Ймовірнісні методи дослідження процесів паркування і пакування

студент 6-го курсу
КА-61м, Фатенко Владислав

Інститут прикладного системного аналізу
керівник: к. ф.-м. н., доц. Ільєнко Андрій Борисович

Актуальність роботи

Проблеми послідовного пакування інтервалів, що узагальнюють відому концепцію Альфреда Реньї паркування автомобілів, мають досить широкий спектр застосувань. Деякі з них:

- фізичні структури рідин;
- хімічні моделі адсорбції та абсорбції;
- моделювання систем комунікацій.

Постановка задачі

Мета роботи

Вивчення асимптотичних властивостей узагальненої моделі паркування і пакування Реньї

Об’єкт дослідження

Процеси пакування і паркування Реньї

Предмет дослідження

Асимптотичні властивості певних узагальнень моделі паркування Реньї

Постановка задачі

Узагальнена модель паркування

1. Заданий початковий відрізок довжини x.
2. Задано сімейство розподілів $U_{a,b}$ з такою функцією розподілу $F_U(t)$, що $F_U(a) = 0$ і $F_U(b) = 1$.
3. Допоки існує хоча б один незаповнений інтервал (a_i, b_i) такий, що $b_i - a_i \geq 1$:
    1. З розподілу $U_{a_i, b_i - 1}$ обирається випадкове значення t – позиція лівого краю одиничного інтервалу.
    2. На початковому відрізку інтервал $(t, t+1)$ позначається як заповнена множина.

Постановка задачі

У класичній моделі паркування у якості $U_{a,b}$ виступає рівномірний розподіл на інтервалі (a, b). Пропонується розглянути узагальнену модель, в якій $U_{a,b} = U_p(a, b)$ задається функцією розподілу

$$F_{U_p(a,b)}(t) = p \cdot [t \geq a] + (1 - p) \cdot \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{t-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t > b, \end{cases} \tag{1}$$

де $p \in [0, 1)$ – фіксоване.

Постановка задачі

Досліджується кількість інтервалів $N_p(x)$, розміщених на відрізку в момент сатурації. Цілі дослідження:

- визначення асимптотики $m_p(x) = \mathbb{E}N_p(x)$;
- доведення асимптотичної субквадратичності другого центрального моменту величини $N_p(x)$ на нескінченності;
- виведення закону великих чисел для $\frac{N_p(x)}{x}$;
- розробка та комп'ютерна реалізація алгоритму імітаційного моделювання процесу заповнення паркінгу в одновимірному та двовимірному випадках.

Результати роботи

Інтегральне рівняння для першого моменту

В роботі було виведене інтегральне рівняння зі зсувом для математичного сподівання $m_p(x)$ максимальної кількості автомобілів на паркінгу довжини x.

Теорема 1

У випадку розташування автомобілів за сумішшю рівномірного та детермінованого розподілів (1) *виконується наступне співвідношення:*

$$m_p(x+1) = 1 + pm_p(x) + \frac{2(1-p)}{x} \int\limits_0^x m_p(t)dt, \quad \forall x > 0 \quad (2)$$

Результати роботи

Асимптотична поведінка першого моменту

Було доведено асимптотичну формулу для $m_p(x)$ при $x \to \infty$.

Теорема 2

Перший момент випадкової величини $N_p(x)$ прямує до лінійної функції від довжини парковки x з швидкістю, вищою за поліноміальну:

$$m_p(x) = C_p x - \frac{1 - C_p}{1 - p} + \mathcal{O}(x^{-n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\text{де } C_p = \frac{1}{1-p} \int\limits_0^\infty \exp\left(-2 \int\limits_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)}\, d\tau\right) ds. \tag{4}$$

Результати роботи

Закон великих чисел для рівня заповненості

Було показано, що має місце закон великих чисел для рівня заповненості вихідного відрізку $\frac{N_p(x)}{x}$. Тобто, при достатньо великих розмірах парковки можна практично вважати, що $N_p(x) = C_p x$.

