МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Конструкції поверхневої міри у скінченновимірних просторах

Виконав
студент групи КА-41
Сніжко Богдан Миколайович

Науковий керівник
д. ф.-м. н., професор Богданський Ю.В.

Актуальність роботи

- У скінченновимірних просторах користуються класичним методом побудови поверхневих мір, який базується на понятті параметризованої поверхні.
- Однак у нескінченновимірних просторах відсутність інваріантної міри Лебега змушує дослідників пропонувати інші конструкції поверхневих мір. Побудова таких конструкцій відкриває шлях до створення адекватної теорії крайових задач для диференціальних рівнянь із функціями нескінченновимірного аргументу.
- У роботі проаналізовано один із альтернативних способів введення поверхневої міри і з’ясовано, чи співпадають результати альтернативного та класичного підходів для поверхонь одиничної корозмірності в $\mathbb{R}^m$.

Об'єкт і предмет дослідження

- ***Об'єкт дослідження***: теорія міри; поверхневі міри у скінченновимірному просторі (на прикладі $\mathbb{R}^m$).

- ***Предмет дослідження***: класична та альтернативна конструкції мір на поверхнях корозмірності 1 у скінченновимірному просторі.

Мета та методи дослідження

- ***Метою роботи*** є висвітлення основних підходів та методів конструювання поверхневих мір в $\mathbb{R}^m$ та дослідження їх еквівалентності для випадку поверхонь корозмірності 1.

- ***Методи дослідження***: використання сучасного апарату математичного аналізу, теорії звичайних диференціальних рівнянь та диференціальної геометрії.

Класичний метод побудови поверхневої міри

- Класичний метод є узагальненням способу побудови площі двовимірної поверхні в $\mathbb{R}^3$, відомого з курсу математичного аналізу.

- Гладкою *k*-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq k)$ називають множину $S \subset \mathbb{R}^m$, для якої існує відображення $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \in \mathfrak{A}_k)$ таке, що $S = \vec{r}(D)$, $\vec{r}$ – ін'єкція, $\vec{r} \in C^1(D)$, $rang(\vec{r}\,'(\vec{u})) = k \ \forall \vec{u} \in D$.

Класичний метод побудови поверхневої міри

- ***Твердження***. Нехай $D \in \mathfrak{A}_k$, $\vec{r}$ – параметризація гладкої k-вимірної елементарної поверхні $S = \vec{r}\,(D)$ в $\mathbb{R}^m$. Нехай існує $U \subset \mathbb{R}^k$ – відкрита множина така, що $\overline{D} \subset U$, $\vec{r} \in C^1(U)$ і $rang(\vec{r}\,'(\vec{u})) = k\ \forall \vec{u} \in U$.

  Тоді S має об'єм, який може бути обчислений за формулою:

$$\sigma_1(S) = \int_D \sqrt{\det G_{\vec{u}}}\,\mathrm{d}\lambda, \qquad (1)$$

де λ – міра Лебега в $\mathbb{R}^k$;

$$G_{\vec{u}} = \big((\dot{r}_i\,(\vec{u}), \dot{r}_j\,(\vec{u}))\big)_{i,j=\overline{1,k}}\ .$$

Альтернативна конструкція поверхневої міри

- Розглядається задача Коші:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{n}(\vec{x}) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \end{cases}, \qquad (2)$$

де $\vec{n} \in C_b^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$; $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$.

- Потік векторного поля $\vec{n}$:

$\Phi_t^{\vec{n}} \vec{x}_0 = \Phi_t \vec{x}_0 = \Phi(t, \vec{x}_0)$ – значення розв'язку задачі (2) в точці $t \in \mathbb{R}$.

- Потік володіє півгруповою властивістю: $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ для всіх $t, s \in \mathbb{R}$.

