Задача Діріхле в кулі для рівняння Лапласа з лапласіаном за мірою

Шрам В.Ю.

НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського"

shram.vladyslav@gmail.com

17 червня 2018 р.

Мета дослідження

1. Коректно визначити задачу Діріхле для рівняння Лапласа з лапласіаном спеціального вигляду та обґрунтувати єдиність її розв'язку
2. Побудувати загальну схему або формулу знаходження розв'язків у випадку міри, інваріантної до ортогональної групи перетворень
3. Використовуючи побудовану схему, знайти явні розв'язки для заданих сімей мір

Конструкція дивергенції відносно міри

Нехай $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — вимірний простір, де $X = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A}$ — борелівська σ-алгебра підмножин X, а μ — міра (тут під мірою розуміємо «заряд») на $\mathfrak{A}$.

Нехай Z — векторне поле класу $C^1(X)$ (саме поле і його похідна неперервні), а Φ_t^Z — потік поля Z в момент часу t.

Конструкція дивергенції відносно міри

Означення (диференційовність міри)

Міра μ називається диференційовною вздовж поля Z, якщо $\forall A \in \mathfrak{A} \; \exists \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 \mu(\Phi_t^Z(A)) =: \vartheta(A)$.

З теореми Нікодима-Віталі випливає, що функція ϑ на алгебрі $\mathfrak{A}$ також є мірою. Цю міру називають «похідною міри μ вздовж поля Z» і позначають $\vartheta = \mathrm{d}_Z\mu$.

Також можна показати, що $\mathrm{d}_Z\mu \prec \mu$. Тоді, міра $\mathrm{d}_Z\mu$ має щільність відносно міри μ і саме ця щільність називається «дивергенцією векторного поля Z відносно міри μ» ($\mathrm{div}_\mu Z := \frac{d(d_Z\mu)}{d\mu}$).

Властивості дивергенції відносно міри

Твердження

Нехай міра μ диференційовна вздовж поля Z та $f \in C^1(X)$. Тоді виконується наступна рівність:

$$\operatorname{div}_{f\cdot\mu} Z = \operatorname{div}_\mu(f \cdot Z) = f \cdot \operatorname{div}_\mu Z + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f, Z)$$

Для міри Лебега λ виконується наступне: якщо поле $Z \in C^1(X)$, то λ є диференційовною вздовж Z і тому існує дивергенція $\operatorname{div}_\lambda Z$; при цьому дивергенція $div_\lambda Z$ збігається із класичною дивергенцією векторного поля $\operatorname{div} Z = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial Z_{x_k}}{\partial x_k}$.

Лапласіан за мірою

Означення (Лапласіан за мірою)

Оператор Лапласа за мірою μ визначаємо наступним чином:

$$\Delta_\mu : C^2(X) \to C(X);\ \Delta_\mu := \mathrm{div}_\mu \circ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,.$$

Теорема (Принцип максимуму)

Нехай D — обмежена область в X, $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, міра μ диференційовна вздовж поля $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ та $\Delta_\mu u \geq 0 \pmod{\mu\big|_D}$. Припустимо також, що $\mu(U) > 0$ для будь-якої непорожньої відкритої підмножини $U \subset D$. Тоді $\sup\limits_D u = \sup\limits_S u$. Аналогічно, якщо $\Delta_\mu u \leq 0 \pmod{\mu\big|_D}$, то $\inf\limits_D u = \inf\limits_S u$.

Постановка задачі

Нехай B_R — відкрита куля радіуса R з центром в т. $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$. Нехай λ — міра Лебега в $\mathbb{R}^m$ («об'єм»).

Розглянемо тепер міру $\mu = g \cdot \lambda$, де щільність $g \in C^1(\overline{B_R})$, а також g є інваріантною відносно ортогональних перетворень, тобто
$g(\vec{x}) = \widetilde{g}(\|\vec{x}\|)$.

Постановка задачі Діріхле. Знайти функцію $u : \overline{B_R} \to \mathbb{R}$;
$u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ таку, що:

$$\begin{cases} \Delta_\mu u(\vec{x}) = div_\mu(\overrightarrow{grad}\ u(\vec{x})) = 0 \ \forall \vec{x} \in B_R, \\ u\big|_{\partial B_R} = f \end{cases} \tag{1}$$

Єдиність розв'язку задачі Діріхле

Із принципу максимуму для лапласіана за мірою негайно випливає наступна

Теорема (Єдиності розв'язку задачі Діріхле)

Нехай D — обмежена область в X, а міра μ задовольняє умову $\mu(U) > 0$ для будь-якої непорожньої відкритої множини $U \in D$. Тоді задача Діріхле (1) має не більше одного розв'язку.

