Метод композиції для моделювання систем з розподіленими параметрами

Виконав:
студент IV курсу, групи КА-51
Маркевич Ігор Сергійович

Керівник:
професор кафедри ММСА, д.ф.-м.н.
Бондаренко Віктор Григорович

Об’єкт дослідження:

- методи моделювання систем з розподіленими параметрами

Предмет дослідження:

- альтернативні методи моделювання систем з розподіленими параметрами

Мета роботи:

- проаналізувати особливості моделювання систем з розподіленими параметрами, запропонувати альтернативний метод моделювання таких систем, порівняти його з “класичними” методами.

Актуальність обраної теми:

Використання алгоритмів моделювання систем з розподіленими параметрами має надзвичайно велике значення, оскільки всі реальні системи можна розглядати як системи з розподіленими параметрами, де параметрами виступатимуть щільність, пружність і інші характеристики, які від точки до точки змінюються неперервно.

Можливість запропонувати новий метод є дуже важливою, оскільки нові методи потенційно дозволяють обійти певні обмеження існуючих методів.

Базові поняття

Системи з розподіленими параметрами - системи, що складаються з елементів, безперервно розподілених в кінцевих областях простору, так що рухи, що відбуваються в них передаються від одного елемента до іншого і не можуть бути ідеалізовані як рух об'єктів (мас, полів і т. п.) з фіксованою внутр. структурою. Всі реальні системи можна розглядати як системи з розподіленими параметрами, де параметрами виступатимуть щільність, пружність і інші характеристики, які від точки до точки змінюються неперервно.

Існуюче рішення:

$$\frac{dr}{dt} = f(r),\ r(0,a) = a,\ r(t,a) = G_t a\ ,\ (1)$$

G_t—фазовий потік.

Характеристикою об'єкта з розподіленими параметрами є векторна функція $u(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$, де x — просторова змінна, $x \in R^d$. Постулюється (строге обґрунтування, як правило, відсутнє), що перехід від зосереджених до розподілених параметрів призводить до математичної моделі у вигляді системи напівлінійних параболічних рівнянь (система реакція-дифузія):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_i u_i + f_i(u),\ u = (u_1, \ldots, u_N),\ u(0,x) = \varphi(x)\ ,\ x \in R^d\ \ (2)$$

де L_i — еліптичний оператор другого порядку:

$$L_i = \sum_{j,k} a_{i,jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_{i,k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}\ ,$$

Розглянемо модель “хижак-жертва”

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\,(1-u)$$

з початковою умовою:

$$u\,(0,x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Алгоритм методу композиції:

1) $r(t) = \frac{ae^t}{1-a+ae^t}$ Ця функція є розв'язком задачі Коші

$\frac{dr}{dt} = r(1-r)$ з початковою умовою $r(0) = a$.

2) $q_f(t,x)$ – рішення задачі Коші $\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$ з початковою умовою

$q_f(0,x) = f(x)$.

Відома формула:

$$q_f(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, exp\left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} dy$$

3) $u(t,x)$ – розв'язок задачі Коші $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$ з початковою

умовою: $u(0,x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

Часова змінна $t \in [0; 1]$. Розіб'ємо цей відрізок точками $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$ і побудуємо рекурентним чином деякі функції. Спочатку покладемо початкову умову $f_1(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$ і позначимо відповідне рішення задачі Коші 2) $q_1(t, x)$. Перша з нових функцій

$$v_1(x) = q_1\left(\frac{1}{n}, x\right) \quad \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 - q_1(\frac{1}{n}, x) + q_1(\frac{1}{n}, x)\, e^{\frac{1}{n}}}$$

