ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЛАПЛАСІАНОМ ЗА МІРОЮ

дипломну роботу виконав:
студент групи КА-41
Якимець Дмитро Миколайович

науковий керівник:
д. ф.-м. н., професор
Богданський Юрій Вікторович

Актуальність дослідження

- дослідження процесів теплопередачі в неоднорідних середовищах;
- комп'ютерне моделювання фізичних процесів у неоднорідних середовищах;
- як наслідок, застосування отриманих результатів у різних сферах промисловості.

Об'єкт, предмет, мета

Об'єкт: задача Коші для параболічного диференціального рівняння з оператором Лапласа за мірою.

Предмет: диференціальні рівняння в скінченновимірних гільбертових просторах, простори з неінваріантною скінченною мірою, побудова дивергенції та лапласіана в таких просторах.

Мета: побудувати рівняння теплопровідності у просторі з неінваріантною скінченною мірою, віднайти його розв'язок для деяких часткових випадків, а також загальний розв'язок (в обмеженій та необмеженій областях), довести єдиність та існування розв'язку відповідної задачі Коші.

Постановка задачі

- побудова рівняння теплопровідності у просторі з неінваріантною мірою і відповідної задачі Коші;
- розв'язання рівняння в найпростіших часткових випадках;
- знаходження загального розв'язку;
- доведення єдиності та існування розв'язку задачі Коші.

Постановка задачі Коші

Нехай μ — міра, абсолютно неперервна відносно міри Лебега λ, $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} =: g \in L_1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}; \lambda) \cap C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $g \geq 0$; $g > 0$ майже всюди. $u(x,t) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервно диференційовна за t та двічі неперервно диференційовна за $x_1, \dots, x_n$ і обмежена разом зі своїми похідними. Уведемо скалярний добуток на $L_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}; \mu)$ таким чином: $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} fg\, d\mu$. На $C_b^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ визначимо оператор дивергенції: $\mathrm{div} = -\mathbf{grad}^*$ і, відповідно, оператор Лапласа на $C_b^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$: $\Delta u = \mathrm{div} \circ \mathbf{grad}\, u$. Для введених понять запишемо таку задачу Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Переформульована задача Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \ln g}{\partial x_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Розв'язки в часткових випадках

Експоненціальна міра, багатовимірний випадок

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}, & x_i \geq 0, i = \overline{1,n}; \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right); \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\tilde{\varphi}(\omega) e^{i(x,\omega)} \sum_{k=1}^{n} \omega_k}{\tilde{\varphi}(\omega)\left(1 - e^{it\sum_{k=1}^{n}\omega_k}\right)\sum_{k=1}^{n}\omega_k^2 - ie^{it\sum_{k=1}^{n}\omega_k}\sum_{k=1}^{n}\omega_k}\, d\omega\,,$$

де $\tilde{\varphi}(\omega)$ — перетворення Фур'є вихідної початкової умови $\varphi(\omega)$.

Гаусова міра, одновимірний випадок

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x} e^t \tilde{\varphi}(\omega e^t)}{\omega^2 e^t \tilde{\varphi}(\omega e^t)(e^t - 1) + 1}\, d\omega,$$

де $\tilde{\varphi}(\omega)$ — перетворення Фур'є вихідної початкової умови $\varphi(\omega)$.

Фундаментальний розв'язок

Розглядаємо диференціальний оператор L, визначений на Ω:

$$Lu(x,t) = \left(\left\langle A(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle b(x,t), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + c(x,t) \right) u(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),$$

де $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T, \Omega = \overline{D} \times [T_0, T_1]$, а D — вимірна за Лебегом обмежена область.

Фундаментальним розв'язком рівняння $Lu = 0$ (в Ω) будемо називати функцію $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, визначену для всіх $(x,t;\xi,\tau) \in \Omega^2, t > \tau$, яка задовольняє наступним вимогам:

- для фіксованих (ξ,τ) вона як функція (x,t) $(x \in D, \tau < t, T_1)$ задовольняє умові $Lu = 0$;
- для кожної функції $f(x)$, неперервної в $\overline{D}$,

$$\lim_{\tau \searrow t} \int_D \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi)\, d\xi = f(x).$$

$$Z(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{\|x-\xi\|^2}{4(t-\tau)}}.$$

Z — фундаментальний розв'язок рівняння $L_0 u = 0$. Далі будемо шукати Γ у формі

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{D} Z(x,t;\xi,\tau)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)\,dy\,d\sigma\,,$$

де Φ визначається з умови, що Γ має задовольняти рівняння $Lu = 0$. За певних умов можемо записати

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) = LZ(x,t;\xi,\tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{D} LZ(x,t;\xi,\tau)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)\,dy\,d\sigma\,.$$

