Модель часового ряду на основі фрактального броунівського руху

Виконав:
Студент 4-го курсу групи КА-51
Братусь Олександр

Науковий керівник:
професор кафедри ММСА, д.ф.-м.н. Бондаренко В. Г.

- **Об’єкт дослідження:**

  нелінійні нестаціонарні процеси зі стаціонарними приростами

- **Предмет дослідження:**
  математична модель часового ряду

- **Мета роботи:**
  дослідити запропоновану модель часового ряду, обґрунтувати доцільність її застосування в зазначених випадках, довести ефективність досліджуваної моделі, в тому числі експериментальним шляхом

Актуальність обраної теми

Моделювання часових рядів є невід’ємним процесом у більшості галузей діяльності людини. Випадкові процеси будь-якого походження (економічні, фінансові, природні тощо) можуть бути проаналізовані з можливістю подальшої апроксимації певною моделлю задля можливості робити короткострокові та довгострокові прогнози.

Варіанти побудови моделі

- Використовуючи існуючі (класичні) моделі

  (ARMA, ARIMA, GARCH тощо)

- Обравши відомий випадковий процес, побудувати відображення

Неперервна математична модель

$$x(t) = \Phi\big(X(\cdot)\big)(t)$$

- де $\xi(t)$ – випадковий процес з відомими характеристиками;
- $X(t)$ – певна реалізація процесу $\xi(t)$;
- Φ – оборотне перетворення в $C(0; T)$.

- $P\{N(t) = k\} = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^k}{k!}$
- $S(t + dt) - S(t) = S(t)\big(\xi(t + dt) - \xi(t)\big) + \mu(t)S(t)dt$
- $S(t) = S(0)\exp\left\{\sigma w(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}$

Фрактальний броунівський рух

$$B_H(t),\ \ 0 < H < 1$$

- $E\,B_H(t) = 0$
- $B_H(0) = 0$
- $R(t,s) = E\,B_H(t)B_H(s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$
- $D\,B_H(t) = t^{2H}$
- $B_H(t) - B_H(s) \sim B_H(t-s) \sim N(0, (t-s)^{2H})$

Пам’ять фрактального броунівського руху

- $H < \frac{1}{2}$ - прирости утворюють послідовність з короткою пам’яттю – антиперсистентний процес fBm;
- $H > \frac{1}{2}$ - прирости утворюють послідовність з довгою пам’яттю – персистентний процес fBm (сильна післядія);
- при $H = \frac{1}{2}$ фрактальний броунівський рух є вінерівським процесом.