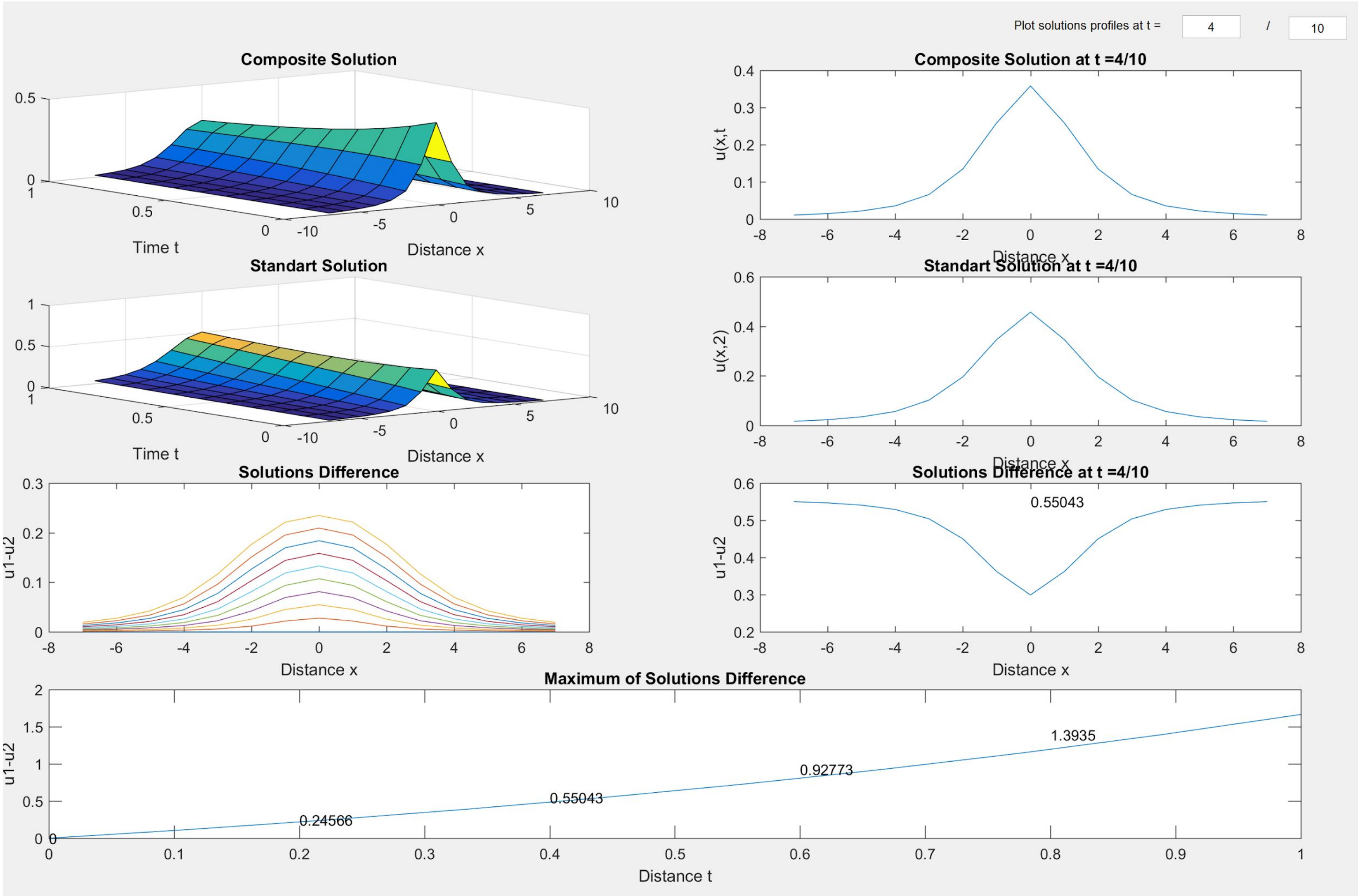
тобто в вираз для $r(t)$ замість a підставляємо $q_1\left(\frac{1}{n}, x\right)$, а замість t підставимо $\frac{1}{n}$

Тепер вважаємо для рівняння 2) початковою умовою $f_2(x) = v_1(x)$ та знаходимо рішення цієї задачі Коші для $t = \frac{1}{n}$. Позначимо це рішення $q_2\left(\frac{1}{n}, x\right)$. Потім покладемо

