Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Деякі властивості S-алгебр Лі

Прокопенко Владислав Едуардович, КА-51м
Науковий керівник: Подколзін Гліб Борисович, к.ф.-м.н., доц.

Мета, об’єкт і предмет дослідження

- Мета. Аналіз і узагальнення можливих структур S-алгебр Лі.

- Об’єкт. S-алгебра Лі.

- Предмет дослідження. Властивості таких алгебр.

Актуальність роботи

- Рівняння Янга-Бакстера є основою сучасної теорії квантових груп (Дрінфельд, Джимбо, 1986).
- Розв’язки цього рівняння – R-матриці – задають симетрії різноманітних систем.
- В 1992 році в роботі Д. Гурєвіча при вивченні гіпергруп, що є одним з узагальнень класичних груп, виникли S-алгебри.

Алгебра Лі

Алгебра Лі — векторний простір, на якому визначена операція комутації. Для елементів алгебри визначені лінійні операції — додавання і множення на число. Також визначена білінійна кососиметрична операція — дужка Лі.

$$[X , Y] = - [Y , X]$$

$$[aX + bY , Z] = a[X , Z] + b[Y , Z]$$

Ця операція також повинна задольняти умові Якобі:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

Супералгебра Лі

<u>Супералгеброю Лі</u> називають лінійний простір, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1$ на якому задано функцію градуювання таким чином: $\forall g \in \mathcal{G}_0\ \alpha(g) = 0, \forall g \in \mathcal{G}_1\ \alpha(g) = 1$, та білінійна операція $[\cdot,\cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, для якої виконуються такі властивості:

1) $\alpha([x, y]) = \alpha(x) + \alpha(y)$;

2) $[x, y] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)+1}[y, x]$ — косиметричність;

3) $(-1)^{\alpha(x)\alpha(z)}[x,[y, z]] + (-1)^{\alpha(z)\alpha(y)}[z,[x, y]] + (-1)^{\alpha(y)\alpha(x)}[y,[z, x]] = 0$ — тотожність Якобі.

Постановка задачі

V —лінійний простір

$\mathrm{R}:\mathrm{V}^{\otimes 2}\to\mathrm{V}^{\otimes 2}$ — інволютивний оператор що задовольняє тотожності Янга-Бакстера.

Задамо на V операцію $[\cdot,\cdot]_R : V\otimes V\to V$, що задовольняє умовам симметричночті $[X_j, X_k]_R = R_{jk}^{lm}[X_l, X_m]_R$, та узагальненій умові Якобі.

Структуру $(V,[\ ,\ ]_R:\mathrm{V}^{\otimes 2}\to\mathrm{V})$ назвемо S-алгеброю Лі.

Задача полягає у класифікації таких об'єктів.

Класифікуватимемо за розмірністю комутанту

$$V_1=[V,V]_R$$

Приклад S-алгебри Лі

V —лінійний простір

$\mathrm{R}:\mathrm{V}^{\otimes 2}\to \mathrm{V}^{\otimes 2}$ — інволютивний оператор що задовольняє тотожності Янга-Бакстера.

Введемо позначення:

$$[X,Y]_R=[\ ,\ ]R(X\otimes Y),\ \text{де}\ X,Y\in V$$

$$R\left(X_i\otimes X_j\right)=\sum_{l,m=1}^{\dim V} r_{ij}^{lm}(X_l\otimes X_m)$$, тобто, $$[X_i,X_j]_R=\sum_{l,m=1}^{\dim V} r_{ij}^{lm}\left[X_l,X_m\right]$$

А також $\left[X_i,X_j\right]_R=\sum_{k=1}^{dimV} c_{i,j,k}X_k$

Таким чином задається узагальнена дужка Лі.

