лінійна алгебра». Зміст розрахункової роботи повністю відповідає темам розділів 1,2,3,4. Тексти цих робіт зберігаються в комп'ютерній мережі кафедри та на електронному кампусі. Розрахункова робота сприяє поглибленому засвоєнню методів розв'язання задач з курсу алгебри та геометрії. Методичні рекомендації до виконання розрахункової роботи, варіанти завдань, термін виконання надає лектор всім групам потоку та зазначає у гугл-класі. Викладачі, які ведуть практичні заняття, у двотижневий термін з призначеної дати здачі студентами робіт, перевіряють роботи та виставляють рейтингові бали. Також студентам пропонуються видається задачі індивідуальної підготовки до мкр. Розв'язки цих задач, потім, розглядаються на консультаціях. Крім того до самостійної роботи слід віднести обов'язковий ретельний розбір студентами лекційного матеріалу, підготовку до контрольних робіт та до семестрового екзамену.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Здобувачі вищої освіти не мають право пропускати лекційні та практичні заняття без поважних причин. На кожному практичному занятті повинні активно залучатися до розв'язання практичних задач. Для цього викладач на кожній лекції повинен приділяти увагу до застосування прочитаних тем в різних галузях науки. Захист розрахункової роботи повинен виявити наскільки здобувач може не тільки абстрактно та логічно мислити, а й аналізувати результат. Усі роботи здобувачів мають прикріплювати в особистому кабінеті гугл-класу. Роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль – екзамен.

1. Семестровий рейтинг з дисципліни «Алгебра та геометрія» складається з рейтингових балів, і не перевищує $R_{\max} = 100$.
2. В семестрі здобувач може набрати 60 балів (див. табл.), відповідно на іспиті – 40 балів.

Таблиця 1. Система рейтингових балів.

№	Контрольний захід	Бали
1.	Модульна контрольна робота (частина 1) "Лінійні оператори, матриця лінійного оператора"	25
2.	Експрес-контроль по всім темам курсу	10
3.	Модульна контрольна робота (частина 2) "Жорданова форма матриці. Евклідові простори. Спряжені оператори."	25

3. Здобувач допускається до іспиту при виконанні умови:
 - поточний рейтинг за семестр складає не нижче 25 балів.

Відповідно сумарної кількості балів, що набрані в семестрі та на іспиті, здобувач отримує оцінку згідно таблиці 2.

Таблиця 2 відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Рейтинг	Оцінка ECTS	Традиційна оцінка
95 - 100	A — відмінно	Відмінно
85 - 94	B — дуже добре	Добре
75 - 84	C — добре	
65 - 74	D — задовільно	Задовільно
60 - 64	E — достатньо	
менше 60 балів	FX — незадовільно	Незадовільно
менше 30 балів	F — не допущено	Не допущено

10. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Теоретичні питання:

1. Зворотний оператор, зворотна матриця. Матриця зворотного оператора.
2. Критерій лінійної незалежності n -вимірних векторів.
3. Матриця оператора переходу від базису до базису,
4. Матриця лінійного оператора в різних базисах, зв'язок.
5. Ядро й образ. Зв'язок розмірностей ядра, образу оператора. Ранг оператора, матриці
6. Метод обвідних мінорів
7. Рішення матричних і лінійних рівнянь, правило Крамера.
8. Однорідні системи рівнянь, фундаментальна система розв'язків.
9. Системи лінійних неоднорідних рівнянь, теорема Кронекера-Капелли. Теорема про структуру загального рішення лінійного неоднорідного рівняння.
10. Сума, перетин, пряма сума лінійних підпросторів. Співвідношення для розмірностей.
11. Інваріантний підпростір, звуження оператора на інваріантний підпростір, структура матриці. Пряма сума операторів.
12. Власні числа й власні вектора матриці, оператора, властивості. Матриця лінійного оператора з n лінійно незалежними власними векторами.
13. Приєднані вектора, лінійна незалежність власного й приєднаних векторів.
14. Випадок одного власного вектора. Існування базису власного й приєданого векторів, матриця оператора в цьому базисі.
15. Теорема Жордана про приведення матриці лінійного оператора до жорданової нормальній форми.
16. Властивості жорданової форми матриці: кількість кліток жордана, зв'язок з власними векторами, кількість кліток Жордана розмірності $K \times K$, єдиність форми Жордана.
17. Евклідові та унітарні простори. Нерівність Коші - Буняковського, норма.
18. Ортонормовані системи, властивості. Ортонормований базис, процес ортогоналізації Грама-Шмидта.
19. Ортогональне доповнення, властивості, розкладання простору в ортогональну суму.
20. Ортопрєкція, ортогональна складова. Розклад вектора по довільному базису в евклідовому (унітарному) просторі, матриця Грама. Розклад Фур'є.
21. Ізоморфізм евклідових (унітарних) просторів.
22. Об'єм в n -мірному просторі, матриця Грама, визначник Грама.
23. Теорема Рисса (для лінійних функціоналів), спряжений простір.

24. Теорема Рисса (для півторалінійних функціоналів).
25. Спряжений оператор, властивості.
26. Матриця оператора та його спряженого.
27. Розкладання евклідового (унітарного) простору в пряму суму ядра оператора й образа спряженого.
28. Самоспряжений оператор, власні числа, вектора: властивості.
29. Спектральне розкладання самоспряженого оператора.
30. Комплексифікація лінійного простору. Власні вектора, власні числа s/c оператора в дійсному евклідовому просторі.
31. Унітарні оператори, властивості: зв'язок базисів, зворотний оператор до унітарного, унітарність спряженого.
32. Квадратичні форми, зв'язок з півторалінійними (білінійними) функціоналами й операторами, зв'язок із симетричними операторами.
33. Зведення квадратичної форми до канонічного виду.
34. Позитивна визначеність квадратичних форм і операторів, критерій Сильвестра.
35. Зведення кривих і поверхонь другого порядку до канонічного виду.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено доцент кафедри математичних методів системного аналізу, к.ф.-м.н. Подколзін Гліб Борисович

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол №13 від 05.06.2024)

Погоджено Методичною комісією ІПСА (протокол № 10 від 24.06.2024)