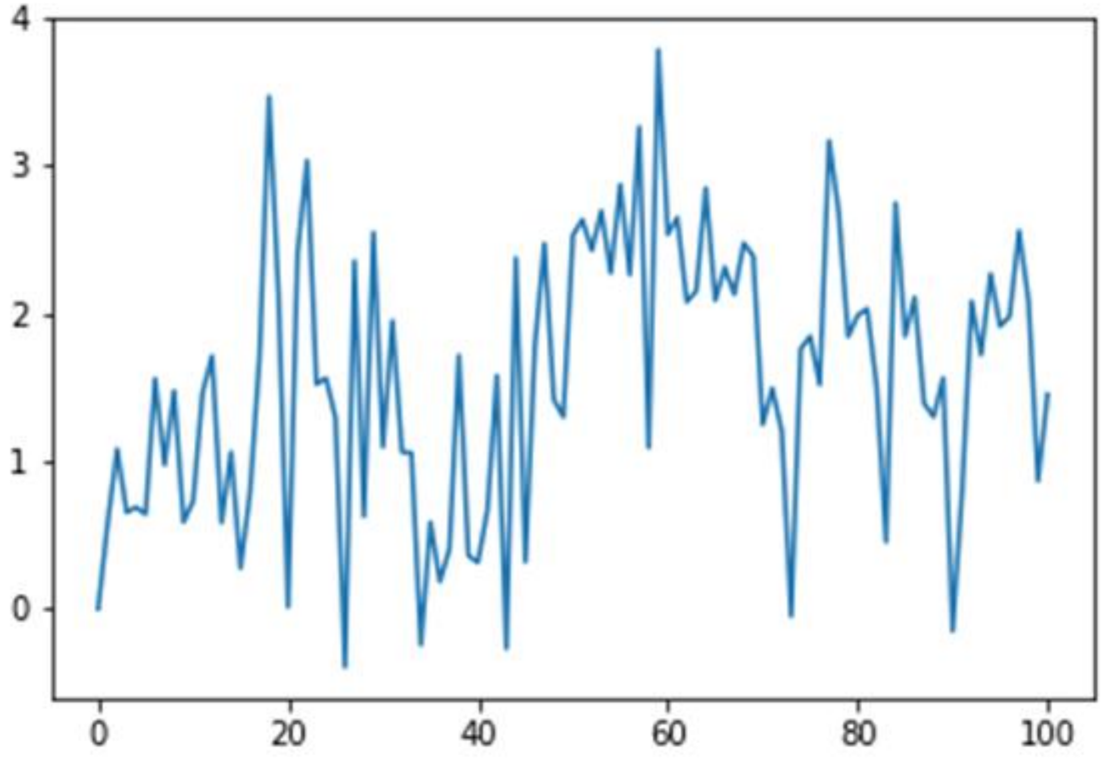


Рис. 1.1 Графік $B_H(t), H = 0{,}1$.

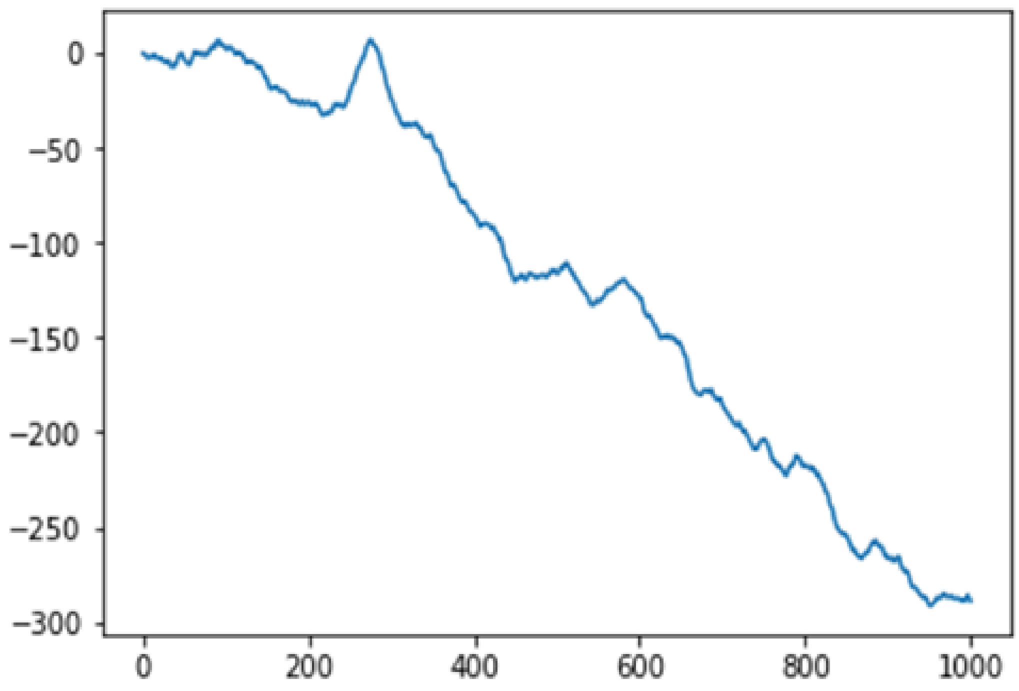


Рис. 1.2 Графік $B_H(t), H = 0{,}9$.