Альтернативна конструкція поверхневої міри

- $\forall t \in \mathbb{R}$ відображення $\mathbb{R}^m \ni \vec{x}_0 \mapsto \Phi_t^{\vec{n}}\,\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ є дифеоморфізмом.
- Для довільного $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$:
$$(\Phi_t\,\vec{x}_0 = \Phi_s\,\vec{x}_0) \Leftrightarrow (\forall u \in \mathbb{R}\colon \Phi_{u+t-s}\,\vec{x}_0 = \Phi_u\,\vec{x}_0)$$
- Нехай $M > 0$ – константа така, що $\|\vec{n}\,'(\vec{x})\| \leq M$ $\forall\,\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Тоді:
$$(t \in \mathbb{R}; \vec{x}\,, \vec{y} \in \mathbb{R}^m) \Rightarrow (\|\Phi_t\,\vec{x} - \Phi_t\,\vec{y}\,\| \leq e^{M|t|}\|\,\vec{x} - \vec{y}\,\|)$$
- $\Phi\colon \mathbb{R}^{m+1} \ni \langle t, \vec{x}\rangle \mapsto \Phi_t\,\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ є неперервним відображенням за сукупністю аргументів.

Альтернативна конструкція поверхневої міри

- Припущення:
  - S – гладка $(m-1)$-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$;
  - $\vec{n} \in C_b^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$;
  - $\vec{n}\,|_S$ є полем одиничної нормалі до S;
  - $\exists R > 0$: $(\vec{x} \in \mathbb{R}^m, \|\vec{x}\| > R) \Rightarrow (\vec{n}(\vec{x}) = \vec{0})$ (фінітність поля $\vec{n}$).

- Тоді міру S визначають за формулою:

$$\sigma_2(S) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \lambda(\Phi_t^{\vec{n}}\, \hat{S}^{\vec{n}}), \qquad (3)$$

де λ – міра Лебега в $\mathbb{R}^m$;

$$\hat{S}^{\vec{n}} = \Phi_{(-\infty,0]}^{\vec{n}} S = \{\Phi_t^{\vec{n}}\,\vec{x} \mid \vec{x} \in S, t \le 0\}.$$

Еквівалентність класичного та альтернативного підходів

- ***Теорема***. Нехай
  - $\vec{r}: U \to \mathbb{R}^m$, U – відкрита множина в $\mathbb{R}^{m-1}$;
  - $\vec{r} \in C^1(U)$,
  - $rang(\vec{r}\,'(\vec{u})) = m - 1 \; \forall \vec{u} \in U$;
  - D – компакт в $\mathbb{R}^{m-1}$ з межею ∂D, що є кусково гладкою (*m*-**2**)-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^{m-1}$; $D \subset U$;
  - $\vec{r}\,|_D$ є ін'єктивним відображенням;
  - $\vec{Z} \in C_b^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$;
  - $\vec{Z}$ є фінітним;
  - $\vec{Z}\,|_S$ є полем одиничної нормалі до S.

Тоді виконується рівність $\sigma_1(S) = \sigma_2(S)$, де $S := \vec{r}\,(D)$.

Допоміжні твердження

- *Теорема Ліувілля*. Для вимірних за Лебегом множин $A \subset \mathbb{R}^m$ справедлива формула:

$$\frac{d}{dt}\lambda(\Phi_t A) = \int_{\Phi_t A} div\,\vec{Z}\,\mathrm{d}\lambda,$$

де $\vec{Z} \in C^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$; Φ_t – потік векторного поля $\vec{Z}$.

- Існує $\hat{\tau} > 0$ і замкнена множина A ($A \subset U$, $D \subset intA$) такі, що відображення $\Phi^{\vec{Z}}: \langle t, \vec{x} \rangle \mapsto \Phi_t^{\vec{Z}}\,\vec{x}$ є взаємно однозначним на $(-\hat{\tau}\,; \hat{\tau}) \times \vec{r}(A)$.

- Нехай $\tau^* \in (-\hat{\tau}\,, 0)$. Тоді:

$$\partial\left(\Phi_{(\tau^*;0]}S\right) = S \vee \Phi_{(\tau^*,0)}\Gamma \vee \Phi_{\tau^*}S,$$

де $\Gamma = \vec{r}\,(\partial D)$.

Допоміжні твердження

- Розглянемо функцію $T: \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})} S \to \mathbb{R}$, яка ставить у відповідність кожній точці $\vec{y} \in \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})} S$ таке $t \in (-\hat{\tau}, \hat{\tau})$, що $\Phi_{-t}\,\vec{y} \in S$.