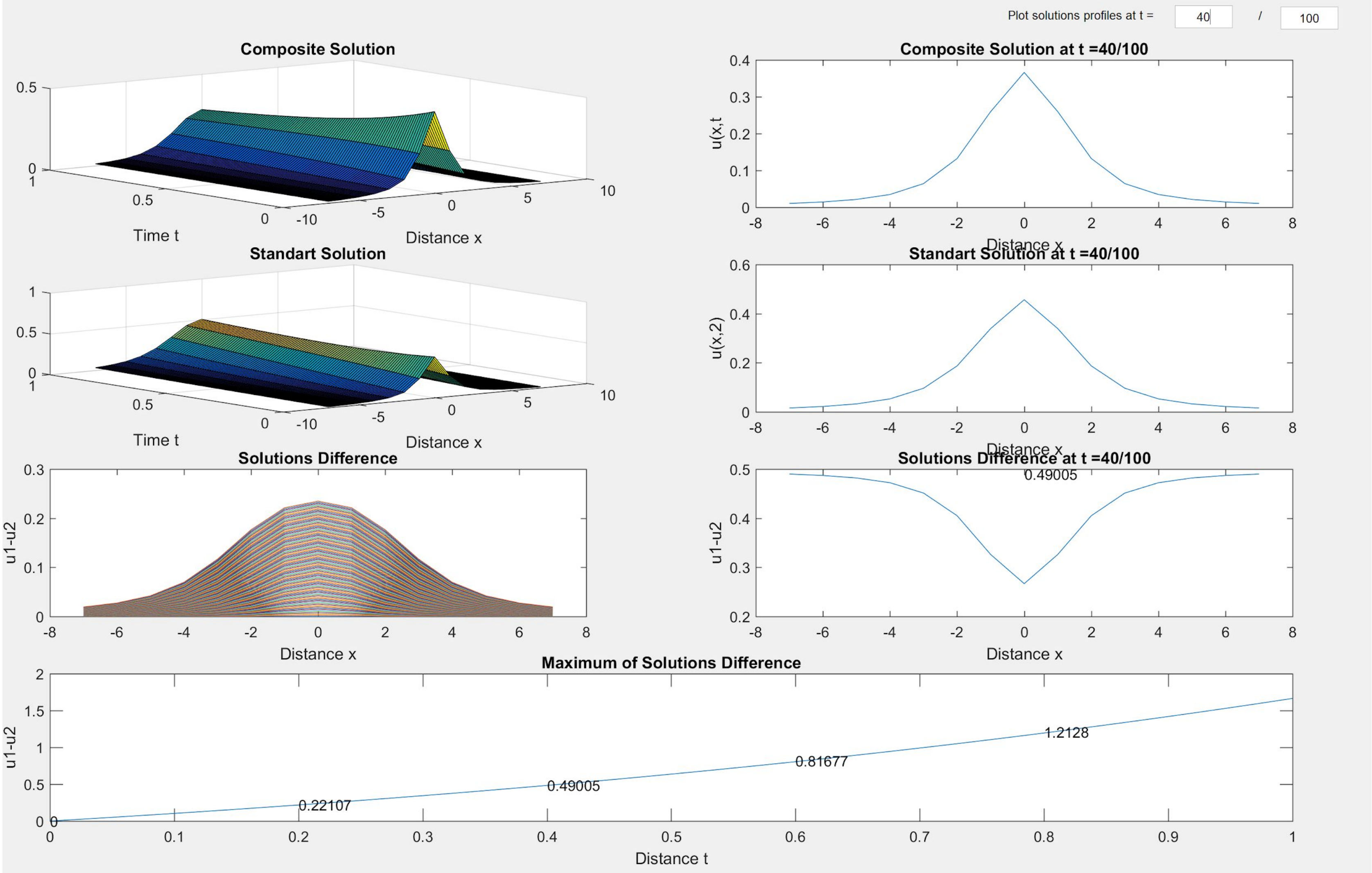
$$v_2(x) = q_2\left(\frac{1}{n}, x\right) \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 - q_2(\frac{1}{n}, x) + q_2(\frac{1}{n}, x)\, e^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{і т.д.}$$

