

ВИКОРИСТАННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ХРОМАТИЧНОГО ЧИСЛА

Виконала:

Студентка 4 курсу групи КА-53

Ревуцька Людмила

Науковий керівник:

доцент кафедри ММСА, к.ф.-м.н. Стусь О.В.

- **Об'єкт дослідження:** хроматичне число для різних класів графів.
- **Предмет дослідження:** методи спектральної теорії графів.
- **Мета роботи:**
проаналізувати методи спектральної теорії графів для знаходження хроматичного числа або оцінки його верхніх та нижніх границь для різних класів графів та скласти алгоритм для розрахунку оцінок хроматичного числа і реалізувати на його основі програмний код.

Спектральна теорія графів – напрямок в теорії графів, що вивчає властивості графів, характеристичних многочленів, власних векторів і власних значень матриць, пов'язаних з графом, таких, як його матриця суміжності або матриця Кірхгофа. Цей напрям виник в 1950 – 1960 роках.

Найменша кількість кольорів, яка необхідна для розфарбування графа G , називається **хроматичним числом** і зазвичай позначається $X(G)$.

Визначення точного хроматичного числа для різних класів графів

Дводольний граф	$X(G) = 2$
Повний граф	p_-, p_0, p_+ - власні значення графа G . $X(G) \geq \frac{n}{p_0 + \min(p_+, p_-)}$. Рівність досягається, наприклад, для повних графів.
Регулярний граф степеня $r = n - 3$	$(-1)^n (\lambda + n - 2)^{-1} (\lambda - 2) * (-\lambda - 1) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - 2)^{m_2} (\lambda + 2)^{m_{-2}} \varphi(\lambda)$, $\varphi(2) \neq 0$ і $\varphi(-2) \neq 0$. Тоді $X(G) = \frac{1}{2} (n + m_2 - m_{-2} + a_3)$
Зв'язний регулярний граф (теорема Фінка)	G – зв'язний регулярний граф степені r з n вершинами, де $n - r$ – парне число, і p_λ – кратність власного значення λ в P -спектрі графа G . Тоді $X(G) = r + \min \left(p_{r-n} + 1, \left[\frac{p_0}{n-r-1} \right] + p_2 + \left[\frac{p_{-1}}{3} \right] \right) - (n - r) p_{r-n}$

Теорема для пошуку верхньої оцінки хроматичного числа

Верхня оцінка за максимальним власним значенням (теорема Уїлфа)

r – індекс, який дорівнює максимальному власному значенню зв'язного графа.
 $\chi(G) \leq r + 1$

Верхня межа для хроматичного числа повного графа

$$\chi(G) \leq 1 + \sqrt{2m \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Верхня оцінка кількістю ребер

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Верхня оцінка за теоремою Брукса

$G(V, E)$ – довільний зв'язний неорієнтований граф з максимальним степенем $\Delta(G)$ – $\chi(G) \leq \Delta(G)$, коли $G(V, E)$ – кліка або непарний цикл
 $\chi(G) = \Delta(G) + 1$

Верхня оцінка кількістю ребер і кількістю вершин (верхня оцінка Геллера)

$G(V, E)$ – довільний зв'язний неорієнтований граф з n вершинами і m ребрами. Тоді $\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leq \chi(G)$

Теоремаи для пошуку нижньої оцінки хроматичного числа

Нижня оцінка за найбільшим і найменшим власним значенням (теорема Хоффмана)

r ($r \neq 0$) і q – найбільше і найменше власні значення графа G , то

$$\chi(G) \geq \frac{r}{-q} + 1$$

Теорема Цветковича

G – граф з n вершинами, індексом r і хроматичним числом $\chi(G)$, то

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n - r}$$

Нижня оцінка за максимальним розміром незалежної множини

$G(V, E)$ – довільний зв'язний неорієнтований граф з n вершинами. Тоді

$$n/\alpha \leq \chi(G)$$

Приклад роботи програмного продукту

1. Дводольний граф

1.1 Введення матриці суміжності

```
0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0
[[0. 0. 0. 1. 1. 1.]
 [0. 0. 0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 1. 1.]
 [1. 0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 1. 0. 0. 0.]
 [1. 0. 1. 0. 0. 0.]]
```

