

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ОДНОГО КЛАСУ ЕКОНОМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Виконав:

Кірсенко Богдан Вікторович

Науковий керівник:

Доц. Горбань Наталія Володимирівна

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ РОБОТИ

Метою роботи було дослідження на стійкість положень рівноваги економічних моделей Солоу, звичайної та узагальненої моделі Тобіна.

Для досягнення мети були виконані такі задачі:

- Аналітично і графічно було знайдено положення рівноваги в моделі Солоу і проведено аналіз стійкості рівноваги;
- Аналітично знайдено положення рівноваги моделі Тобіна при виборі виробничої функції Кобба-Дугласа і проведено аналіз стійкості положення рівноваги;
- Доведена стійкість коротко- і довгострокового положення рівноваги узагальненої моделі Тобіна та наявність біфуркацій Хопфа;

МОДЕЛЬ СОЛОУ

Рівняння моделі Солоу:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + g + \delta)k,$$

де n - темп приросту населення;

g -темп приросту технічного прогресу;

δ - знос капіталу;

k - капіталоозброєність на душу населення;

$y=f(k)$ - залежність продуктивності праці від капіталоозброєності.

Виробнича функція Кобба-Дугласа: $F(K, L) = aK^\alpha L^{1-\alpha}$,

де K - загальний капітал, L - праця.

Модель Солоу досліджує вплив на економічне зростання збережень, зростання населення та технологічного прогресу. Модель економічного зростання Солоу є необхідною відправною точкою практично всіх досліджень економічного зростання. З її допомогою виявляються причини тимчасового і постійного, стійкого зростання економіки і існування відмінностей в рівні життя населення різних країн.

МОДЕЛЬ СОЛОУ

Темпи зростання показників в стійкому положенні

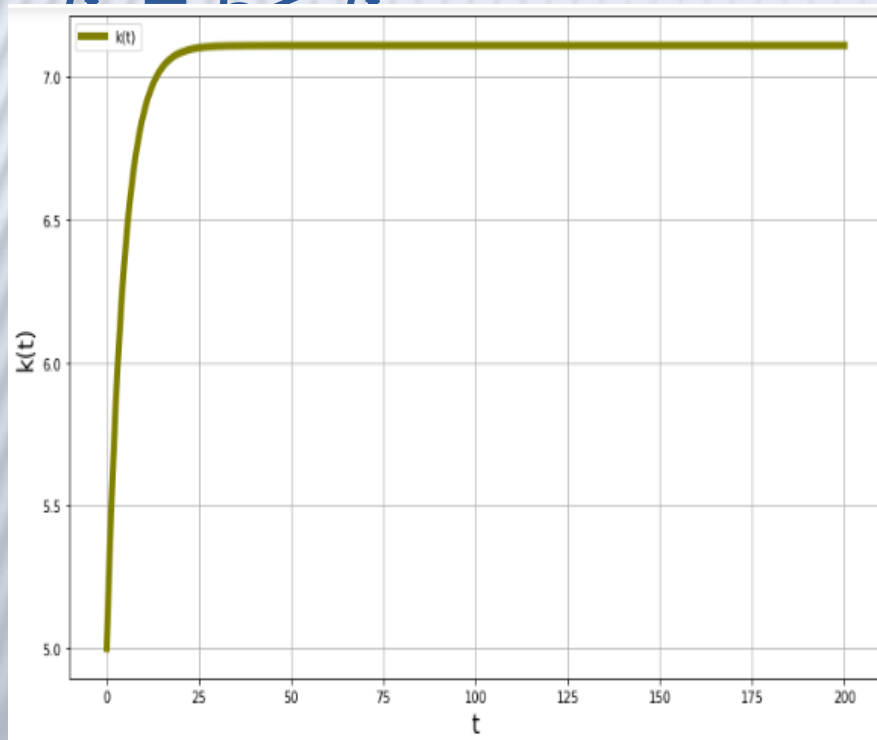
Показник	Наявність НТП і росту населення		
	$n > 0, g > 0$	$n > 0, g = 0$	$n = 0, g = 0$
$k = \frac{K}{LE}$	0	0	0
$\frac{K}{L} = kE$	g	0	0
$K = kLE$	n + g	n	0
$y = \frac{Y}{LE} = f(k)$	0	0	0
$\frac{Y}{L} = yE$	g	0	0
$Y = yLE$	n + g	n	0

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ

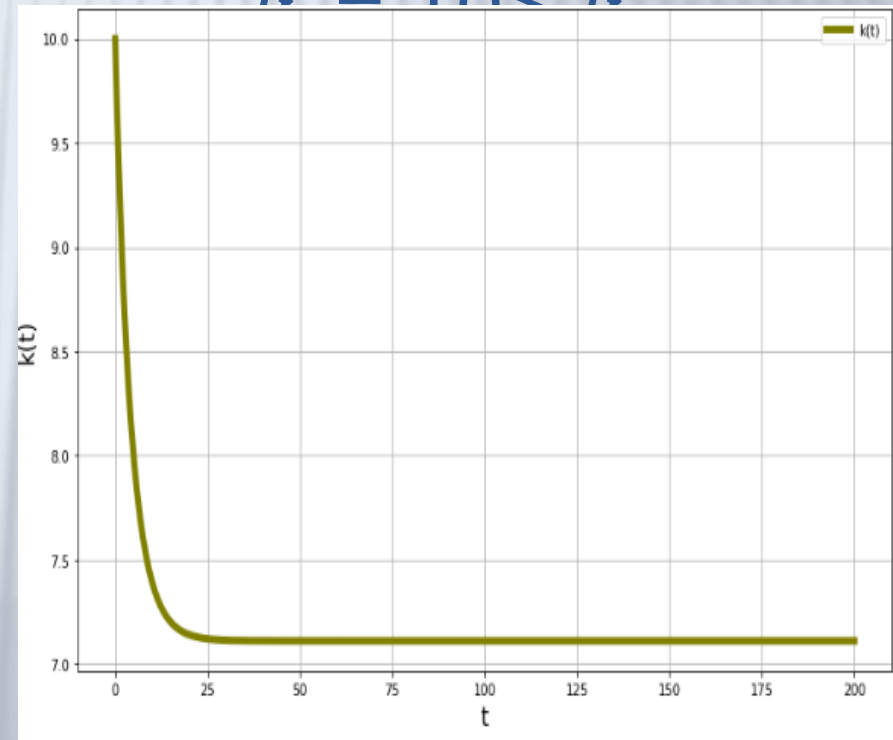
$$s = 0.6, a = 2, g = 0.1, n = 0.2, \delta = 0.15, \alpha = 0.5$$