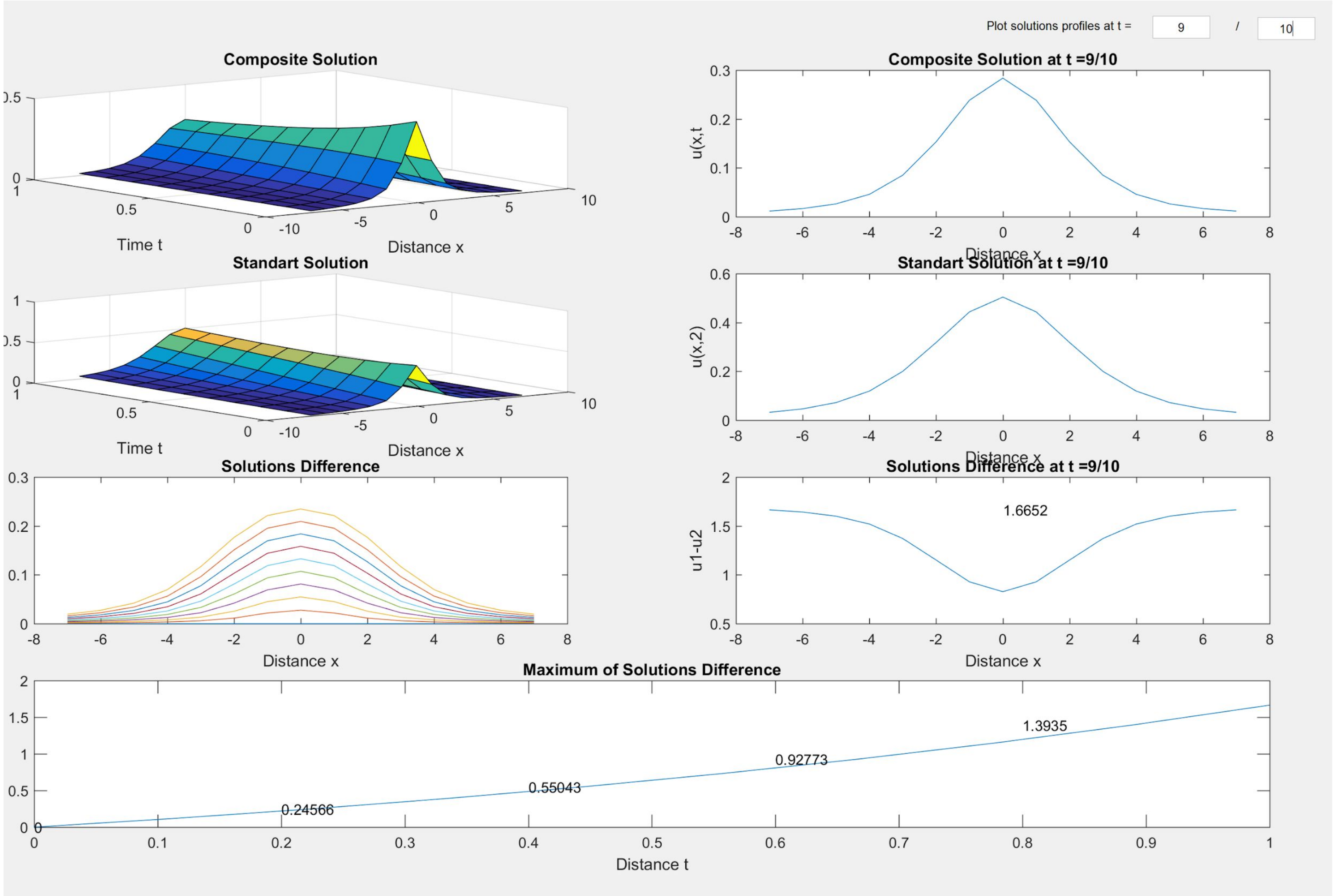
тобто знаючи $v_k(x)$, оголошуємо його початковою умовою для рівняння 2) і позначаємо $q_{k+1}\left(\frac{1}{n}, x\right)$ рішення 2) при $t = \frac{1}{n}$. Тоді