1.2 Обчислення власних чисел та векторів

Given matrix has such eigenvalues and eigenvectors:

```
Eigenvalue:
-1.931851652578134
Eigenvector:
[ 0.58247519  0.15607376  0.42640143 -0.30151134 -0.30151134 -0.52223297]
```

```
Eigenvalue:
1.9318516525781368
Eigenvector:
[-0.58247519 -0.15607376 -0.42640143 -0.30151134 -0.30151134 -0.52223297]
```

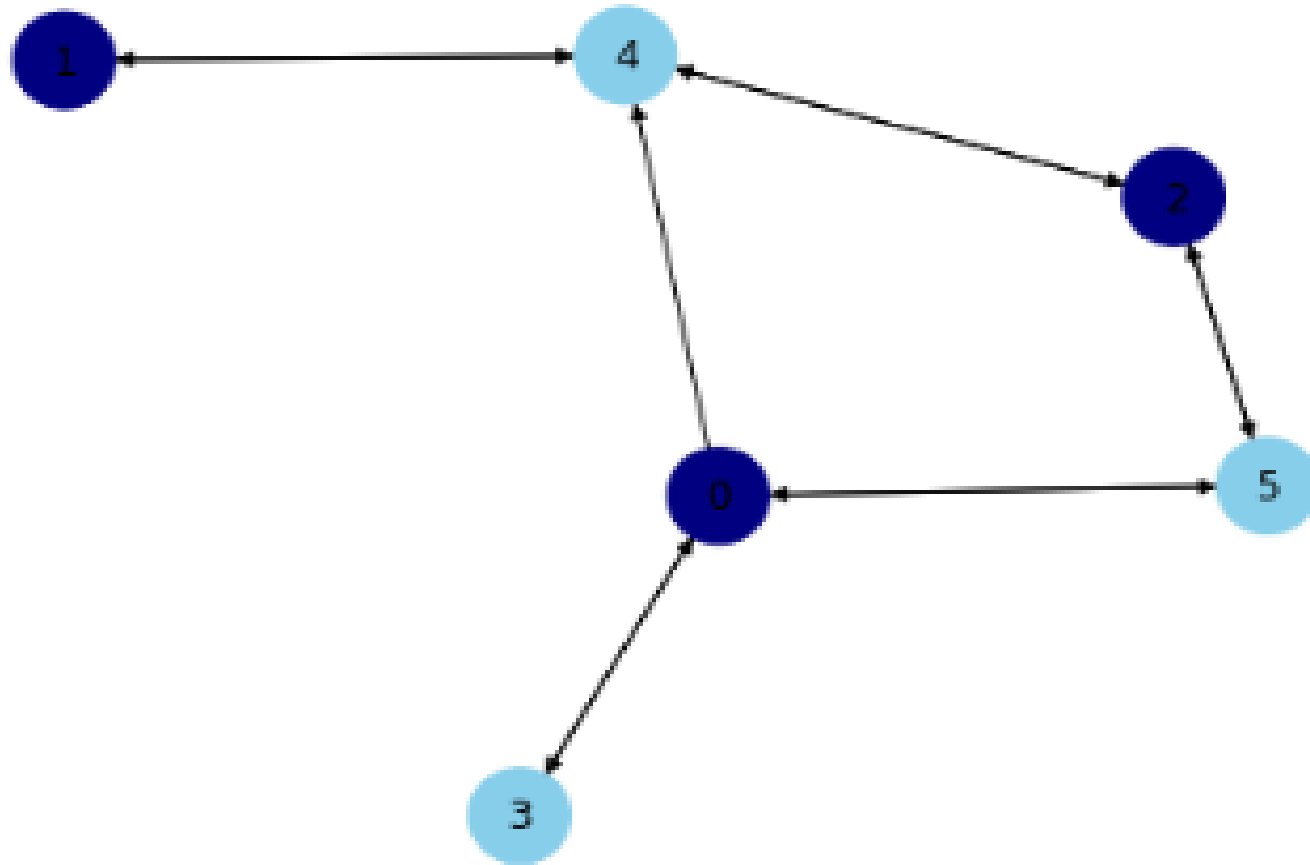
```
Eigenvalue:
-0.9999999999999996
Eigenvector:
[ 4.47213595e-01 -4.47213595e-01  6.25784112e-16 -4.47213595e-01
 4.47213595e-01 -4.47213595e-01]
```

```
Eigenvalue:
-0.5176380902050411
Eigenvector:
[ 0.15607376  0.58247519 -0.42640143 -0.30151134 -0.30151134  0.52223297]
```

```
Eigenvalue:
1.0000000000000001
Eigenvector:
[ 4.47213595e-01 -4.47213595e-01  2.69724919e-16  4.47213595e-01
 -4.47213595e-01  4.47213595e-01]
```

```
Eigenvalue:
0.5176380902050415
Eigenvector:
[-0.15607376 -0.58247519  0.42640143 -0.30151134 -0.30151134  0.52223297]
```

