Квантизація групи рухів тривимірного простору за допомогою конструкції подвійного схрещеного добутку

.

студент групи КА-61м

Михайловський В.В.

Попередні відомості

Розвиток теорії квантових груп привів до зв’язку теорії з багатьма, на перший погляд, далекими областями математики та фізики. Так, в математиці квантові групи мають тісні зв’язки зі спеціальними функціями, інвариантами вузлів та тривимірних многовидів, теорією представлень, операторними алгебрами, некоммутативною геометрією та комбінаторикою. У фізиці мають місце зв’язки з методом квантової оберненої задачі розсіювання, теорією інтегрованих моделей, фізикою елементарних часток, конформною та квантовою теорією поля та ін.

Попередні відомості

Квантова група є алгеброю фон Неймана (*M*) із додатковою операцією

$$\Delta : M \to M \otimes M$$

А також двома мірами φ та ψ, що задовольняють співвідношення

- $\varphi\big((\omega \otimes \iota)\Delta(x)\big) = \varphi(x)\omega(1)$
- $\psi\big((\iota \otimes \omega)\Delta(x)\big) = \psi(x)\omega(1)$

Особливу цікавість представляють некоммутативні і не кокоммутативні алгебри.

Попередні відомості

Нехай G, G_1, G_2 – групи *Лі* такі, що

- G_1, G_2 – підгрупи G; $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ із діями α, β
- *U*, *V* – відображення з $G_1 \otimes G_1 \otimes G_2$ та $G_1 \otimes G_2 \otimes G_2$ у U(1), що задовольняють:

$$\mathcal{U}(g,h,\alpha_k(s))\,\mathcal{U}(gh,k,s) = \mathcal{U}(h,k,s)\,\mathcal{U}(g,hk,s),$$
$$\mathcal{V}(\beta_s(g),t,r)\,\mathcal{V}(g,s,rt) = \mathcal{V}(g,s,t)\,\mathcal{V}(g,ts,r),$$
$$\mathcal{V}(gh,s,t)\,\bar{\mathcal{U}}(g,h,ts) = \bar{\mathcal{U}}(g,h,s)\,\bar{\mathcal{U}}(\beta_{\alpha_h(s)}(g),\beta_s(h),t)$$
$$\mathcal{V}(g,\alpha_h(s),\alpha_{\beta_s(h)}(t))\,\mathcal{V}(h,s,t)$$

Тоді задавши *W* за формулою

$$\hat{W} = (\beta \otimes \iota \otimes \iota)\big((W_{G_1} \otimes 1)\mathcal{U}^*\big)\,(\iota \otimes \iota \otimes \alpha)\big(\mathcal{V}(1 \otimes \hat{W}_{G_2})\big)$$

Можемо отримати комноження $\Delta(z) = W^*(1 \otimes z)W$

Попередні відомості

Для побудови цих коциклів була отримана точна послідовність

$$\ldots \longrightarrow H^2(K) \xrightarrow{\pi_*^2} H^2(M) \oplus H^2(N) \xrightarrow{\sigma_*}$$

$$\xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{E}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \xrightarrow{\iota_*} H^3(K) \xrightarrow{\pi_*^3} H^3(M) \oplus H^3(N) \longrightarrow \ldots$$

Де *E(M, N)* – група коциклів, а $H^i(K)$ – гомологічні групи

Попередні відомості

Побудова гомологічних груп на алгебрі Лі відбувається за рахунок операторів

$$(d^{n-1}f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x_i}, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_n)$$

$$H^3(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\ d^3 \backslash \mathrm{Im}\ d^2 \qquad H^2(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}\ d^2 \backslash \mathrm{Im}\ d^1$$

Перенесення на групу Лі з алгебри відбувається за формуллю

$$f(k^1, k^2, k^3) = \int_{\sigma(k^1, k^2, k^3)} \omega$$

Опис отриманих результатів

Група рухів еквівалентна групі матриць

$$k = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & b_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & b_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Було обрано наступні підгрупи

$$m = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Опис отриманих результатів

Однопараметричні підгрупи

$$a_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a_3(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} b_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} b_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дифференціюючи в нулі, отримуємо базис у алгебрі Лі

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опис отриманих результатів

Для знаходження когомологічних груп запишемо матриці операторів у базисі індикаторних функцій

$$A_{d^2} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Опис отриманих результатів

$$A_{d^3} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Розв'язуючи відповідні системи лінійних рівняннь, отримуємо, що базисом у когомологіях є

$$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3; \quad b_1 \wedge b_2 \wedge b_3$$

Дякую за увагу!