$$v_{k+1}(x) = q_{k+1}\left(\frac{1}{n}, x\right) \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 - q_{k+1}(\frac{1}{n}, x) + q_{k+1}(\frac{1}{n}, x)\, e^{\frac{1}{n}}} \qquad k \le n - 1.$$

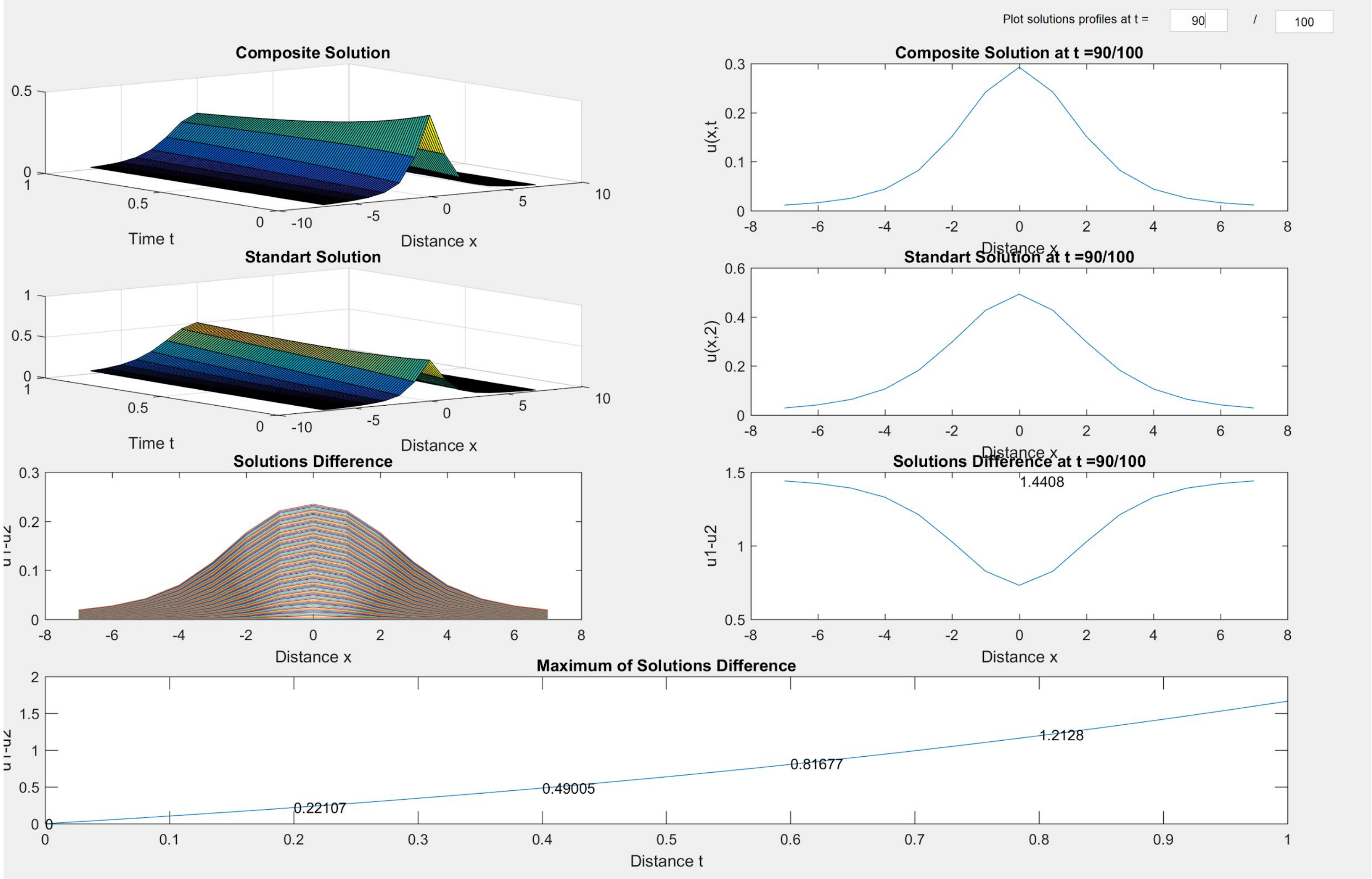


Plot solutions profiles at t = 4 / 10
Composite Solution
Time t
Distance x
Composite Solution at t =4/10
u(x,t
Distance x
Standart Solution
Time t
Distance x
Standart Solution at t =4/10
u(x,2)
Distance x
Solutions Difference
u1-u2
Distance x
Solutions Difference at t =4/10
0.55043
u1-u2
Distance x
Maximum of Solutions Difference
u1-u2
0
0.24566
0.55043
0.92773
1.3935
Distance t


Plot solutions profiles at t = 40 / 100
Composite Solution
Time t
Distance x
Standart Solution
Time t
Distance x
Solutions Difference
u1-u2
Distance x
Composite Solution at t =40/100
u(x,t
Distance x
Standart Solution at t =40/100
u(x,2)
Distance x
Solutions Difference at t =40/100
0.49005
u1-u2
Distance x
Maximum of Solutions Difference
u1-u2
0
0.22107
0.49005
0.81677
1.2128
Distance t



Plot solutions profiles at t = 9 / 10
Composite Solution
Time t
Distance x
Standart Solution
Time t
Distance x
Solutions Difference
Distance x
Composite Solution at t =9/10
u(x,t)
Distance x
Standart Solution at t =9/10
u(x,2)
Distance x
Solutions Difference at t =9/10
u1-u2
1.6652
Distance x
Maximum of Solutions Difference
0
0.24566
0.55043
0.92773
1.3935
Distance t



Plot solutions profiles at t = 90 / 100
Composite Solution
Time t
Distance x
Composite Solution at t =90/100