Приклад S-алгебри Лі

В дисертації Подколзіна Г.Б. Виник такий природній приклад узагальненої алгебри Лі:

Алгебра задавалася генераторами $y_1, y_{22}, y_{24}, y_{25}, y_{44}$

що мали такі комутаційні співвідношення:

- $[y_{22}, y_1] = [y_1, y_{44}] = 2y_{24} + y_1,$
- $[y_{24}, y_1] = y_{44} - y_{22},$
- $[y_{25}, y_1] = [y_{25}, y_{22}] = [y_{25}, y_{24}] = [y_{25}, y_{44}] = 0,$
- $[y_{44}, y_{22}] = 2y_1 y_{24} + y_1^2 + y_{44} - y_{22},$
- $[y_{24}, y_{22}] = y_1 y_{22},$
- $[y_{44}, y_{24}] = y_{44} y_1,$
- $y_{25}^2 + y_{24}^2 = y_{22} y_{44}$

Примітка

Оскільки $[\cdot,\cdot]_R : V^{\otimes 2} \to V$, тобто $[e_i, e_j]_R = \sum_{p=1}^{\dim V} c_{ij}^p e_p$, де $\{e_p\}_{p=1..\dim V}$ — базис V, то виникає природня умова на структурні константи *C*:

$$c_{ij}^p = \sum_{l,m=1}^{\dim V} r_{ij}^{lm} c_{lm}^p$$

В подальшому *C* записуватимемо у вигляді тензору:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1,1} \\ \vdots \\ c_{1,1,n} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} c_{1,n,1} \\ \vdots \\ c_{1,n,n} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} c_{n,1,1} \\ \vdots \\ c_{n,1,n} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} c_{n,n,1} \\ \vdots \\ c_{n,n,n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Умова Янга-Бакстера

Нехай $R_{12} = R \otimes I$ та $R_{23} = I \otimes \mathrm{R}$, де I це тотожній оператор над простором V. Тоді $R_{12}, R_{23}: \mathrm{V}^{\otimes 3} \to \mathrm{V}^{\otimes 3}$.

Тотожність Янга-Бакстера в операторній формі:

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$$

Або в координатній:

$$\sum_{r,v,a=1}^{\dim V} r_{av}^{qt} r_{ir}^{pa} r_{jk}^{rv} - \sum_{l,m,s}^{\dim V} r_{ls}^{pq} r_{mk}^{st} r_{ij}^{lm} = 0, i, j, k, p, q, t = 1..\dim V$$

Узагальнена умова Якобі

Умова Якобі, що вже згадувалася для алгебри Лі та супералгебри Лі, для узагальненої дужки Лі виглядає наступним чином :

$$\left[\left[e_i,e_j\right],e_k\right]+r_{ij}^{st}r_{tk}^{mn}\left[\left[e_s,e_m\right],e_n\right]+r_{it}^{sm}r_{jk}^{tn}\left[\left[e_s,e_m\right],e_n\right]=0$$

Або в більш простому вигляді:

$$\left[\left[e_i,e_j\right],e_k\right]=\left[e_i,[e_j,e_k]\right]+r_{ij}^{lm}\left[e_l,[e_m,e]\right]$$

Приклад модифікації класичної алгебри Лі

$$R = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_1\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha_2\beta_2 & 0 \\ -\alpha_2^2+\beta_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\alpha_1\beta_1 & 0 & -\beta_1^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2^2+\beta_2^2 & 0 \\ -2\alpha_2\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Тут і далі позначатимемо $\alpha_i = \cos(\phi_i)$, $\beta_i = \sin(\phi_i)$

Структура 1

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ c_{1,2,2} \\ c_{1,2,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ c_{1,3,2} \\ c_{1,3,3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ c_{1,2,2} \\ c_{1,2,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ c_{1,3,2} \\ c_{1,3,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1]_R = 0 \\ [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2]_R = (x_2 c_{1,2,2} + x_3 c_{1,2,3}) \\ [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3]_R = (x_2 c_{1,3,2} + x_3 c_{1,3,3}) \\ [\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1]_R = (x_2 c_{1,2,2} + x_3 c_{1,2,3}) \\ [\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_2]_R = 0 \\ [\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3]_R = 0 \\ [\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_1]_R = (x_2 c_{1,3,2} + x_3 c_{1,3,3}) \\ [\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_2]_R = 0 \\ [\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_3]_R = 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1 = \pi + 2\pi k,$$
$$\phi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$
$$k, n \in Z$$