Гранична теорема для сум незалежних випадкових величин

Для статистик:

$$R_{jn} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |y_k|^j, \text{ де } j \text{ – натуральне,}$$

доведена наступна теорема:

$$\frac{R_{jn}}{E\,R_{jn}} \to 1, \quad n \to \infty, \text{ з ймовірністю } 1.$$

Прирости часового ряду

- Покладемо $X(t) = \sigma B_H(t)$.
- Розглянемо прирости:

$$y_k = X\left(\frac{k}{n}\right) - X\left(\frac{k-1}{n}\right) = \sigma\left(B_H\left(\frac{k}{n}\right) - B_H\left(\frac{k-1}{n}\right)\right), k = 1,2,..,n.$$

- $\{y_k\}$ утворюють гаусівську стаціонарну послідовність.

Оцінка параметрів

- $\hat{H}_n = \dfrac{\ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma}{R_{1n}}\right)}{\ln n}$
- $\hat{\sigma}_{1n} = n^H \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{1n}$
- Статистика $n^{2H-1}(S^{-1}y, y)$ є незміщеною оцінкою параметра σ^2
- $\hat{\sigma}_{2n} = \sqrt{n^{2H-1}(S^{-1}y, y)}$ - консистентна оцінка параметра σ
- $\dfrac{\hat{\sigma}_{2n}}{\hat{\sigma}_{1n}} = \dfrac{0{,}8}{R_{1n}}\sqrt{\dfrac{(S^{-1}y,y)}{n}} \approx 1,$ тобто $\left|\dfrac{\hat{\sigma}_{2n}}{\hat{\sigma}_{1n}} - 1\right| \to \min$
- $\hat{\sigma} = \dfrac{\hat{\sigma}_{1n} + \hat{\sigma}_{2n}}{2}$

Прогноз фрактального броунівського руху

- $\hat{\xi}_{m+j} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} s_{m+j,k} a^{ki} \xi_i\,, \quad j = 1, .., n - m$
- $\xi_k = y_k = B_H\left(\frac{k}{n}\right) - B_H\left(\frac{k-1}{n}\right)$
- $\hat{y}_{m+j} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{(m+j-k+1)^{2H} + (m+j-k-1)^{2H}}{2} - (m + j - k)^{2H}\right) a^{ki} y_i\,,$

  $j = 1, .., r, \quad r = m - n.$
- $\delta_j = \left|\frac{\hat{y}_{m+j} - y_{m+j}}{y_{m+j}}\right|$

Апроксимація часового ряду

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_k = 0$
- $y_k = x_k - x_{k-1}, \ k = 2, .., n$
- $d = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}$
- $z_k = \operatorname{sgn} y_k |y_k|^{\frac{1}{\lambda}} = \operatorname{sgn} y_k |z_k|^{\lambda}, \ \lambda > 0$
- $z_k = \sigma^H \left(B_H\left(\frac{k}{n}\right) - B_H\left(\frac{k-1}{n}\right)\right), \ \ x_k = \sigma^{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sgn} y_j \cdot \left|B_H\left(\frac{j}{n}\right) - B_H\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|^{\lambda}$

Перевірка апроксимації

- $A_n = \frac{1}{n}\sum v_k {z_k}^3,\ H\epsilon\left(0;\frac{1}{2}\right);$
- $B_n = \frac{1}{n^{1+H}}\sum {v_k}^2 {z_k}^3,\ H\epsilon\left(0;\frac{1}{2}\right);$
- $C_n = \frac{1}{n}\sum {v_k}^2\left(\frac{{z_k}^2}{c} - 1\right),\ H\epsilon\left(0;\frac{1}{4}\right);$
- $D_n = \frac{1}{n^{2H}}\sum v_k {z_k}^3,\ H\epsilon\left(\frac{1}{2};1\right);$
- $F_n = \frac{1}{n^H}\sum v_k {z_k}^3,\ H\epsilon\left(0;\frac{1}{2}\right).$