$$k_{eq} \approx 7.11$$

$$k_0 = 5 < k_{eq}$$

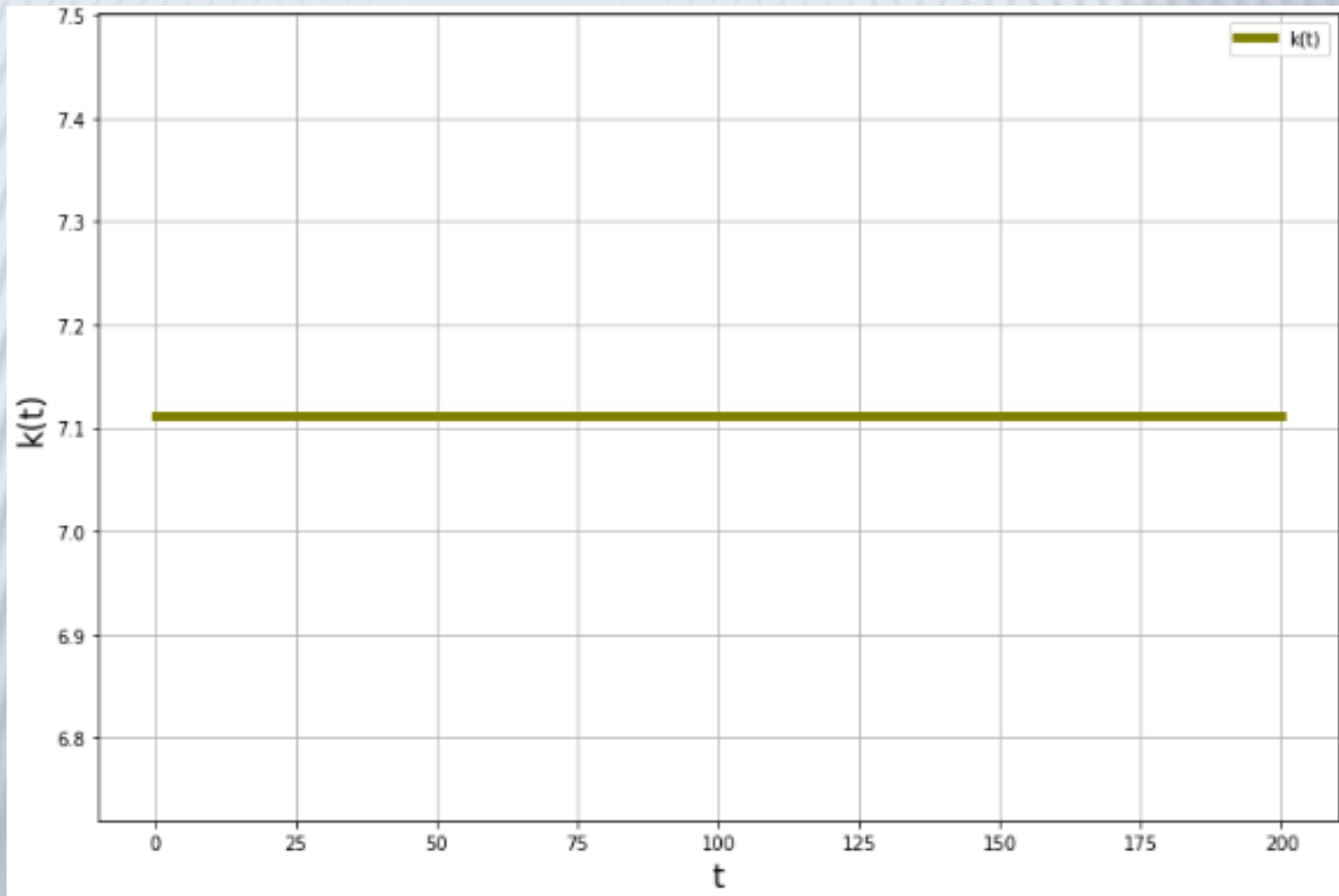


$$k_0 = 10 > k_{eq}$$



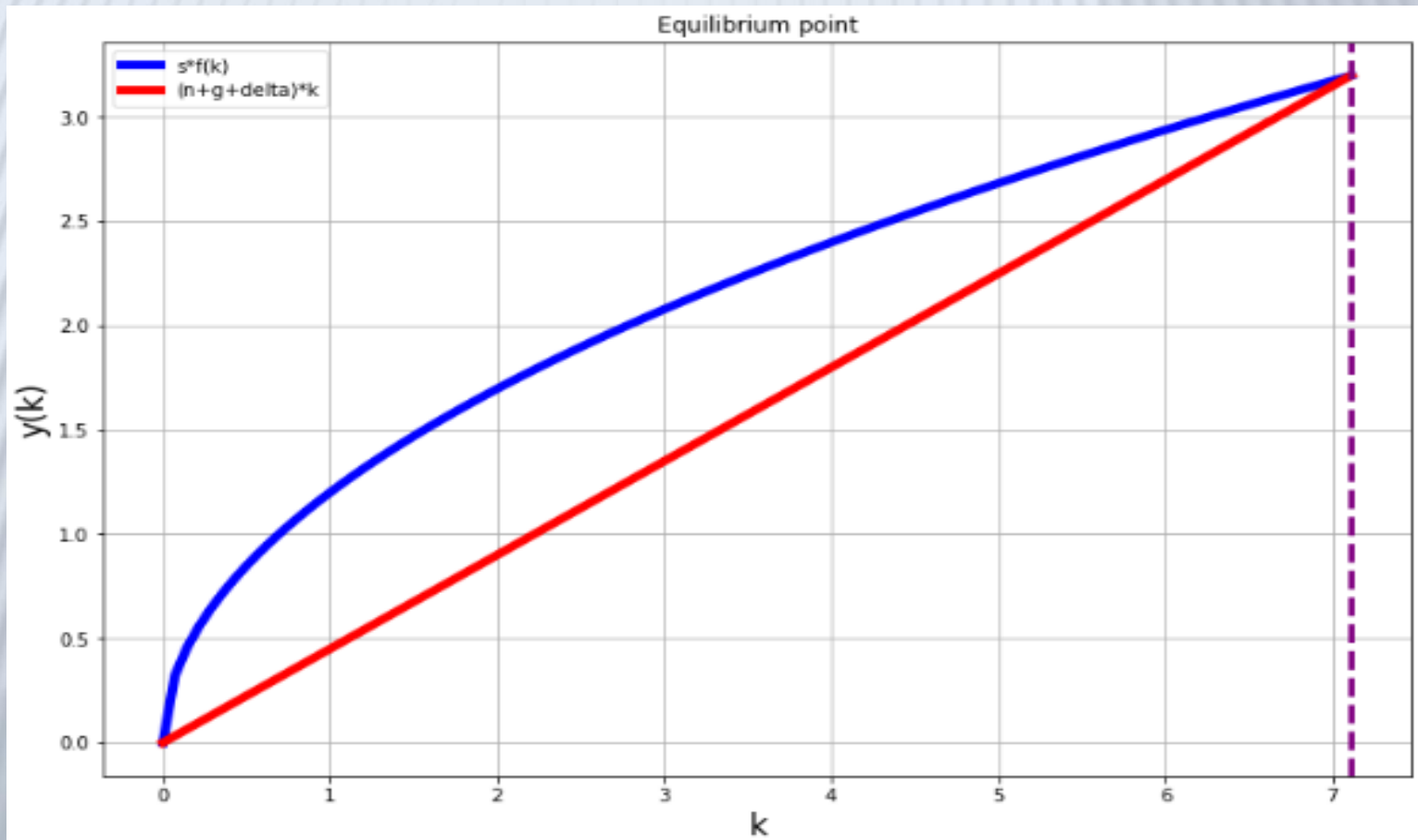
ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ

$$k_0 = k_{eq} \approx 7.11$$



СХЕМАТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО СТАНУ

$sf(k_{eq}) = (n + g + \delta)k_{eq}$, де k_{eq} - розв'язок рівняння $\dot{k} = 0$.