- Функція T введена коректно і є неперервно диференційовною на $\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})} S$.

Допоміжні твердження

- Вводимо функцію $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$l(t) = \left(\int_{\tau^*}^{t} k\,(\xi)\mathrm{d}\xi\right) / \left(\int_{\tau^*}^{\tau^*/2} k\,(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

де $k(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(t-\tau^*/2)^2} - \frac{1}{(t-\tau^*)^2}\right), & t \in \left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right) \\ 0, & t \le \tau^* \text{ або } t \ge \frac{\tau^*}{2} \end{cases}$

  - $l \in C^\infty(\mathbb{R})$;
  - $\left(t \ge \frac{\tau^*}{2}\right) \Rightarrow (l(t) = 1)$;
  - $(t \le \tau^*) \Rightarrow (l(t) = 0)$;
  - l зростає на $\left(\tau^*, \frac{\tau^*}{2}\right)$.

Допоміжні твердження

- Розглядаємо $\eta\colon \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S \to \mathbb{R}$;
$$\eta(\cdot) := l\big(T(\cdot)\big)$$
  - $\eta \in C^1\left(\Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S\right)$

- Будуємо векторне поле $\vec{n}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$:
  - якщо $\vec{x} \in \Phi_{(-\hat{\tau},\hat{\tau})}S$, то $\vec{n}\,(\vec{x}) := \eta(\vec{x}) \cdot \vec{Z}\,(\vec{x})$;
  - продовжуємо $\vec{n}$ на $\mathbb{R}^m$ так, щоб було виконано $\vec{n} \in C_b^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ і поле $\vec{n}$ було фінітним.

Схема доведення теореми

- Позначимо: $G = \Phi^{\vec{Z}}_{(\tau^*,0]}S$.
- $\sigma_2(S) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} \lambda\left(\Phi^{\vec{Z}}_t \hat{S}^{\vec{Z}}\right)$= [теорема Ліувілля] =

=$\int_{\hat{S}^{\vec{Z}}} div\,\vec{Z}\,\mathrm{d}\lambda$ = $\int_{\hat{S}^{\vec{n}}} div\,\vec{n}\,\mathrm{d}\lambda$ = $\int_G div\,\vec{n}\,\mathrm{d}\lambda$ = [формула Гаусса–Остроградського] = $\int_{\partial G} (\vec{n}, \vec{n}_{\partial G})\mathrm{d}\sigma_1$ =

=$\int_{\partial G} \eta\,(\vec{Z}, \vec{n}_{\partial G})\mathrm{d}\sigma_1$ =

=$\int_S \eta\,(\vec{Z}, \vec{n}_{\partial G})\mathrm{d}\sigma_1 + \int_{\Phi^{\vec{Z}}_{(\tau^*,0)}\Gamma} \eta\,(\vec{Z}, \vec{n}_{\partial G})\mathrm{d}\sigma_1 +$

$+ \int_{\Phi^{\vec{Z}}_{\tau^*}S} \eta\,(\vec{Z}, \vec{n}_{\partial G})\mathrm{d}\sigma_1$ = $\sigma_1(S) + 0 + 0$ = $\sigma_1(S)$.

Висновки

- У роботі наведено та розвинено два основні підходи до побудови поверхневих мір у скінченновимірних просторах: класичний та альтернативний (із використанням фазового потоку автономної задачі Коші).
- Узагальнено класичний метод на випадок поверхонь довільної скінченної корозмірності в $\mathbb{R}^m$.
- Вивчено властивості фазового потоку автономної системи диференціальних рівнянь.
- Доведено еквівалентність класичного та альтернативного підходів для компактних гладких $(m-1)-$ вимірних елементарних поверхонь в $\mathbb{R}^m$.

Напрямки подальших досліджень

- Аналіз еквівалентності підходів до побудови міри поверхні довільної корозмірності у скінченновимірному просторі.

- Адаптація інших методів конструювання поверхневих мір до випадку скінченновимірного простору; дослідження цих методів та їх порівняння з уже розглянутими.

Дякую за увагу!