

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Диференціальна задача зближення з чистим запізненням



Виконала
студентка групи КА-41
Бахтіна Марія

Науковий керівник:
доцент Барановська Л.В



Актуальність роботи

Задачі прийняття рішення в умовах конфлікту декількох гравців:

- Навігаційне керування
- Задачі економіки
- Задачі поведінкової екології
- Задачі хімічної кінетики



Постановка задачі

- Аналіз предметної області, вибір методів математичного моделювання і розв'язання задач переслідування;
- Порівняння методів обчислення фундаментальних матриць для гри переслідування;
- Розв'язання та аналіз задачі переслідування у випадку одного та групи переслідувачів
- Реалізація візуалізації простого переслідування



Задача зближення з чистим запізненням

Розглянемо задачу переслідування з одним переслідувачем та одним втікачем

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= b z(t - \tau) + \varphi(U, v), \\ z &\in R^n, z(t) = z^0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де } z(t) = x(t) - y(t), \quad \varphi(U, v) = u(t) - v(t),$$

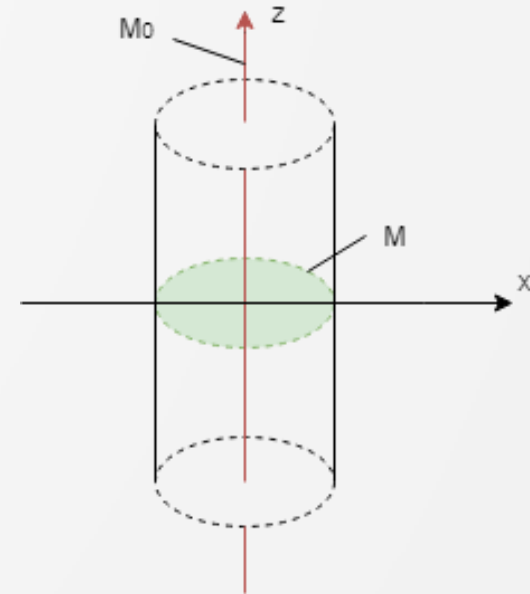
$$0 < b < 1, \quad \|u\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1 - b, \quad \|z^0\| = 1.$$

- Умова закінчення гри: $z \in M^*$
- Термінальна множина: $M^* = M_0 + M$

$$M^* = M = M_0 = \{z \in R^n : z = 0\}, \quad L = R^n,$$

π – ортопроектор, що діє з R^n у L ,

$$\pi = I_n.$$





Диференціальне рівняння запізнюючого типу

Фундаментальна матриця для даної гри, знайдена з використанням експоненціала з запізненням має наступний вигляд:

$$\bullet \exp_{\tau}\{B, t\} = \begin{cases} \Theta, & -\infty < t < -\tau; \\ I, & -\tau \leq t < 0; \\ \dots \dots \dots \dots \\ I + B \frac{t}{1!} + B^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + B^k \frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau \\ \dots \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2)$$

Тоді загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \exp_{\tau}\{bI_n, t\}\varphi(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp_{\tau}\{bI_n, t - \tau - s\}\varphi'(s)ds + \\ + \int_0^t \exp_{\tau}\{bI_n, t - \tau - s\}u(s)ds.$$

Де $\varphi(t) = u(t) - v(t)$



Схема методу розв'язуючих функцій

Побудуємо багатозначне відображення

$$W(t, v) = \pi K(t) \varphi(U, v), \quad W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), \quad (3)$$

де $K(t) = \exp_{\tau}\{B, t\}$ – функціональна матриця, що відповідає однорідній системі

$$\dot{z}(t) = bz(t - \tau), \quad z \in R^n, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Умова Понтрягіна. Відображення $W(t) \neq \emptyset$ для усіх $t \geq 0$.



Схема методу розв'язуючих функцій

- Фіксуємо селектор $\gamma(t) \in W(t) = \{0\}$, $t \geq 0$
- $\xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) = \pi K(t)z^0(0) + \int_{-\tau}^0 \pi K(t-s-\tau)Bz^0(s)ds + \int_0^t \gamma(s)ds$
- Розв'язуюча функція: $\alpha(t, s, z^0(\cdot), v, \gamma(\cdot)) =$
 $= \sup\{\alpha \geq 0: [W(t-s, v) - \gamma(t-s)] \cap \alpha[M - \xi(t, z^0(\cdot), \gamma(\cdot))] \neq \emptyset\}$
де $s \in [0, t]$, $v \in V$, $\gamma(\cdot) \in G$, $m \in M$, $z \in R^n$
- $T(z^0(\cdot), \gamma(\cdot)) = \inf \left\{ t \geq 0: \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, s, z^0(\cdot), v, \gamma(\cdot)) ds \geq 1 \right\}$, $\gamma(\cdot) \in G$
- Контрольна функція $h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, s, z^0(\cdot), v, \gamma(\cdot)) d\tau$;
 $h(0) = 1, h(t^*) = 0$



Задача групового зближення з чистим запізненням

- Розглянемо задачу групового переслідування з χ переслідувачами та одним втікачем

$$\dot{z}_i(t) = b_i z_i(t - \tau_i) + u_i(t) - v(t), \quad z_i \in R^{n_i}, \quad i = 1, \dots, \chi \quad (5)$$

з початковою умовою $z_i(t) = z_i^0(t)$, $-\tau_i \leq t \leq 0$, $i = 1, \dots, \chi$.

