МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Методи розв’язання багатовимірних задач квадратичного програмування. Лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування. Квадратичний симплекс-метод

Виконали студенти групи КА-51

Корнійчук Анна

Корнійчук Оксана

Науковий керівник

к. ф.-м. н., доцент Яковлева А. П.

Актуальність роботи

- Задача квадратичного програмування є однією із базових задач, що виникають у різних проблемних сферах, зокрема в економіці при розподіленні ресурсів, фінансів, вкладів тощо, як допоміжна задача в математиці (наприклад, у методі лінеаризації), у машинному навчанні, робототехніці, статистиці. Саме тому вибір оптимального методу для її розв’язку є важливим. Тому для їх розв’язання важливо обрати зрозумілий і швидкий метод.

Мета дослідження

Мета роботи:

- розгляд методів розв’язання задач квадратичного програмування;
- перевірка можливості застосування даного лінійного методу для розв’язання задач квадратичного програмування та його ефективності;
- аналіз ефективності застосування квадратичного симплексного методу;
- порівняння квадратичного симплекс-методу і лінійного методу.

Об’єкт та предмет дослідження

- Об’єкт дослідження:

метод лінійного розв’язання задачі квадратичного програмування, квадратичний симплекс-метод та їх застосування для знаходження рішення конкретних задач.

- Предмет дослідження:

задача квадратичного програмування, методи її розв’язання, застосування квадратичного симплекс-методу для розв’язання задачі квадратичного програмування, лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування.

Постановка задачі

1. Розглянути основні особливості задачі квадратичного програмування.

2. Визначити сфери її виникнення та застосування, навести приклади.

3. Зробити огляд методів вирішення задач квадратичного програмування, зокрема:

   – лінійний метод

   – квадратичний симплекс-метод

4. Програмно реалізувати лінійний метод і квадратичний симплекс-метод. Дослідити їх ефективність у вирішенні задач квадратичного програмування, порівняти їх.

5. Показати роботу цих методів на прикладах.

Задача квадратичного програмування

$$\frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) \to min\ ,$$

при обмеженнях

$$f_i(x) = \left(c^i, x\right) - d_i \leq 0\ , i \in I^-,$$
$$f_i(x) = \left(c^i, x\right) - d_i = 0\ , i \in I^0,$$

$$x \in X^0 = \left\{x \middle| x_i \geq 0,\ i = \overrightarrow{1, n}\right\},$$

де $I^- = \{1, \dots, m\}$,

$I^0 = \{m+1, \dots, m+p\}$,

A – симетрична додатно визначена матриця розмірності n x n,

вектор $b \in R^n$.

Метод спряжених градієнтів

x^0 - початкове наближення, що задовольняє всі обмеження задачі;

p^0 - напрямок антиградієнта;

x^1 - знайдений мінімум вздовж напрямку p^0.

Нехай на k-тому кроці знаходимось у точці x^k. Знаходимо:

p^k - напрямок пошуку

α^k - довжину кроку

точку мінімуму $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$.

Пошук припиняємо, коли виконується задана умова виходу.

Метод розв’язання задач квадратичного програмування з булевими змінними

- Нехай вектор $\overrightarrow{x_0} = (x_1,\ x_2, \dots, x_n), x_i = \{0, 1\}, \forall\, i = \overrightarrow{1, n}$ – один із розв’язків задачі, не обов’язково оптимальний;
- нульовий вектор – $\overrightarrow{x^0} = (0, 0, \dots, 0)$, $x_i = 0, \forall\, i = \overrightarrow{1, n}$;
- ранг (Rang) – число, що має кожен вектор, вказує на те, який x_i потрібно змінювати під час наступного аналізу вектора, Rang = *i;*
- поточний максимум ($F_м$) - максимальне значення функціоналу, досягнуте на даний момент.
- зберегти в стек – зберегти даний вектор з його рангом;
- вилучити із стеку – вилучити із стеку вектор та присвоїти його поточному;
- (P_o) - оптимістичний та (P_G) - гарантований прогнози відповідно;

Метод розв’язання задач квадратичного програмування з булевими змінними

- $\vec{x} = \overrightarrow{x^0}$, Rang = 1, $F_м = P_G$, $\overrightarrow{x_{опт}} = \vec{x}$
- $x_{Rang} = 1$ => якщо $P_G > F_м$, то $F_м = P_G$, $\overrightarrow{x_{опт}} = \vec{x}$
- $P_0 = (P_0 - P_G)\,\varepsilon_{огр}$ => якщо $P_0 > F_м$, то зберігаємо в стек вектор з рангом Rang = Rang + 1
- стек порожній або Rang = n => $\overrightarrow{x_{опт}}$ є розв’язком => обчислення закінчено.