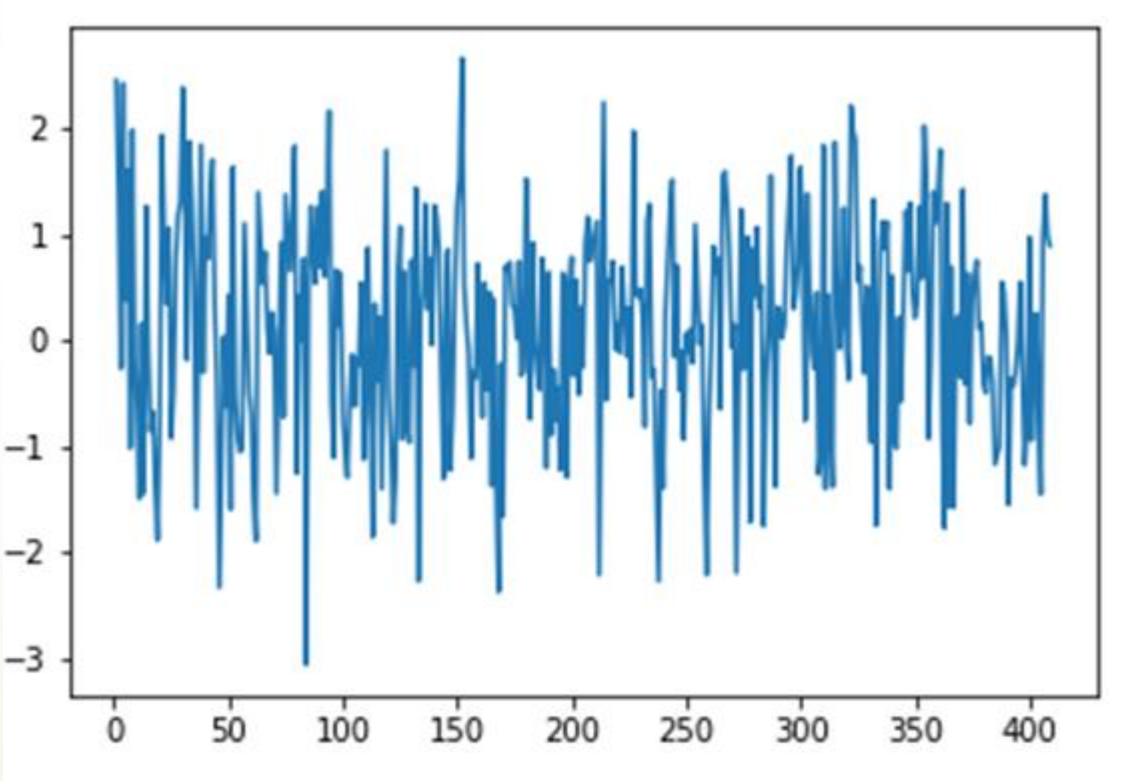
$$A_n \to -\frac{3}{2}c^2;\quad B_n \to 3c^{\frac{5}{2}}\eta;\quad C_n \to \frac{c}{2};\quad D_n \to \frac{3}{2}c^2B^2(1);\quad F_n \to 3c^{\frac{3}{2}}B(1).$$

Приклад роботи програмного продукту

Часовий ряд, що характеризує осциляції хвиль у Північній Атлантиці, і який охоплює часовий проміжок 10.1980 – 10.2014

$\hat{\rho}_1 = 0,44 - 0,49$
$d_n = 0,62$
$\lambda = 1,04$
$\hat{H} = 0,1 \ (Q = 0,94)$
$\hat{\sigma} = 158,57$

$A_n = -3,96; \ A = -4,03$
$B_n = 8,88 < \beta_1 = 11,24$



Приклад роботи програмного продукту

Набір даних, який показує вміст вуглекислого газу в атмосфері в період з березня 1958 по червень 2016