1.3 Виведення правильно розфарбованого графа та точного значення хроматичного числа



Exact Chromatic Number:

2

1.4 Обчислення верхніх та нижніх оцінок хроматичного числа

Upper Limits:

Upper Limit From Maximum Of Eigenvalues:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 2.931851652578138

Upper Limit From Dimensions:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 5.281744192888377

Upper Limit From Edges Quantity:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 5.216990566028302

Upper Limit From Brux Theorema:

This function took 0.01099085807800293 seconds to execute.

Limit is 3

Upper Limit From Heller Lemma:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 2.5714285714285716

Lower Limits:

Lower Limit From Maximum And Minimum Of Eigenvalues:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 2.0000000000000018

Lower Limit From Regularity Index

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 1.3846153846153848

Lower Limit From Maximum Independent Set Size:

This function took 0.0019981861114501953 seconds to execute.

Limit is 1.2

2. Повний граф

2.1 Введення матриці суміжності

```
0 1 1 1 1 1
1 0 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1
1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 0 1
1 1 1 1 1 0
[[0. 1. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 0. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 0. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 1. 0. 1. 1.]
 [1. 1. 1. 1. 0. 1.]
 [1. 1. 1. 1. 1. 0.]]
```

2.2 Обчислення власних чисел та векторів

Given matrix has such eigenvalues and eigenvectors:

Eigenvalue:

-1.0

Eigenvector:

[-0.91287093 0.18257419 0.18257419 0.18257419 0.18257419 0.18257419]

Eigenvalue:

5.0

Eigenvector:

[0.40824829 0.40824829 0.40824829 0.40824829 0.40824829 0.40824829]

Eigenvalue:

-1.0

Eigenvector:

[-0.09779559 0.90883893 -0.20276083 -0.20276083 -0.20276083 -0.20276083]

Eigenvalue:

-1.0

Eigenvector:

[3.64918457e-17 -4.74666155e-17 -5.00000000e-01 8.33333333e-01
-1.66666667e-01 -1.66666667e-01]

Eigenvalue:

-1.0

Eigenvector:

[3.64918457e-17 -4.74666155e-17 -5.00000000e-01 -1.66666667e-01
8.33333333e-01 -1.66666667e-01]

