Соболєвські простори за неінваріантною мірою

дипломну роботу виконав: студент групи КА-41
Лєсніков Богдан Костянтинович
науковий керівник: д. ф.-м. наук, професор
Богданський Юрій Вікторович

НТУУ "КПІ ім. Сікорського" ІПСА

18 червня 2018

Об'єкт, предмет, мета

1. **Об'єкт** — функціональний аналіз та теорія міри, функціональні простори загалом та Соболєвські простори зокрема.
2. **Предмет** — Соболєвські простори за неінваріантною мірою.
3. **Мета** — побудувати доведення деяких класичних теоерм для Соболєвського простору за неінваріантною мірою. Дослідити необхідні обмеження на міру та її щільність.

Постановка задачі

- дослідження просторів Лебега за неінваріантною мірою
- доведення попередніх теорем в Лебегових просторах з неінваріантною мірою
- узагальнення усереднення та продовження на випадок неінваріантної міри
- доведення теорем щодо Соболєвських просторів за неінваріантною мірою

Актуальність дослідження

1. загальний випадок розв'язку диференціальних рівнянь в часткових похідних
2. узагальнення на випадок неінваріантної міри
3. розв'язок довільної задачі, де виникає необхідність інтегрування за неінваріантною мірою, що може бути досліджена відносно Лебегової міри

Базові поняття

- μ - неінваріантна міра, абсолютно неперервна відносно міри Лебега, з неперерною щільністю g (Радона-Нікодима) та $g \geq 0$ майже всюди
- Q — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею класу C^1
- $L_k(Q, \mu)$ — функції, що є інтегровними на Q. $\| f \|_{L_k(Q,\mu)} = \int_Q |f|^k \mathrm{d}\mu$

Базові поняття

- $H^k(Q,\mu)$ — гільбертів простір з скалярним добутком, що складається з усіх функцій, які мають узагальнені похідні до порядку k включно.
  $(f,g)_{H^k(Q,\mu)} = \sum_{\|\alpha\|\le k} \int_Q D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha g}\,\mathrm{d}\mu$
- $\dot{H}^k(Q,\mu)$ — гільбертів простір з скалярним добутком, що складається з усіх функцій, що можуть бути отримані як ліміт функцій з $\dot{C}^k_S(Q)$ (за нормою $H^k(Q,\mu)$)

Проміжні результати

Теорема

$C(\overline{Q})$ *щільна в* $L_1(Q,\mu)$, $L_2(Q,\mu)$

Лема

$C_0^1(Q)$ *щільна в* $L_1(Q,\mu)$, $L_2(Q,\mu)$

Проміжні результати

Теорема

(про сепарабельність)
$L_1(Q, \mu)$, $L_2(Q, \mu)$ *— сепарабельні.*

Теорема

(про неперервність)
Будь-яка фунція з $L_1(Q, \mu)$ *неперерна в середньому. Будь-яка функція з* $L_2(Q, \mu)$ *неперервна в середньому квадратичному.*

Проміжні результати

Теорема

(про продовження) Нехай Q*,* Q' *– обмежені області в* $\mathbb{R}^n$*,*
$Q \subset Q'$, $\partial Q \in C^k$.
Тоді для будь-якої функції $f \in H^k(Q,\mu)$ *існує фінітне в* Q'
$F(x) \in H^k(Q',\mu)$.
І при цьому $\| F \|_{H^k(Q',\mu)} \leq C \| f \|_{H^k(Q)}$*, де константа* C *не залежить від обраної функції, а тільки від областей* Q, Q'.

Проміжні результати

Узагальнено усереднені функції та доведено відповідні властивості
ω — функція однієї змінної. Парна, нескінченно диференційовна, невід'ємна. Область визначення — $\mathbb{R}$.
$\omega(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1$
$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_1(|x|)\,\mathrm{d}\mu = \int_{|x|\leq 1} \omega_1(|x|)\,\mathrm{d}\mu = 1$
h — довільне додатнє число. Функція $\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n}\omega_1(\frac{|x|}{h})$

Лема
Якщо $f(x) \in L_1(Q,\mu)$ *(або* $L_2(Q,\mu)$*), то* $\| f_h - f \|_{L_1(Q,\mu)} \to 0$ *(*$\| f_h - f \|_{L_2(Q,\mu)} \to 0$*) при* $h \to 0$.

Теореми

Слід для функцій з $H^1(Q,\mu)$ визначається як межа неперервних функцій f_n, що наближують $f \in H^1(Q,\mu)$, звужені на поверхню S (тобто як певна функція $f|_S \in L_2(S,\mu)$).

Теорема

Для того щоб функція з $H^1(Q,\mu)$ належала до $\dot{H}^1(Q,\mu)$ необхідно і достатньо, щоб її слід на межі області дорівнював нулю.

Теореми

Теорема

(аналог теореми Релліха)
Обмежена множина в $H^1(Q,\mu)$ *компактна в* $L_2(Q,\mu)$

Висновки

Отже, було доведено теореми про критерій належності до $\dot{H}^1(Q,\mu)$ та аналог теореми Релліха для неінваріантної міри з наступними обмеженнями:

- μ — абсолютно неперерна відносно міри Лебега
- g (щільність μ) – неперерна, невід'ємна майже всюди

Також були проаналізовані класичні результати на предмет узагальнення, проаналізовано основні наявні роботи, розглянуто декілька класичних теорем та їх аналоги у просторах з неінваріантною мірою.
Було досліджено обмеження на неінваріантну міру та доведено результати для них.

Перспективи для подальших досліджень

Існує можливість узагальнення на випадки інших мір та областей, на кшталт послаблення вимог на міру, випадок нескінченновимірного простору тощо.

Дякую за увагу