Теорема 3

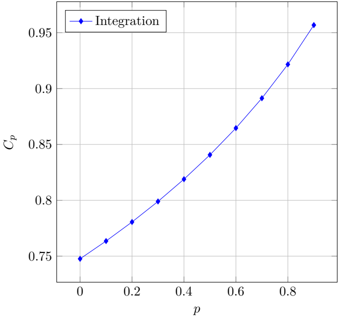
У випадку розташування автомобілів за сумішшю рівномірного та детермінованого розподілів (1) *відношення* $\frac{N_p(x)}{x}$ *стохастично прямує до* C_p *при* $x \to \infty$.

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{N_p(x)}{x} - C_p\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad x \to \infty. \tag{5}$$

Результати роботи

Оцінка константи C_p методом чисельного інтегрування

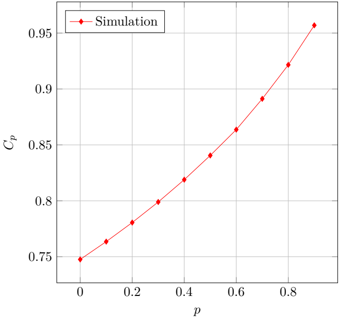
Приблизне значення сталої C_p можна визначити з формули (4) за допомогою чисельної аппроксимації.



Результати роботи

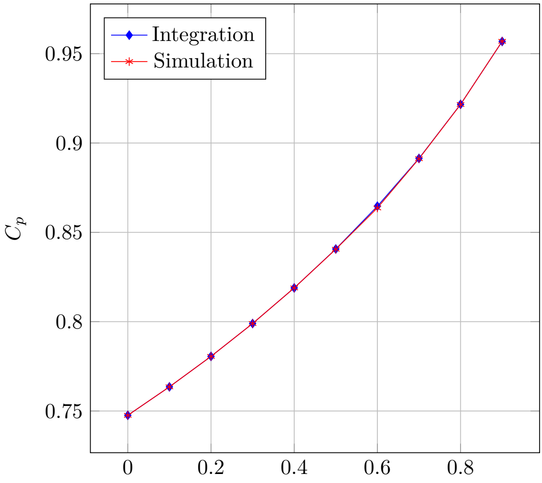
Оцінка константи C_p методом імітаційного моделювання

Приблизне значення сталої C_p можна визначити методом Монте-Карло, усереднюючи по великій кількості експериментів. В межах одного експерименту проводиться імітаційне моделювання процесу паркування з досить великим розміром парковки.



Результати роботи

Порівняння значень C_p, отриманих двома способами



Висновки

В роботі, використовуючи аналітичні та чисельні методи, досліджено асимптотику першого та другого моментів випадкової величини, що позначає кількість автомобілей на парковці в момент виснаження. Було доведено, що математичне сподівання збігається до лінійної функції зі швидкістю, більшою за поліноміальну. Отримано явний вигляд коефіцієнтів вищевказаної лінійної функції, хоч і у досить складній репрезентації подвійного інтегралу.

Висновки

Отриману асимптотичну оцінку першого моменту було застосовано для доведення обмеженості другого центрального моменту функцією, що повільніша за квадратичну на нескінченності. Це дозволило використати нерівність Чебишова для виведення закону великих чисел.
Окрім математичного результату, було створено консольний додаток для імітаційного моделювання процесу паркування з виснаженням. За допомогою нього було перевірено теоретичний результат.

Шляхи подальшого розвитку

- оцінка асимптотичної поведінки моментів вищих порядків;
- доведення центральної граничної теореми для величини $\frac{N_p(x)-m_p(x)}{\sigma_p(x)}$;
- отримання аналітичного результату для асимптотики у випадку двовимірної парковки;
- підтримка додатком змінних розмірів автомобілів;
- створення додатку для моделювання багатовимірного розміщення.

Дякую за увагу.