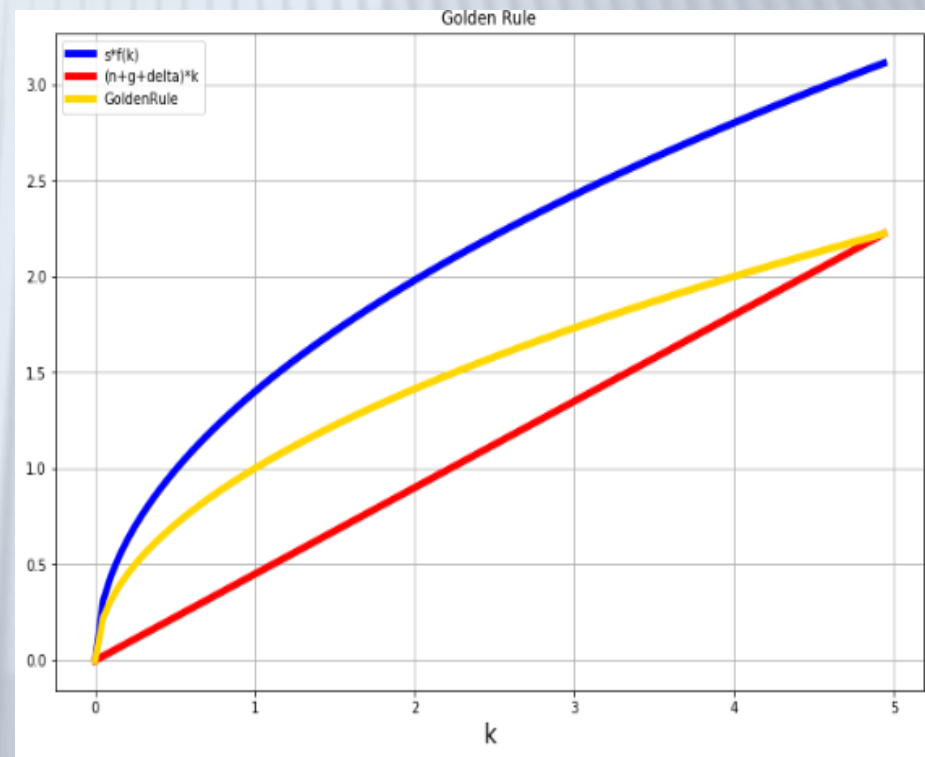
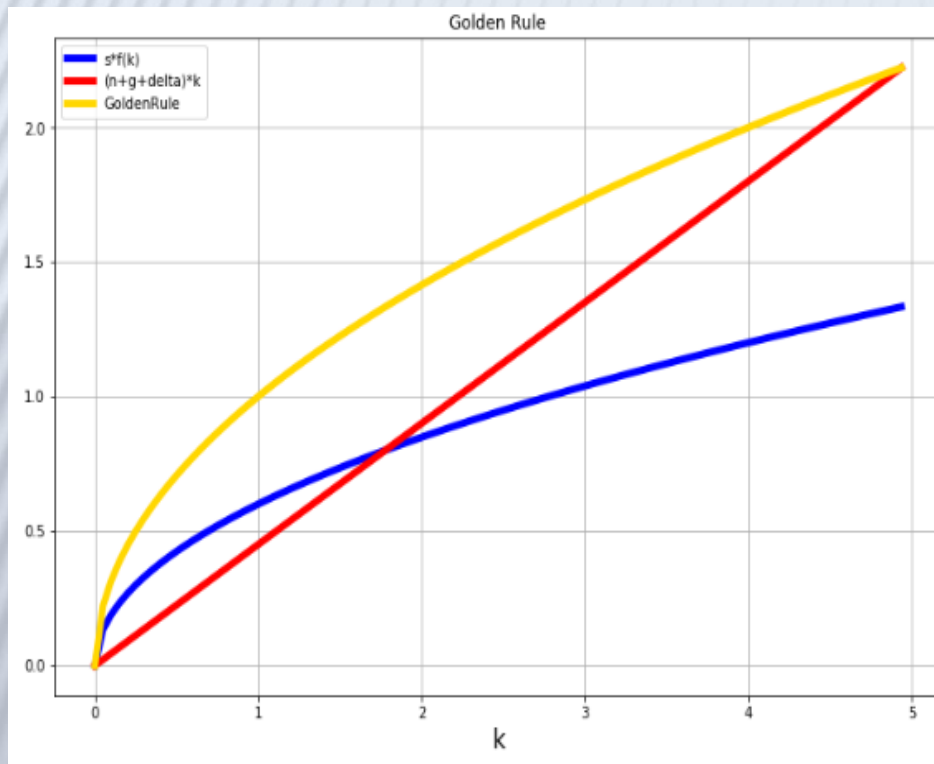


ЗОЛОТЕ ПРАВИЛО

$$s_{gr} = 0.5 k_{gr} \approx 4,94$$

$$s = 0.3 k_{eq} \approx 1.778$$

$$s = 0.7 k_{eq} \approx 9.68$$



МОДЕЛЬ ТОБІНА

Модель складається з двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{p}}{p} \right) x = \left(z - n - \frac{\dot{p}}{p} \right) x, \\ \dot{k} &= sf(k) - nk - c[f'(k) + z - u(k, x)]x,\end{aligned}$$

де k - капіталоозброєність;

x -кількість грошей на душу населення;

n – фіксована швидкість росту населення;

z – постійна швидкість росту номінальних грошових накопичень.

Параметр z фіксується урядом, p -ціна.

ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ ДЛЯ МОДЕЛІ ТОБІНА

Система буде знаходитися в положенні рівноваги, якщо $\dot{x} = \dot{k} = 0$.
Якщо $x = 0$, то ми отримуємо модель Солоу.

$$u(k, x) = \frac{\alpha k}{(x+k)}, \quad f(k) = \beta\sqrt{k}.$$

Для $x^* > 0, k^* > 0$ положення рівноваги маємо

$$z - n - \frac{\alpha k}{(x^* + k^*)} + \frac{\beta}{2\sqrt{k^*}} = 0 \qquad s\beta\sqrt{k^*} - nk^* - (1-s)nx^* = 0.$$

Тоді

$$x^* = \frac{s\beta\sqrt{k} - nk}{(1-s)n}$$
$$k^* = \left(\frac{\beta}{q^*}\right)^2,$$