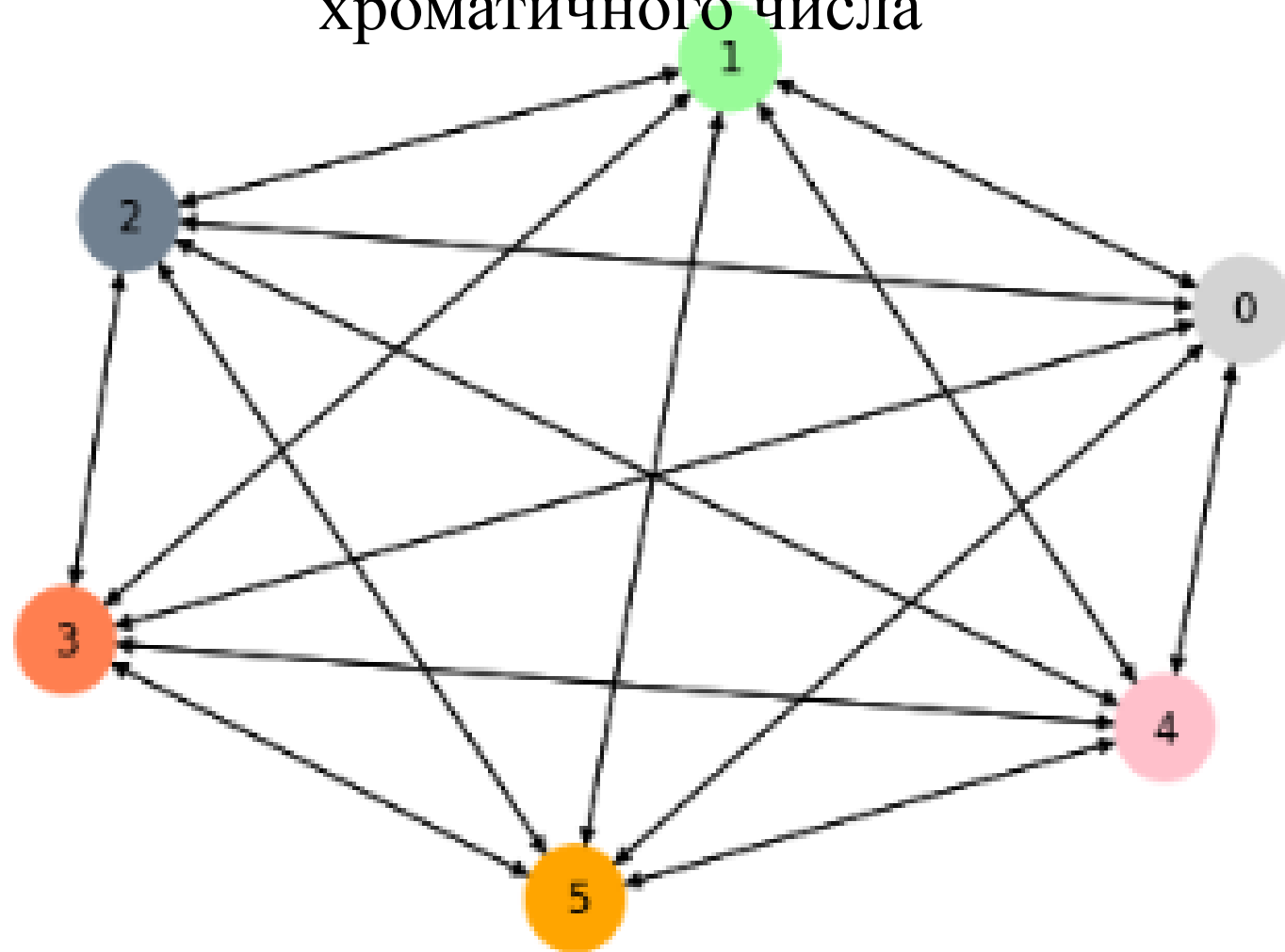
Eigenvalue:

-1.0

Eigenvector:

[3.64918457e-17 -4.74666155e-17 -5.00000000e-01 -1.66666667e-01
-1.66666667e-01 8.33333333e-01]

2.3 Виведення правильно розфарбованого графа та точного значення хроматичного числа