При параметрах $0 < b_i < 1, \tau_i > 0$.

- Множини керувань мають наступний вигляд:

$$U_i = \{u_i \in R^{n_i}: \|u_i\| \leq 1\}, i = 1, \dots, \chi, V = \{v \in R^n: \|v\| \leq 1 - b\}.$$

- Термінальна множина $M_i^* = M_i = M_i^0 = \{z_i \in R^{n_i}: z_i = 0\}$, $L = R^{n_i}$, π_i – оператори тотожного претворення, ортопроектор, що діє з R^{n_i} у L



Задача групового зближення з ЧИСТИМ запізненням

- $$\alpha_i(t, s, z^0_i(\cdot), v, 0) = \frac{\exp_{\tau_i}\{b_i \cdot I_n, t-s\}}{\|\xi_i(t, z^0_i(\cdot), 0)\|^2} [(\xi_i(t, z^0_i(\cdot), 0), v) + \sqrt{(\xi_i(t, z^0_i(\cdot), 0), v)^2 - \|\xi_i(t, z^0_i(\cdot), 0)\|^2(\|v\|^2 - 1)}], \quad i = \overline{1, \chi},$$

Якщо накласти умову

$$\delta(z^0(\cdot)) = \min_{\|v\| \leq 1} \max_{i=1, \dots, \chi} \alpha_i(t, s, z^0_i(\cdot), v, 0) > 0,$$

то гарантується скінченність часу переслідування

- Оцінка часу переслідування

$$T_\chi(z^0_i(\cdot), 0) \leq \frac{\chi}{\delta(z^0(\cdot))}.$$



Задача групового зближення з чистим запізненням

Якщо $t_* = t_*(v(\cdot))$ – момент переключення, в якому контрольна функція

$$1 - \max_{i=1, \dots, \chi} \int \alpha_i(t, s, z^0_i(\cdot), v, 0) ds$$

досягає нуля, то керування переслідувачів, для яких час $T_\chi(z^0_i(\cdot), 0)$ належить проміжку $[0, t_*)$, такі

$$u_i(s) = v(s) - \exp_{\tau_i}^{-1}\{b_i \cdot I_n, T_\chi - s\} \cdot \alpha_i(t, s, z^0_i(\cdot), v, 0) \xi_i(t, z^0_i(\cdot), 0), i = \overline{1, \chi}, \quad (6)$$

і на проміжку $[t_*, T_\chi]$ для тих переслідувачів i , для яких виконується рівність

$$\int_0^{t_*} \alpha_i(t, s, z^0_i(\cdot), v, 0) ds = \max_{i=1, \dots, \chi} \int_0^{t_*} \alpha_i(t, s, z^0_i(\cdot), v, 0) ds,$$

керування має вигляд

$$u_i(s) = \exp_{\tau_i}^{-1}\{b_i \cdot I_n, T_\chi - s\} \cdot v(s), \quad (7)$$

а для інших переслідувачів – керування на проміжку $[t_*, T_\chi]$ довільні.



Метод паралельного наближення

$$\dot{z}(t) = u(t) - v(t), \quad z \in R^n, u \in U, v \in V, \quad (8)$$

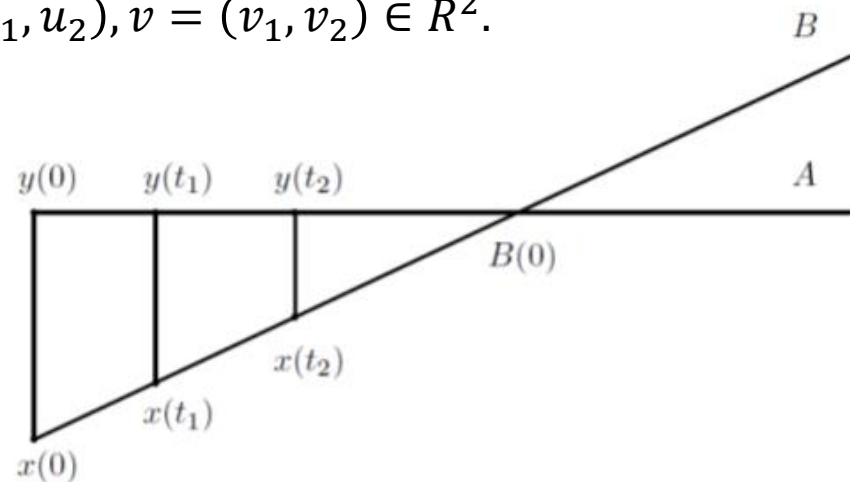
де A, B – константні квадратні матриці порядку n ;
 U, V – непорожні компакти з R^n