Методи штрафних функцій

$$f(x) \to min \qquad (1)$$

в області $G \subseteq E^n$, що задається умовами

$$g^i(x) \leq 0,\ i = \overrightarrow{1,m}. \qquad (2)$$

Введемо числову функцію $p^i(g^i(x))$, що визначена так:

$$p^i\left(g^i(x)\right) = \begin{cases} 0, & \text{коли } g^i(x) \leq 0, \\ +\infty, & \text{коли } g^i(x) > 0. \end{cases}$$

Побудуємо для задач (1)-(2) допоміжну функцію - функцію штрафу :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} p^i\left(g^i(x)\right),\quad x \in E^n.$$

Поставимо у відповідність до початкової задачі (1), (2) задачу безумовної оптимізації:

$$\varphi(x,r) = f(x) + rP(x) \to min, \qquad (3)$$

де r –керуючий параметр ($r > 0$), на основі якого реалізується вплив штрафу.

Методи штрафних функцій

- Мінімізація функції $\varphi(x, r)$ еквівалентна розв'язуванню задачі (1), (2).
- Безумовна оптимізаційна задача (3) з розривною цільовою функцією заміняється послідовністю безумовних оптимізаційних задач, що залежать від параметра – коефіцієнта штрафу виду (3).
- Усі методи штрафних функцій умовно можна поділити на два види: методи зовнішніх і внутрішніх штрафів. Відмінність між ними - у правилах побудови штрафної функції.
- Методи зовнішніх штрафів доцільно використовувати у випадку, коли область допустимих планів G задачі (1)-(2) не містить внутрішніх точок, наприклад, коли серед обмежень є обмеження-рівності.
- У методах внутрішнього штрафу спеціально побудована штрафна функція призводить до виникнення сильних бар'єрів уздовж межі області G, що перешкоджає виходу за межі G загальної послідовності точок.

Лінійний розв'язок задачі квадратичного програмування

Нехай дана задача квадратичного програмування з цільовою функцією n змінних і замкнутою областю обмежень з m лінійних нерівностей:

$$z(X) = X^T AX + BX \rightarrow max$$

$$CX \geq D; X \geq 0,$$

де X = $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор змінних;

A - матриця квадратичної форми розмірності $n \times n$;

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ – вектор лінійної форми;

$D = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$ – вектор констант обмежень;

C – матриця коефіцієнтів обмежень розмірністю $m \times n$.

Лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування

Точка розв'язання безумовної задачі максимізації

$$X^* = -A^{-1}B^T/2$$

знаходиться поза областю обмежень.

В наслідок заміни змінних $X = SWY$, де S – матриця ортогонального перетворення, W – масштабуюча діагональна матриця,

та ряду інших перетворень отримаємо задачу:

$$z(Y) = \sum \left(y_i - \frac{p_i}{2}\right)^2 \rightarrow min, i \in [1, n]$$

$$GY \geq Q,$$

Лінійний розв’язок задачі квадратичного програмування

- Знаходимо всі видимі з точки безумовного екстремуму Y^* вершини => обираємо найближчу до Y^* вершину - V.
- Опускаємо перпендикуляр від точки Y^* до всіх граней, а згодом ребер, що містять вершину V.
- Як тільки знайдеться точка, яка задовольняє всім заданим обмеженням і лежить на перпендикулярі, що опускається на грань від точки Y^*, вона і буде розв’язком задачі.
- Якщо після вивчення всіх граней така точка не знайдена, то рішенням є вершина V.

Приклад роботи програми. Вхідні дані

Підприємство виробляє два види продукції і використовує для цього три види продукції. Максимізувати загальний прибуток, якщо ціна реалізації одиниці продукції виду 1 становить 20 ум. од., виду 2 – 18 ум. од., витрати на виробництво пропорційні квадрату кількості виготовленої продукції. Витрати ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції та їх загальний обсяг задані.

$$f(x, y) = 20x - x^2 + 18y - y^2 \rightarrow \max$$

за умов:

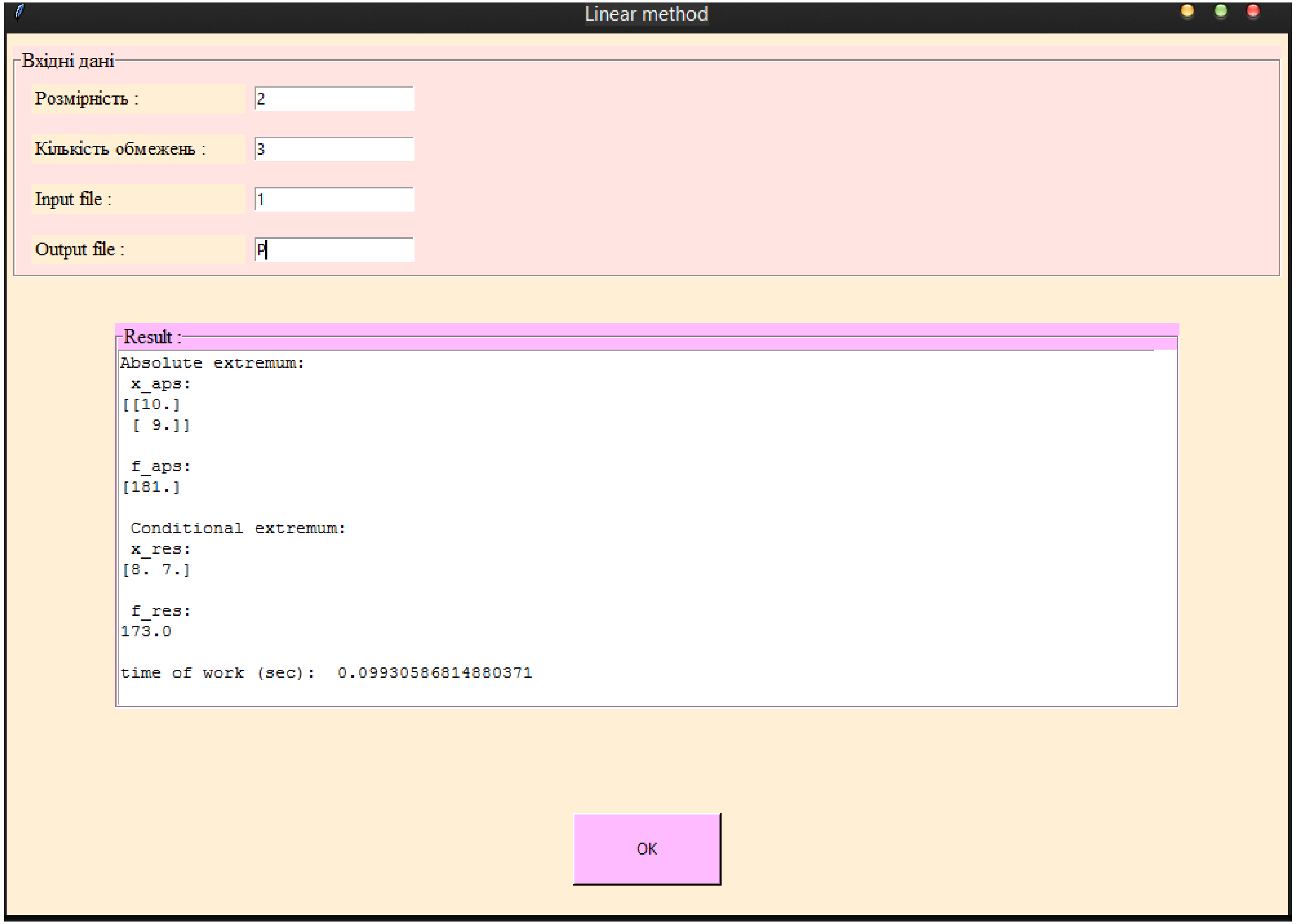
$$x + 3y \leq 30$$

$$x + y \leq 15$$

$$5x + 2y \leq 60$$

$$x, y \geq 0$$

Приклад роботи програми. Отримані результати



Квадратичний симплекс-метод

Маємо опуклу задачу:

$$f(x) = (Dx, x) + (c, x) \rightarrow max, \qquad (4)$$

$$Ax \leq b, \qquad (5)$$

$$x \in X^0 = \{x | x_j \geq 0, j = \overrightarrow{1, n}\}. \qquad (6)$$

Функція Лагранжа цієї задачі має вигляд:

$$L(x, \lambda) = (Dx, x) + (c, x) - (\lambda, Ax - b),\ \ \lambda \geq 0. \qquad (7)$$

Квадратичний симплекс-метод

Необхідні та достатні умови оптимальності:

- вектор $x \geq 0$ є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування т. і т. т., коли існують такі m-вимірні вектори $\lambda \geq 0$, $v \geq 0$ та n-вимірний вектор u, які задовольняють систему

$$\begin{cases} 2Dx + c - A'\lambda + u = 0, & (8) \\ b - Ax - v = 0, & (9) \\ (x, u) = 0, & (10) \\ (\lambda, v) = 0. & (11) \end{cases}$$