Exact Chromatic Number:
6.0

2.4 Обчислення верхніх та нижніх оцінок хроматичного числа

Upper Limit From Maximum Of Eigenvalues:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is 6.0

Upper Limit From Dimensions:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is 8.071067811865476

Upper Limit From Edges Quantity:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is 8.262087348130013

Upper Limit From Brux Theorema:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is 6

Upper Limit From Heller Lemma:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is -1.5

Lower Limit From Maximum And Minimum Of Eigenvalues:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is 6.0

Lower Limit From Regularity Index

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.
Limit is 6.0

Lower Limit From Maximum Independent Set Size:

This function took 0.0019969940185546875 seconds to execute.
Limit is 1.2

3. Граф, який не належить до жодного класу

3.1 Введення матриці суміжності

```
0 1 1 1 1
1 0 1 1 1
1 1 0 0 1
1 1 0 0 1
1 1 1 1 0
[[0. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 0. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 0. 0. 1.]
 [1. 1. 0. 0. 1.]
 [1. 1. 1. 1. 0.]]
```

3.2 Обчислення власних чисел та векторів

Given matrix has such eigenvalues and eigenvectors:

Eigenvalue:

3.64575131106459

Eigenvector:

[0.47922932 0.47922932 0.39434614 0.39434614 0.47922932]

Eigenvalue:

-1.0000000000000007

Eigenvector:

[8.16496581e-01 -4.08248290e-01 -5.05854502e-16 -5.06721863e-16 -4.08248290e-01]

Eigenvalue:

-1.6457513110645903

Eigenvector:

[0.32198228 0.32198228 -0.58693366 -0.58693366 0.32198228]

Eigenvalue:

0.0

Eigenvector:

[-1.30841038e-17 4.00459955e-17 -7.07106781e-01 7.07106781e-01 1.22904198e-17]

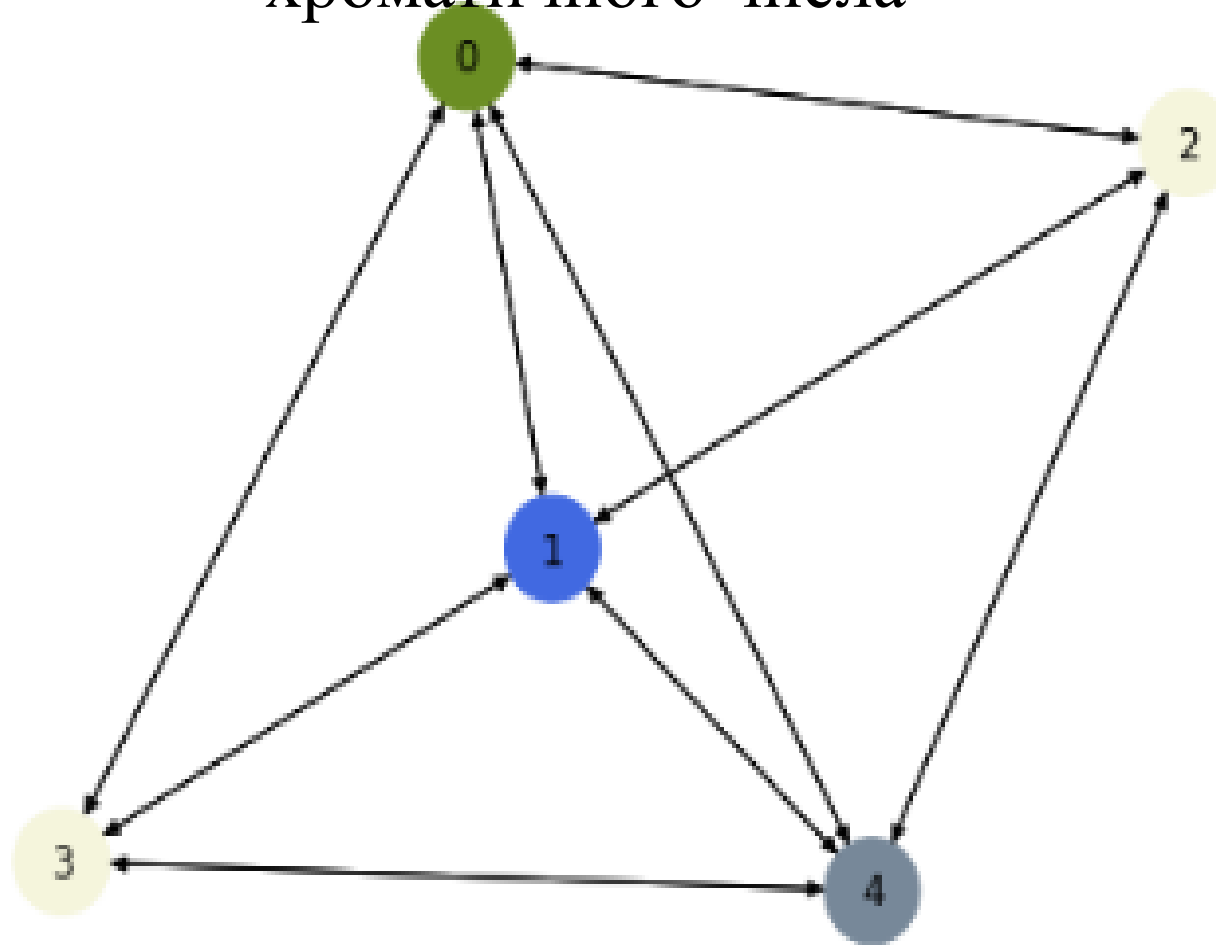
Eigenvalue:

-1.0

Eigenvector:

[1.35584079e-01 -7.65081591e-01 2.13775490e-17 -1.51258330e-17 6.29497511e-01]

3.3 Виведення правильно розфарбованого графа та точного значення хроматичного числа



Exact Chromatic Number:

None

3.4 Обчислення верхніх та нижніх оцінок хроматичного числа

Upper Limits:

Upper Limit From Maximum Of Eigenvalues:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 4.64575131106459

Upper Limit From Dimensions:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 6.366563145999495

Upper Limit From Edges Quantity:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 6.520797289396148

Upper Limit From Brux Theorema:

This function took 0.026983022689819336 seconds to execute.

Limit is 5

Upper Limit From Heller Lemma:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is -2.2727272727273

Lower Limits:

Lower Limit From Maximum And Minimum Of Eigenvalues:

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 3.2152504370215302

Lower Limit From Regularity Index

This function took less than 10^{-16} seconds to execute.

Limit is 3.5714285714285716

Lower Limit From Maximum Independent Set Size:

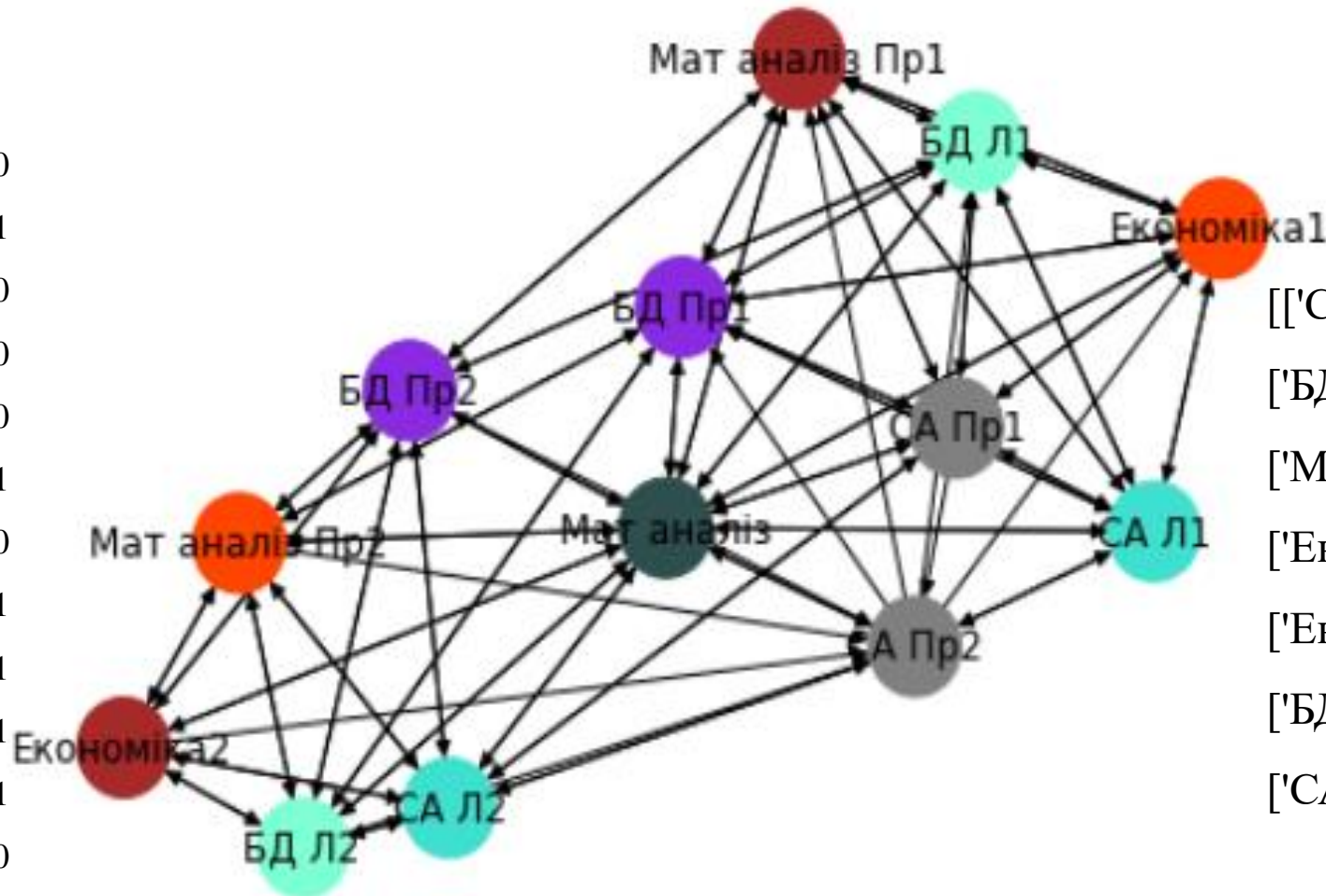
This function took 0.0009987354278564453 seconds to execute.