$\hat{\rho}_1 = 0{,}73 - 0{,}77$

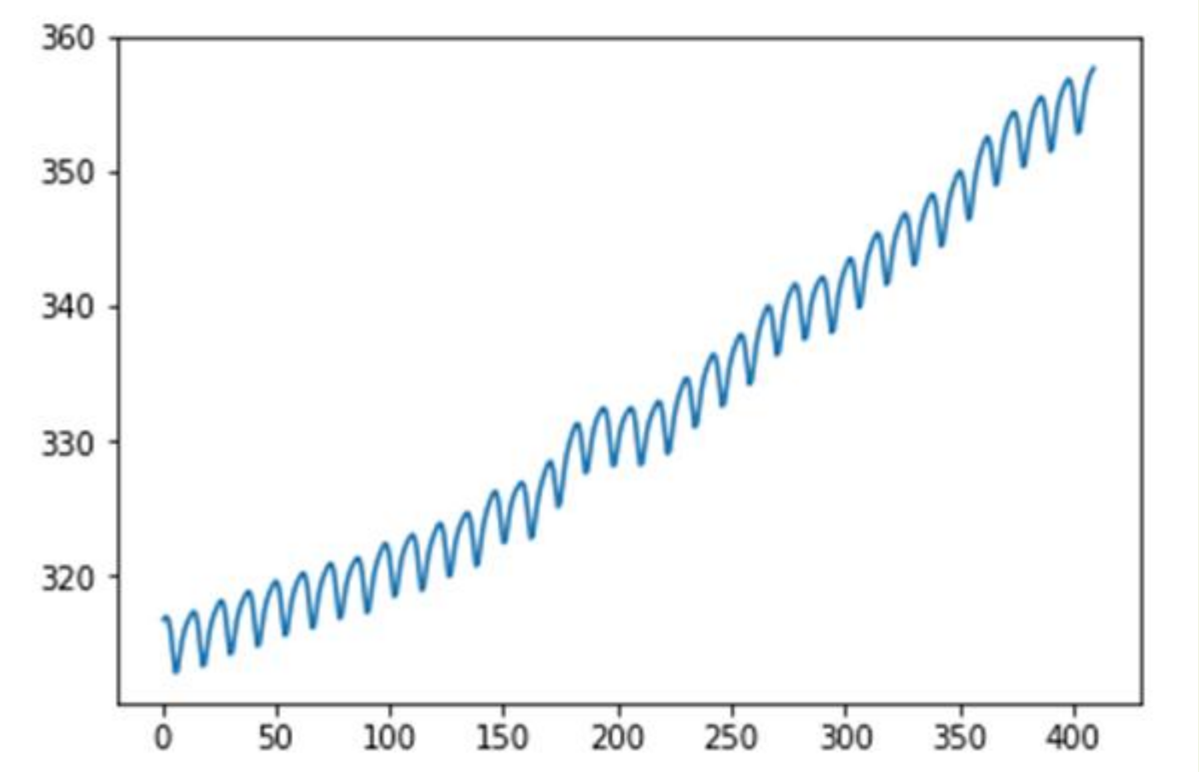
$d_n = 0{,}71$

$\lambda = 0{,}81$

$\widehat{H} = 0{,}8 \ (Q = 0{,}99)$

$\widehat{\sigma} = 181{,}91$

$D_n = 1{,}1 < \beta_2 = 4{,}08$



Приклад роботи програмного продукту

Набір даних, який показує вміст вуглекислого газу в атмосфері в період з березня 1958 по червень 2016

Прогнозування:

$$\delta_k = \frac{|\hat{s}_{m+k} - s_{m+k}|}{s_{m+k}}, \quad k = 1,2,3,4$$

m	k=1	k=2	k=3	k=4
200	0,003	0,004	0,002	0,003
400	0,0006	0,002	0,005	0,005
600	0,001	0,006	0,01	0,01

Висновки

- Дипломна робота присвячена аналізу, побудові та використанню математичної моделі часового ряду, в основі якої лежить процес фрактального броунівського руху.
- Постановлено, що дана фрактальна модель має непогану прогнозовану здатність, зберігає інтерпретованість, подібно до класичних моделей.
- Створено програмний додаток, який дозволяє побудувати модель та здійснити прогноз на нових даних. Перевірка додатку показала, що запропонована модель на основі фрактального броунівського руху є конкурентоспроможною по обчислювальній потужності.

Майбутні дослідження

- Підвищення швидкодії при роботі з масивними об’ємами даних
- Створення багатокрокових прогнозів
- Проведення порівняльного аналізу з іншими моделями в даній предметній області

Дякую за увагу!