Структура 2

$$C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{c_{1,2,3}c_{1,3,1}}{c_{1,3,3}} \\ \frac{c_{1,2,3}c_{1,3,2}}{c_{1,3,3}} \\ c_{1,2,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,3,1} \\ c_{1,3,2} \\ c_{1,3,3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{c_{1,2,3}c_{1,3,1}}{c_{1,3,3}} \\ \frac{c_{1,2,3}c_{1,3,2}}{c_{1,3,3}} \\ c_{1,2,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_{1,3,1} \\ c_{1,3,2} \\ c_{1,3,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1]_R = [\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_2]_R = [\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3]_R = [\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_2]_R = [\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_3]_R = 0$$

$$[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2]_R = [\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1]_R = \left(x_1 \frac{c_{1,2,3}c_{1,3,1}}{c_{1,3,3}} + x_2 \frac{c_{1,2,3}c_{1,3,2}}{c_{1,3,3}} + x_3 c_{1,2,3}\right)$$

$$[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3]_R = [\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_1]_R = (x_1 c_{1,3,1} + x_2 c_{1,3,2} + x_3 c_{1,3,3})$$

$$\phi_1 = \pi k,$$
$$\phi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$
$$k, n \in Z$$

Приклад модифікації супералгебри Лі

$$R = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \alpha_1\,\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2\,\alpha_2\,\beta_2 & 0 \\ \alpha_2^2 - \beta_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_1\,\beta_1 & 0 & \beta_1^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2^2 - \beta_2^2 & 0 \\ 2\,\alpha_2\,\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Структура 1. Структурні константи

$$C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_{1,1,2} \\ c_{1,1,3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c_{1,1,3}^2 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^2} \\ \frac{c_{1,1,3}^3 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c_{1,1,3} c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}} \\ -\frac{c_{1,1,3}^2 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c_{1,1,3} c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}} \\ -\frac{c_{1,1,3}^2 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ c_{3,3,2} \\ \frac{c_{1,1,3} c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\phi_1 = \pi + 2\pi k, \quad \phi_2 = \pi + 2\pi n, \quad k, n \in Z$$

Структура 1. Комутаційні співвідношення

$$[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1]_R = (x_2 c_{1,1,2} + x_3 c_{1,1,3}),$$

$$[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2]_R = 0,$$

$$[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3]_R = 0,$$

$$[\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1]_R = 0,$$

$$[\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_2]_R = \left(\frac{x_2 c_{1,1,3}^2 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^2} + \frac{x_3 c_{1,1,3}^3 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^3}\right),$$

$$[\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3]_R = \left(-\frac{x_2 c_{1,1,3} c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}} - \frac{x_3 c_{1,1,3}^2 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^2}\right),$$

$$[\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_1]_R = 0,$$

$$[\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_2]_R = \left(-\frac{x_2 c_{1,1,3} c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}} - \frac{x_3 c_{1,1,3}^2 c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}^2}\right),$$

$$[\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_3]_R = \left(x_2 c_{3,3,2} + \frac{x_3 c_{1,1,3} c_{3,3,2}}{c_{1,1,2}}\right)$$

Висновки

- Було побудовано серії розв’язків рівняння Янга-Бакстера, на їх основі було побудовано S-алгебри Лі.
- 10 сімей S-алгебр Лі було поаналізовано з такими висновками:
    - класична алгебра може перетворитись на супералгебру, обернене перетворення не є можливим;
    - для простору розмірності 3 існуть S-алгебри з нетривіальними ідеалами.

Перспективи подальших досліджень

- Аналіз більших розмірностей: обмеженням виступає обчислювальна складність.
- Теоретичне обгрунтування перетворення класичної алгебри Лі в супералгебру.
- Побудова представлень S-алгебр Лі.

Дякую за увагу!