Limit is 1.25

Практичне застосування: складання розкладу

```
0011101010110  
0011010101101  
1101101010110  
1101101010110  
1010001010110  
0101000101101  
1010100011110  
0101010011101  
1010101100111  
0101011100111  
1111111111011  
1010101011100  
0101010111100
```

Складання матриці
суміжності



Розфарбування графа

['СА Л1', 'СА Л2'],
['БД Л1', 'БД Л2'],
['Мат аналіз'],
['Економіка2', 'Мат аналіз Пр1'],
['Економіка1', 'Мат аналіз Пр2'],
['БД Пр1', 'БД Пр2'],
['СА Пр1', 'СА Пр2']

Результати

Висновки

- Дипломна робота присвячена аналізу методів спектральної теорії графів, складанню алгоритму для розрахунку верхніх та нижніх оцінок хроматичного числа для різних класів графів та реалізації програмного коду.
- За допомогою методів спектральної теорії графів проведено аналіз розрахунку верхніх та нижніх оцінок хроматичного числа для різних класів графів.
- Новизною даної роботи є програмний код для розрахунку хроматичного числа або оцінки його верхніх та нижніх границь для різних класів графів з використанням спектральної теорії графів, а також розроблено програмний продукт, який спрощує процес складання навчального розкладу.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!