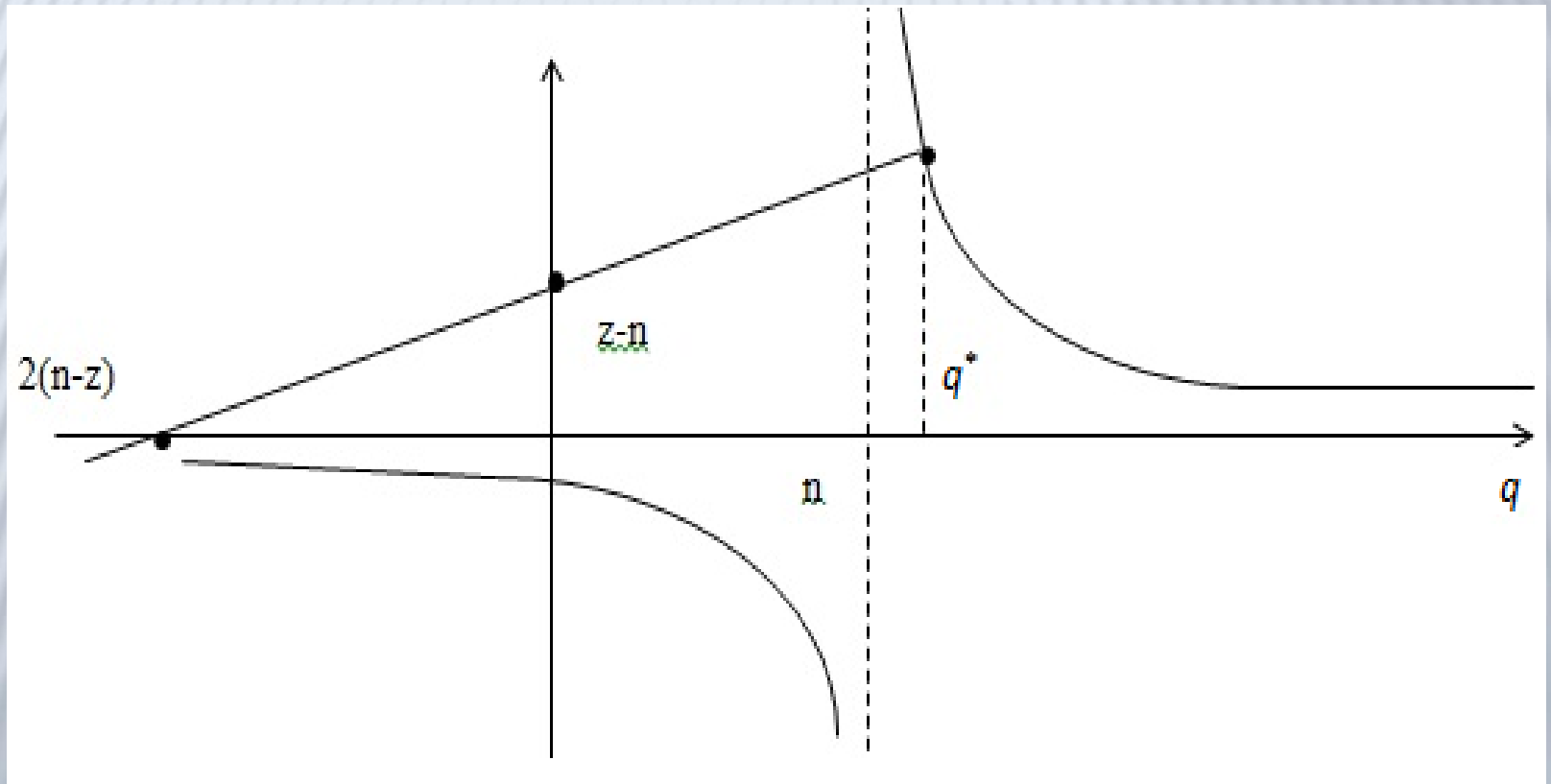
якщо $s > n/q^*, z - n > 0$.

СХЕМАТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ

Заміна $q = \frac{b}{\sqrt{k^*}}$. Отримуємо $z - n + \frac{q}{2} = \frac{a^{\frac{1-s}{s}}n}{q-n}$.