Розв'язок отриманого рівняння шукатимемо у вигляді

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) = \sum_{v=1}^{\infty}(LZ)_v(x,t;\xi,\tau)\,,$$

де $(LZ)_1 = LZ$ і $(LZ)_{v+1}(x,t,\xi,\tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{D} LZ(x,t;y,\sigma)(LZ)_v(y,\sigma,\xi,\tau)\,dy\,d\sigma\,.$

Випадок необмеженої області

Міркування вище були наведені лише для випадку обмеженої області $D \subset \mathbb{R}^n$, але за певних змін вони справедливі також і для необмежених областей, зокрема для випадку $D = \mathbb{R}^n$. Якщо область D необмежена, то припустимо, що виконуються наступні твердження:

- $(A_1)'$: оператор L рівномірно параболічний в $\Omega \equiv D \times [T_0, T_1]$;
- $(A_2)'$: коефіцієнти L — обмежені й неперервні в Ω функції, що задовольняють нерівності:
    - $\left|a_{ij}(x,t) - a_{ij}(x_0,t_0)\right| \le A\left(|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\frac{\alpha}{2}}\right)$,
    - $|b_i(x,t) - b_i(x_0,t)| \le A|x - x_0|^\alpha$,
    - $|c(x,t) - c(x_0,t)| \le A|x - x_0|^\alpha$

    для деякого $\alpha \in (0,1)$

всюди в Ω. Визначення фундаментального розв'язку $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ таке ж саме, як і в випадку обмеженої області, тільки накладемо на нього ще одне обмеження:

$$|f(x)| \le Ce^{h\|x\|^2}$$

при деякій додатній сталій h.

Існування розв'язку задачі Коші

Накладемо на початкову умову обмеження зростання: $|\varphi(x)| \le Ce^{h\|x\|^2}$, де h — деяка додатна стала, що задовольняє умові $h < \frac{\lambda_0}{4T}$, λ_0 — така стала, що $\lambda_0\|x-\xi\| \le \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(y,\sigma)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\,\forall x,\xi \in D$, а $T = T_1 - T_0$ (a^{ij} — матриця, обернена до a_{ij}). Також нехай $|f(x)| \le Ce^{h\|x\|^2}$.

Теорема. Нехай L задовольняє умови $(A_1)'$, $(A_2)'$ ($D = \mathbb{R}^n, T_0 = 0, T_1 = T$), функції $f(x,t)$ та $\varphi(x)$, неперервні відповідно в Ω і $\mathbb{R}^n$, задовольняють умови, наведені вище. Окрім цього, нехай $f(x,t)$ локально непервна за Гельдером (з показником α) відносно $x \in \mathbb{R}_n$ рівномірно за t. Тоді функція

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

буде розв'язком задачі Коші і

$$\forall(x,t) \in \Omega \;\; |u(x,t)| \le \; Ck\|x\|^2,$$

де k — стала, що залежить тільки від h, λ_0 і T.

Єдиність розв'язку задачі Коші

Теорема. Нехай оператор L задовольняє умову $(A_1)'$, функції $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t)$ неперервні в області $\Omega = \mathbb{R}^n \times [0,T]$. Тоді існує не більше одного розв'язку задачі Коші, що задовольняє умову

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)| e^{-k\|x\|^2}\, dx\, dt < \infty$$

при деякому додатному k.

Висновки

У даній роботі була розглянута задача Коші для рівняння теплопровідності в умовах неінваріантної міри. Для двох часткових випадків (експоненційної та гаусової міри) за допомогою перетворення Фур'є були знайдені аналітичні розв'язки, виражені за допомогою зворотного перетворення Фур'є певних виразі. У загальному випадку був знайдений фундаментальний розв'язок параболічного рівняння у вигляді інтегрального ряду за допомогою методу параметриксу. Також для випадку необмеженої області були наведені обмеження на початкові функції та щільність міри, за яких розв'язок задачі Коші існує та є єдиним; було показано, який вид він має.

Як можна бачити, у випадку необмеженої області розв'язок задачі Коші буде існувати лише за досить суттєвих обмежень, накладених на щільність розглянутої неінваріантної міри. Тим не менш, у реальних фізичних задачах процеси теплопередачі розглядаються в твердих тілах, рідинах та газах, які є обмеженими, тому для додатків буде достатньо й слабших умов. Найбільш проблематичним в даному разі буде відшукання самого розв'язку задачі Коші, оскільки члени розглянутого інтегрального ряду, у вигляді якого ми шукаємо фундаментальний розв'язок параболічного диференціального рівняння, не завжди можуть бути знайдені в аналітичному вигляді — в даному разі доведеться застосувати чисельне інтегрування, яке, очевидно, зменшить точність фінального результату.

Дякую за увагу!