Квадратичний симплекс-метод

- Розв'язок системи (8)-(11) знайдемо за допомогою методу штучних змінних
- Перепишемо систему і введемо штучні змінні $z = (z_1, \dots, z_n), y = (y_1, \dots, y_m)$ в умови. Вибираючи їх знаки відповідно до знаків вільних членів $(-c)$ та b, складемо псевдоцільову функцію

$$-M \sum_{j=1}^{n} z_j - M \sum_{i=1}^{m} y_i \to max \qquad (13)$$

за умов

$$2Dx - A'\lambda + u + z = -c, \qquad (14)$$

$$Ax + v + y = b. \qquad (15)$$

- Розв'язуючи задачу (13) - (15), виводимо з базису всі штучні змінні та вводимо x, λ, u, v. Якщо знайдений допустимий базисний розв'язок x^0, λ^0, u^0, v^0 задовольняє умови $(x^0, u^0) = 0$, $(\lambda^0, v^0) = 0$, то він і буде оптимальним.

Відмінності від симплекс-методу

- Підмножина базисних змінних $basis$ може містити більше, ніж m змінних, де m – кількість обмежень. У цьому випадку їх значення не визначаються однозначно.
- Проте x^*_{basis} буде оптимальним розв'язком задачі:

$$c^T_{basis}x_{basis} + x^T_{basis}D_{basis}x_{basis} \to min$$
$$A_{basis}x_{basis} = b$$

- Множина $basis$ визначає базисний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ця задача має єдиний оптимальний розв'язок $x^*_{basis} > 0$, який є також допустимим для початкової квадратичної задачі.
- Максимальний розмір базису визначається за наступною формулою:

$$|basis| \leq m + rank(D)$$

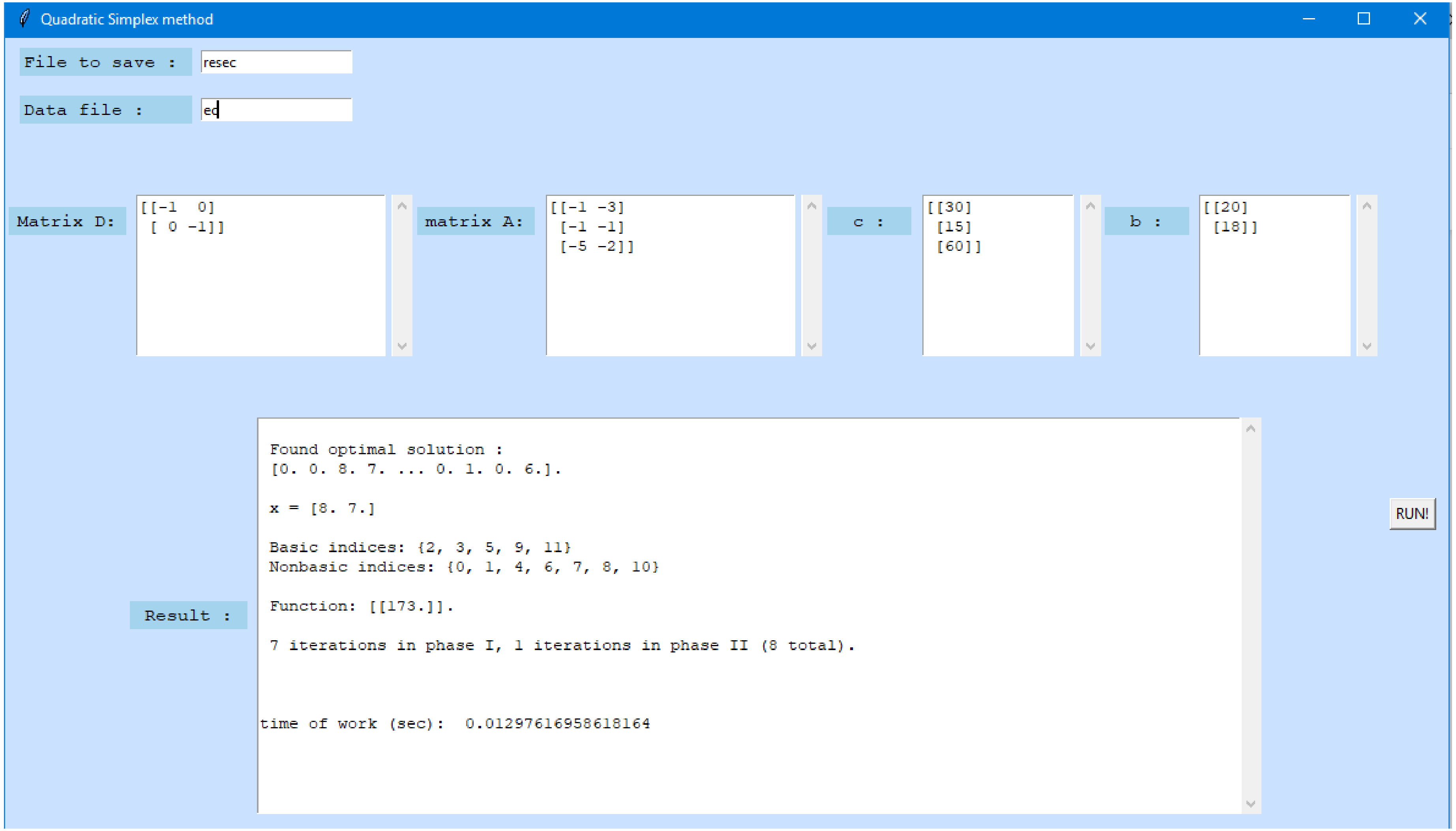
Відмінності від симплекс-методу

- У квадратичному симплекс-методі може статися так, що змінна входить до базису, але немає змінної, яка виходить із нього, тож базис збільшується. Це можливо, якщо цільова функція досягає локального мінімуму (коли збільшена вхідна змінна), до того, як якась інша базисна змінна зменшується до нуля.
- Може навіть статися так, що навіть якщо змінна для виходу із базису знайдена, розв’язок у цій точці не є базисним. В такому випадку вибір змінних продовжується, і більше змінних може вийти із базису, поки інший базисний розв’язок не буде знайдено.

Особливості реалізації

- Двох фазний симплекс-метод для вибору початкової допустимої точки для подальшого застосування симплекс-методу.
- Вибір небазисної змінної, яка увійде у базис реалізовано за правилом Бленда. Це правило дає змогу вирішувати задачі лінійної оптимізації без зациклення.

Квадратичний симплекс-метод. Приклад роботи програми



Квадратичний симплекс-метод

Отже,

- Було розроблено зрозумілий і простий інтерфейс програми;
- хоча квадратичний симплекс-метод потребує введення додаткових змінних, для задач невеликої розмірності він працює швидко (в середньому 0.009 с);
- завдяки введенню умови додаткової нежорсткості у більшості випадків розв’язок задачі знаходиться іще у першій фазі сиплекс – методу;
- серед розглянутих прикладів двовимірних задач квадратичного програмування розв’язок знаходиться в середньому за 7 ітерацій.

Порівняння методів

Методи\критерії	К-ть змінних	К-ть обмежень	Час роботи (сек)
Лін. метод	2	5	0,16143035
Квадр. сим.-мет.			0,02319143
Лін. метод	2	1	0.01257963
Квадр. сим.-мет			0.00798082352
Лін. метод	2	1	0.00987453
Квадр. сим.-мет			0.0079915524
Лін. метод	2	2	0.008999976
Квадр. сим.-мет			0.0089943409

Порівняння методів

- Для задач квадратичного програмування невеликої розмірності і декількома обмеженнями квадратичний симплекс-метод знаходить розв’язок швидше, ніж лінійний метод.
- Для великих розмірностей суттєва кількість додаткових змінних у квадратичному симплекс-методі, а також необхідність перевірки умов доповнюючої нежорсткості може значно сповільнити роботу програми. Для таких задач лінійний метод працюватиме швидше.
- Лінійний метод незастосовний для задач, матриця коефіцієнтів цільової функції якої має детермінант нуль, на відміну від квадратичного симплекс-методу.
- Лінійний метод недоцільно використовувати для задач, у яких глобальний екстремум співпадає із локальним.

Висновки

- Розглянуто задачу квадратичного програмування та її особливості;
- Розглянуто сфери її застосування та деякі формалізовані приклади;
- Розглянуто, як класичні, так і нові методи вирішення задач квадратичного програмування;
- Реалізовано новий лінійний метод розв’язку квадратичних задач;
- Реалізовано квадратичний симплекс-метод розв’язку квадратичних задач;
- Розроблено зручні інтерфейси для даних програм;
- Досліджено працездатність та ефективність цих методів, виявлено їх недоліки і переваги.

Перспективи для подальших досліджень

В подальшому доцільно

- провести порівняння ефективності та швидкості квадратичного симплекс-методу та лінійного методу із ще кількома методами та розробити рекомендації щодо доцільності їх використання залежно від поставленої задачі;
- дослідити роботу цих методів для задач великих розмірностей при значній кількості обмежень.

ДЯКУЄМО ЗА УВАГУ!