u(x,t)
Distance x
Standart Solution
Time t
Distance x
Standart Solution at t =90/100
u(x,2)
Distance x
Solutions Difference
u1-u2
Distance x
Solutions Difference at t =90/100
1.4408
u1-u2
Distance x
Maximum of Solutions Difference
u1-u2
0
0.22107
0.49005
0.81677
1.2128
Distance t

Аналіз результатів:

Проаналізувавши отримані результати, можно зробити наступні висновки:

1. Похибка між результатами цих методів збільшується з лінійною швидкістю з віддаленням від нуля по *t*.
2. Результати методів найближчі один до одного при x=0. Це можна пояснити характером моделюємої системи - за розглядаємий проміжок часу.
3. Зі зменшенням інтервалів, на які розбивається часовий відрізок, різниця між результатами цих методів зменшується.

Висновки:

Був розроблений новітній алгоритм, що дозволяє вирішувати задачі моделювання систем з розподіленими параметрами, витрачаючи при цьому менше комп'ютерного часу. При великій кількості точок розбиття результати цього методу наближаються до результатів, що отримано традиційним методом. Цей метод дозволяє вирішувати ресурсоємні задачі з тією самою точністю, але витрачаючи менше пам'яті і процесорного часу.

Перспективи подальшого дослідження

Оскільки завдяки цьому методу можна розв’язувати ресурсоємні задачі з меншим використанням комп’ютерного часу, це і встановлює напрям подальшого дослідження - **запровадження цього методу для вирішення ресурсоємних задач з використанням меншого об’єму комп’ютерного часу**.

Дякую за увагу!