$$z - n > 0$$

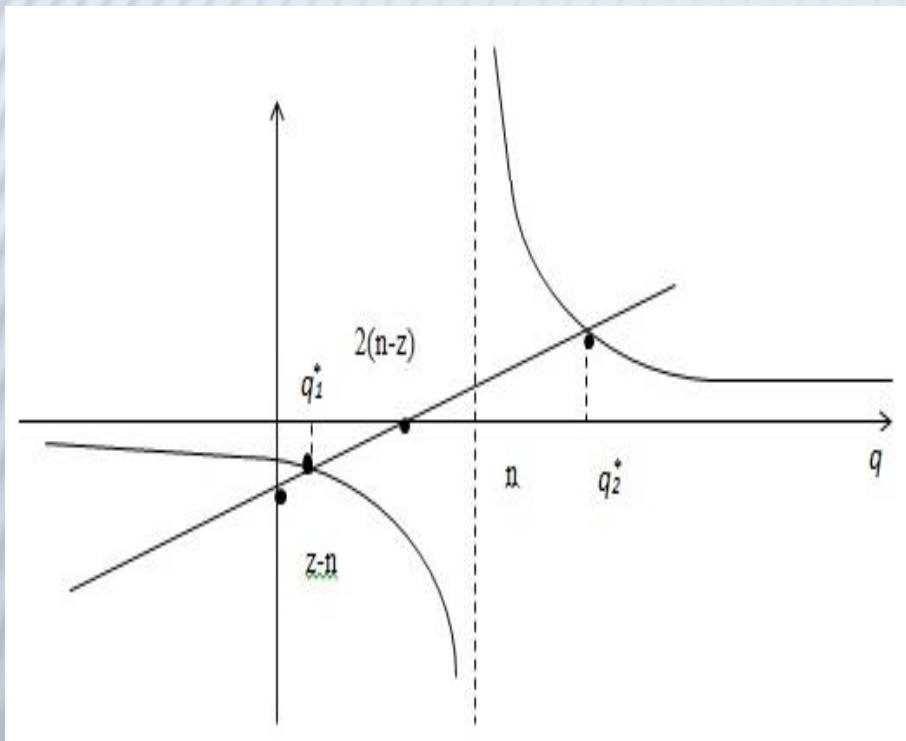
$$0 \leq z - n \leq a - n/2s$$



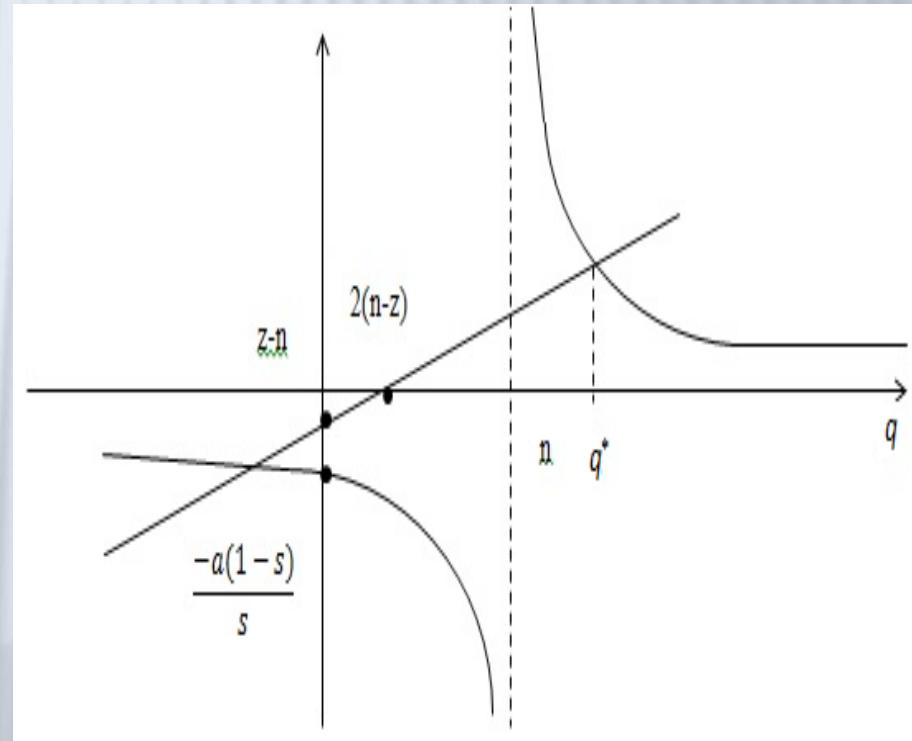
СХЕМАТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ

$$z - n < 0$$

$$z - n < \frac{-a(1-s)}{s}$$



$$z - n + \frac{n}{2s} < a$$



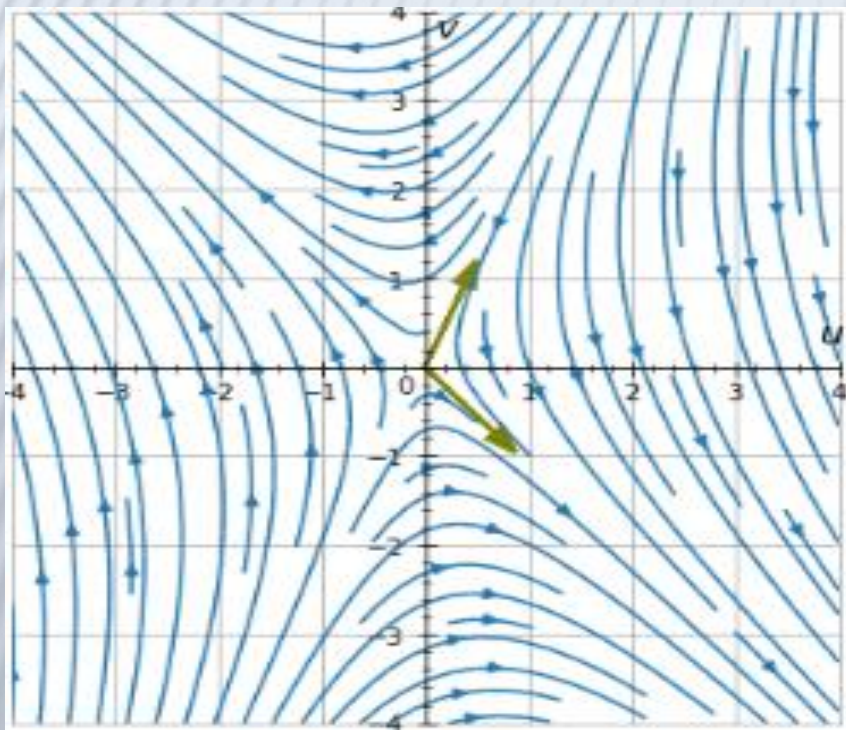
ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ

$$a = 5 \quad b = 15 \quad s = 0.3$$

$$z = 1, n = 3$$

$$x^* \approx 0.4284$$

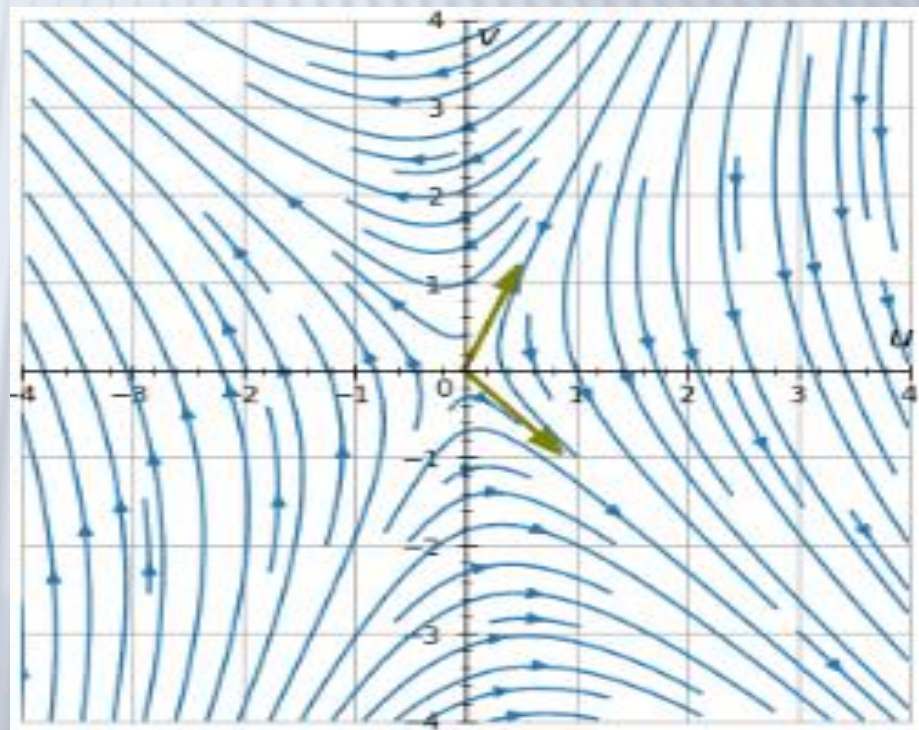
$$k^* \approx 1.5938$$



$$z = 3, n = 1$$

$$x^* \approx 3.765$$

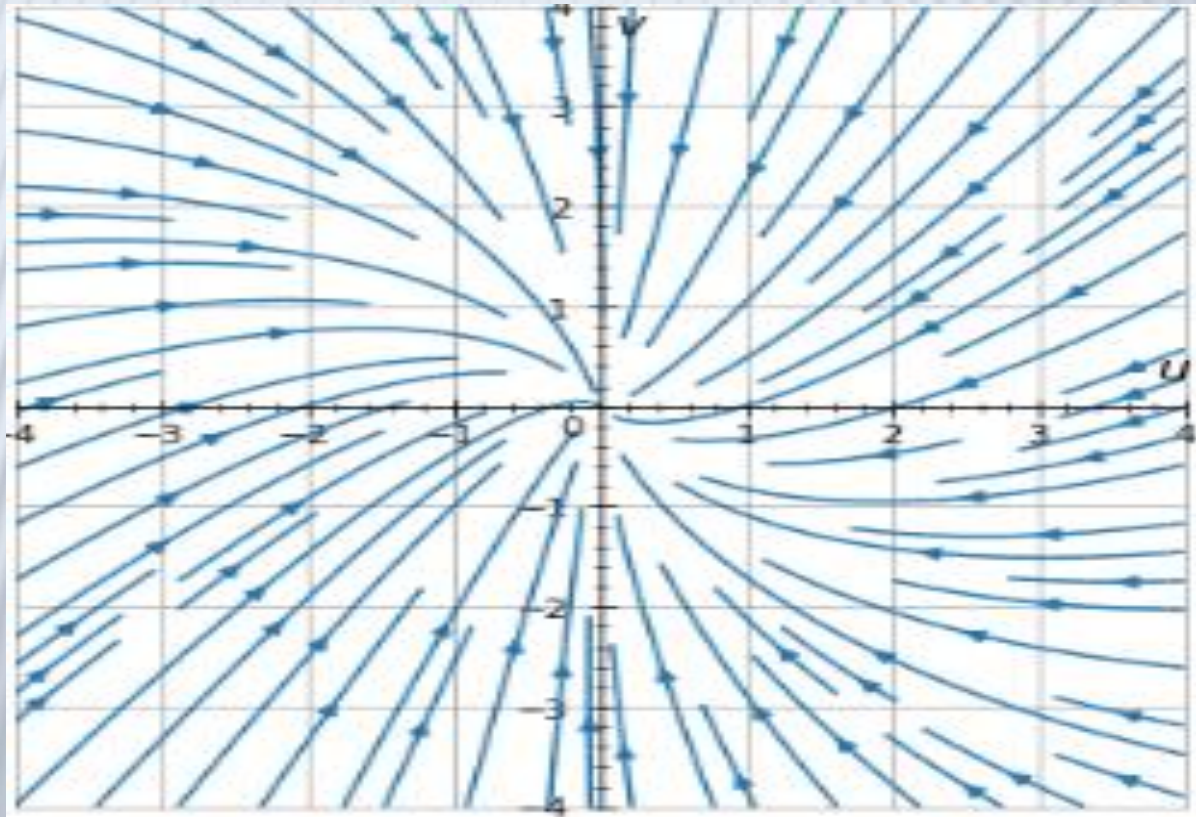
$$k^* \approx 14.501$$



ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ

Якщо порушуються умови існування єдиного додатнього положення рівноваги:

$$z = 5, n = 1 \quad 5 - 1 < 5 - 1/0.6 \Rightarrow x^* \approx -2.3209 \quad k^* \approx 23.3864$$



УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ТОБІНА

Модель складається з трьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - nk - (1 - s)(z - q)x,$$

$$\frac{dx}{dt} = x(z - \alpha(x - g(k, q)) - n),$$

$$\frac{dq}{dt} = \beta(\alpha(x - g(k, q)) - q),$$

де q - очікувана швидкість інфляції;

α – додатній постійний параметр;

β – коефіцієнт очікування.

Модель Тобіна описує взаємозалежність між капіталоозброєністю k , кількістю грошей в реальних цінах на душу населення x і очікуваною швидкістю інфляції q .

ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ

Корткострокове положення рівноваги

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(z - \alpha(x - g(\bar{k}, q))), \\ \frac{dq}{dt} &= \beta(\alpha(x - g(\bar{k}, q)) - q).\end{aligned}$$

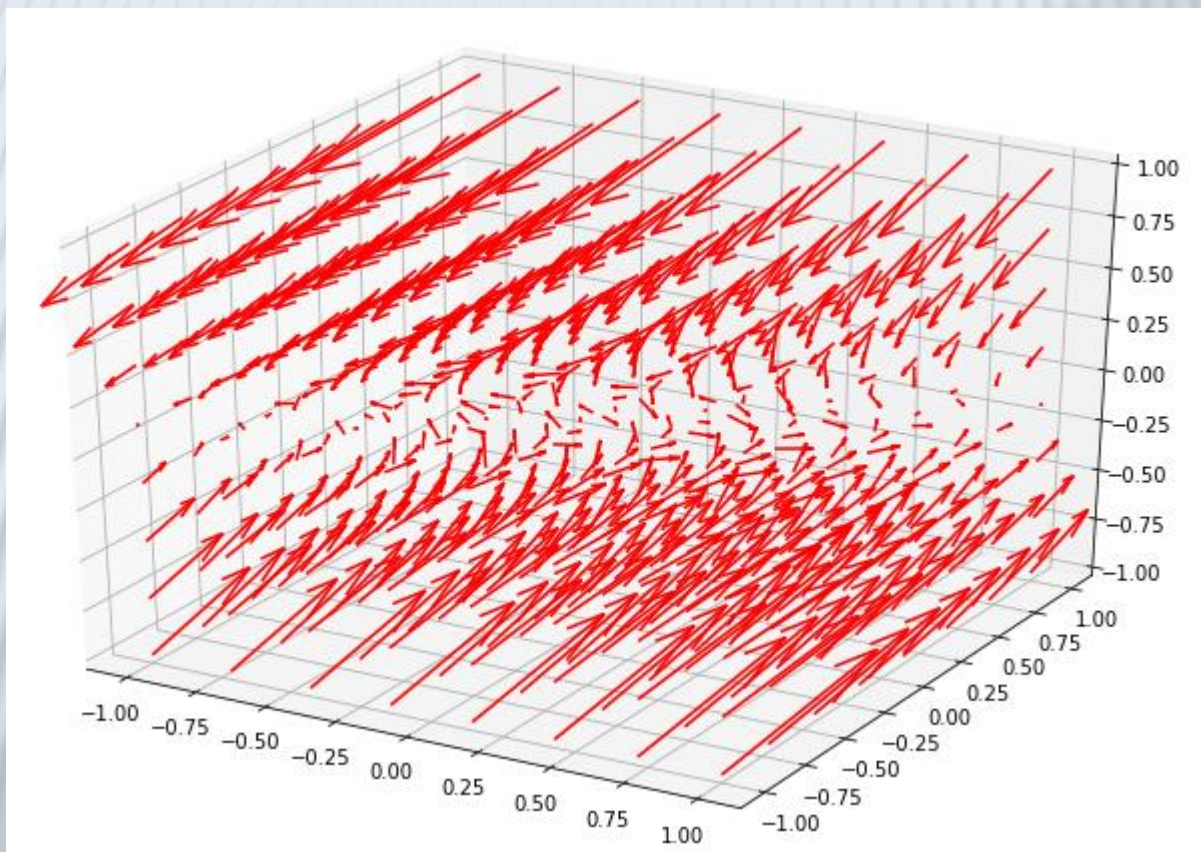
Положення рівноваги

$$z = \bar{q} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \alpha(x - g(\bar{k}, \bar{q})) \quad \bar{x} = \frac{z}{\alpha} + g(\bar{k}, \bar{q})$$

Довгострокове положення рівноваги $sf(k_0) - nk_0 - (1 - s)(z -$

ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

$$z = 3 \quad n = 1 \quad s = 0.75 \quad \alpha = 0.5 \quad \beta = 0.5 \quad a = 5 \quad b = 15$$



ВИСНОВКИ

В дипломній роботі був проведений аналіз стійкості класу моделей економічного зростання. В роботі досліджено економічну модель зростання Солоу, звичайну та узагальнену моделі Тобіна. Для досягнення мети роботи було вирішено ряд завдань:

- проведено огляд літературних джерел та проаналізовано існуючі методи дослідження на стійкість економічних моделей;
- знайдено та досліджено на стійкість положення рівноваги моделі Солоу, зокрема вивчено питання впливу різних параметрів на положення рівноваги;
- знайдено та досліджено на стійкість положення рівноваги моделі Тобіна, побудовано фазовий портрет, що демонструє нестійкість положення рівноваги;
- знайдено та досліджено на стійкість положення рівноваги узагальненої моделі Тобіна, побудовано векторне поле напрямків, що показує стійкість даного положення рівноваги;
- проведено чисельний аналіз розглянутих моделей; розроблено програмний модуль на мові програмування Python, що знаходить положення рівноваги моделей і будує чисельні розв'язки для цих моделей;
- проведено функціонально-вартісний аналіз програмного продукту; за допомогою функціонально-вартісного аналізу були визначені та обґрунтовані програмні методи для вирішення поставлених задач, та показано їх ефективність за критеріями економічними, зручності тощо.

Перспективи для подальших досліджень пов'язані з вивченням цих моделей у припущенні, що один або декілька параметрів будуть мати стохастичну природу, тобто представляти собою стохастичний процес.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!