Зведення до рівняння з частинними похідними

Використовуючи наведену вище властивість дивергенції відносно міри, у випадку, якщо $\mu = g \cdot \lambda$, отримуємо:

$$\Delta_\mu u = g \Delta u + (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u).$$

Отже, поставлена задача Діріхле переписується у вигляді

$$\begin{cases} \Delta_\mu u = g \Delta u + (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u) = 0 \quad \forall \vec{x} \in D, \\ u\big|_{\partial D} = f(\vec{x}) \end{cases}$$

Схема побудови розв'язків (двовимірний випадок)

Нехай $\{P_n(\rho)\}_{n=0}^{\infty}$ — розв'язки серії рівнянь

$$\rho^2 P_n''(\rho) + \rho\left[1 + \rho(\ln g(\rho))'\right] P_n'(\rho) - n^2 P_n(\rho) = 0, \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad (2)$$

обмежені на $[0, R]$ разом зі своєю похідною та такі, що $P_n(R) \neq 0$. Тоді розв'язком задачі (1) буде функція

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} \frac{P_0(\rho)}{P_0(R)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(\rho)}{P_n(R)} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

де

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, \mathrm{d}\varphi, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Схема побудови розв'язків (тривимірний випадок)

Нехай $\{P_n(\rho)\}_{n=0}^{\infty}$ — розв'язки серії рівнянь

$$r^2 P_n''(r) + r\left[2 + r(\ln g(r))'\right] P_n'(r) - n(n+1)P_n(r) = 0, \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (3)$$

обмежені на $[0, R]$ разом зі своєю похідною та такі, що $P_n(R) \neq 0$.
Тоді розв'язком задачі (1) буде функція

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_{nk} \frac{P_n(r)}{P_n(R)} Y_{nk}(\theta, \varphi),$$

де $Y_{nk}(\theta, \varphi)$ — сферичні функції,

$$a_{nk} = \frac{\displaystyle\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} f(\theta, \varphi) Y_{nk}(\theta, \varphi)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi}{\displaystyle\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} (Y_{nk}(\theta, \varphi))^2\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \;\; |k| \leq n.$$

Явні розв'язки (двовимірний випадок)

Теорема

Нехай $m = 2$, $g(\vec{x}) = A\|\vec{x}\|^B$, де $A > 0$, $B \geq 0$. Розв'язок задачі (1) має наступний вигляд:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda_n} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

де

$$\lambda_n = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4n^2}}{2}, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi, & n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, \mathrm{d}\varphi, & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Явні розв'язки (двовимірний випадок)

Теорема

Нехай $m = 2$, $g(\vec{x}) = Ae^{-B\|\vec{x}\|^d}$, де $A > 0$, $B > 0$, $d > 0$. Розв'язок задачі (1) має наступний вигляд:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \frac{F(\frac{n}{d}, \frac{2n+d}{d}, B\rho^d)}{F(\frac{n}{d}, \frac{2n+d}{d}, BR^d)} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)$$

(тут $F(a, b, x)$ — вироджена гіпергеометрична функція 1-го роду), де

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, \mathrm{d}\varphi, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Явні розв'язки (тривимірний випадок)

Теорема

Нехай $m = 3$, $g(\vec{x}) = A\|\vec{x}\|^B$, де $A > 0$, $B \geq 0$. Розв'язок задачі (1) має наступний вигляд:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_{nk} \left(\frac{r}{R}\right)^{\lambda_n} Y_{nk}(\theta,\varphi),$$

де

$$\lambda_n = \frac{-1 - B + \sqrt{(1+B)^2 + 4n(n+1)}}{2}, \ n \geq 0,$$

$$a_{nk} = \frac{\displaystyle\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} f(\theta,\varphi) Y_{nk}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}{\displaystyle\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} (Y_{nk}(\theta,\varphi))^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ |k| \leq n.$$

Явні розв'язки (тривимірний випадок)

Теорема

Нехай $m = 3$, $g(\vec{x}) = Ae^{-B\|\vec{x}\|^d}$, де $A > 0$, $B > 0$, $d > 0$. Розв'язок задачі (1) має наступний вигляд:

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_{nk} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{F(\frac{n}{d}, \frac{n+d+1}{d}, Br^d)}{F(\frac{n}{d}, \frac{n+d+1}{d}, BR^d)} Y_{nk}(\theta,\varphi),$$

де $F(a,b,x)$ — вироджена гіпергеометрична функція першого роду, $Y_{nk}(\theta,\varphi)$ — сферичні функції,

$$a_{nk} = \frac{\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} f(\theta,\varphi) Y_{nk}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}{\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} (Y_{nk}(\theta,\varphi))^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ |k| \le n.$$

Наукова новизна

Дослідження певною мірою опиралось на класичну теорію для рівняння Лапласа зі звичайним лапласіаном.

Але, наскільки мені відомо, задача відшукання розв'язку задачі Діріхле з лапласіаном за мірою є новою і раніше не розглядалась.

Практична значимість

З фізичної точки зору введення лапласіана за мірою дає можливість розглядати задачу в областях, які не є однорідними — мають змінну теплопровідність, електропровідність тощо.

А власне задача Діріхле для рівняння Лапласа з таким лапласіаном описує поведінку стаціонарних розподілів у цих областях.

Перспективи подальших досліджень

У майбутньому планується узагальнити розв'язок задачі на випадок довільної розмірності простору.

Також хотілось би звести розв'язок до більш компактного вигляду на зразок відомої формули Пуассона для задачі Діріхле з класичним лапласіаном.

За результатами даного дослідження було зроблено доповідь на VII Всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики.

Також планується публікація в науковому журналі.

Дякую за увагу