Простий рух:

Закон руху переслідувача $\dot{x} = u, \|u\| \leq \alpha$

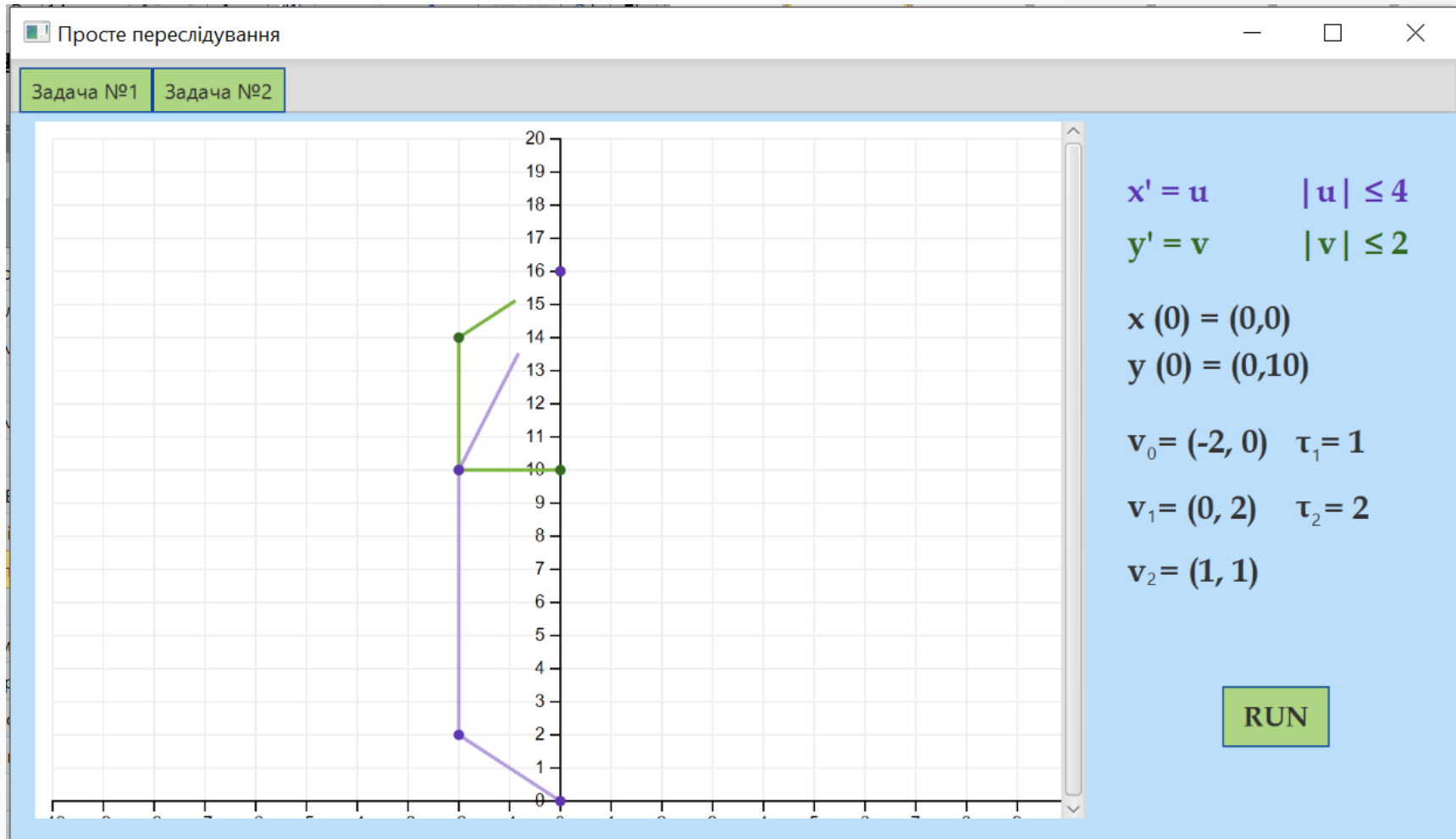
Закон руху втікача $\dot{y} = v, \|v\| \leq \beta$

Тут $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in R^2$.





Візуалізація простого переслідування





ВИСНОВКИ

- досліджено сучасний стан розробок методів розв'язку диференціально-різницевих ігор із запізненням
- знайдені достатні умови закінчення гри за гарантований знайдений час для конкретної задачі в умовах двох гравців та групового переслідування
- Розроблено продукт візуалізації траєкторій руху системи при простому переслідуванні



Дякую за увагу!