

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Навчально-науковий комплекс «Інститут
прикладного та системного аналізу»
Кафедра математичного моделювання
системного аналізу

**Магістерська дисертація на тему:
Хаотичні процеси та методи
апроксимації їх параметрів**

**Виконав студент групи КА – 51м Маланчук Олег Володимирович
Науковий керівник: проф. Бондаренко Віктор Григорович**

Актуальність роботи:

- Якісне дослідження динамічних систем
- Оцінка ступеня нестійкості процесу
- Визначення стохастичного процесу

Області застосування:

- ⊙ Медицина
- ⊙ Біологія
- ⊙ Фізика
- ⊙ Економіка



Мета роботи:

- розробка програмного продукту,
- дослідження хаотичності вхідних процесів,
- виведення алгоритмів

Об'єкт дослідження:

- динамічні послідовності

Хаос

Зачинателем теорії Хаосу вважається
Едвард Лоренц



◎ **Теорія хаосу** – це теорія, яка описує і пояснює системи, які складно описати за допомогою математичного апарату.

◎ **Основні властивості хаосу:**

Нестійкість до початкових умов, транзитивність, цикли відображення f щільні в даному просторі.



Експонента Ляпунова

Спектр Ляпунова:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln |M(t, t_0) v_i(t_0)|$$

Впорядкуємо значення спектру Ляпунова:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1,$$

λ_1 - домінантний показник Ляпунова. Саме він є найважливішим параметром динамічної системи.

Найбільший показник Ляпунова

Суть найбільшого показника Ляпунова в наступному:

Динамічна система еволюціонує в різних напрямках з швидкостями, пропорційними до $e^{\lambda_i t}$.

Тому достатньо визначити найбільший показник Ляпунова, щоб зробити висновок, чи розбігатиметься послідовність чи ні.

Отримані алгоритми знаходження показника Ляпунова

**Алгоритм знаходження домінантного показника
Ляпунова для дискретних систем:**

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|$$

**Алгоритм знаходження спектру Ляпунова для будь-
яких систем:**

$$\lambda(i) = \frac{1}{\Delta t_j} \langle \ln d_j(i) \rangle$$

де $d_j(i)$ — різниця між найближчими траєкторіями на j —
ому кроці ітерації

Фрактал Ляпунова

За Маркусем та Ляпуновим:

Фрактал Ляпунова враховує в більшості знак найбільшого показника Ляпунова. Застосовується для дослідження дискретних систем зі змінним параметром.

$$x_n = f(a_n \bmod k, x_{n-1}), k = \text{length}(s)$$

Часто застосовується для моделювання популяції.

Алгоритм побудови фракталу

- Вибираємо непустий рядок S з символів A та B
- Будуємо послідовність таких рядків доти, доки це необхідно
- Вибираємо 2 точки на площині, область між якими будемо досліджувати
- По черзі беремо кожну точку з заданої площини (a, b)
- Генеруємо випадкову точку x_0 , проводимо ітерації $x_k = f(r_k, x_{k-1})$
- Визначаємо на кожному кроці ітерації $r_k = a$ чи b в залежності від $n \bmod \text{length}(S)$
- Для даної послідовності знаходимо показник Ляпунова за вже виведеним алгоритмом
- Розфарбовуємо точку на площині з координатами (a, b) в залежності від величини знайденого показника Ляпунова

Досліджувані рівняння:

1. Логістична послідовність:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

2. Послідовність Рікера:

$$x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}$$

3. Послідовність Гомперца:

$$x_{n+1} = -ax_n \ln x_n + x_n$$

4. Синусоїдальна послідовність:

$$x_{n+1} = a \sin(\pi x_n)$$

5. Колова послідовність:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x_n)$$

6. Гауссівська послідовність:

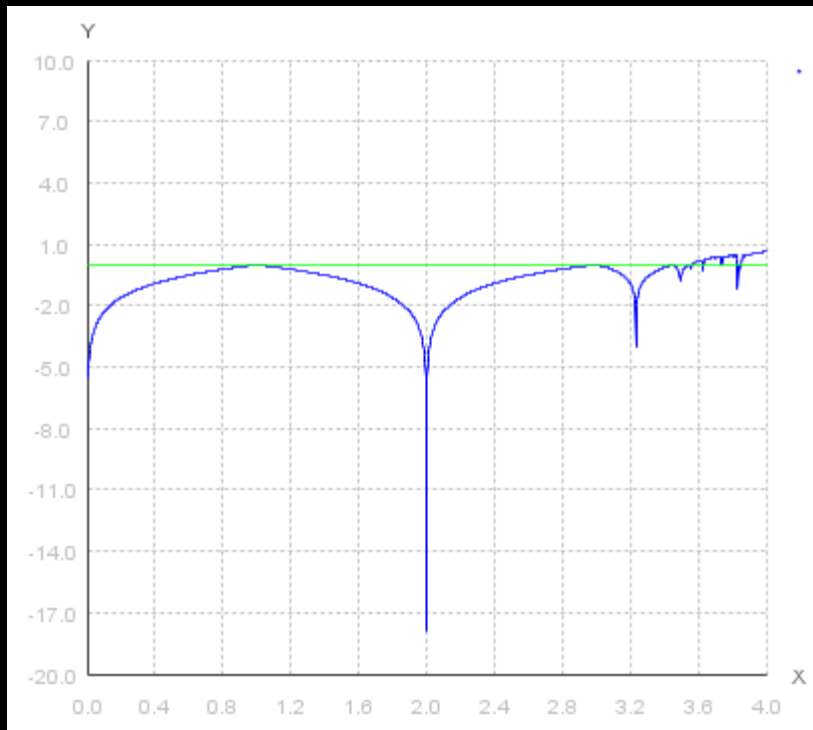
$$x_{n+1} = e^{-ax_n^2}$$

7. Послідовність Тента:

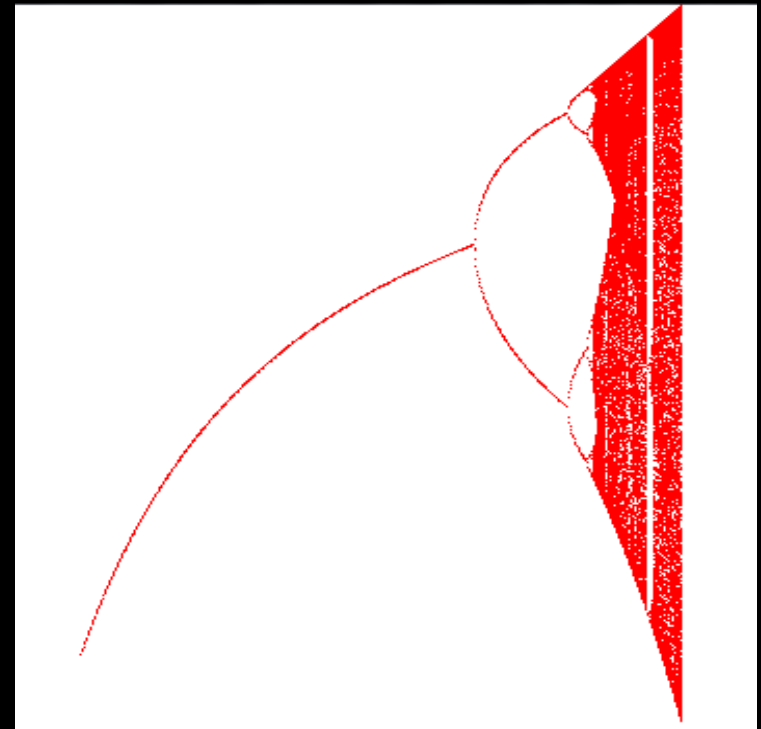
$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n, & x_n < 0.5 \\ a(1 - x_n), & x_n \geq 0.5 \end{cases}$$

Результати роботи програми

Продемонструємо результати роботи програми по знаходженню найбільшого показника Ляпунова



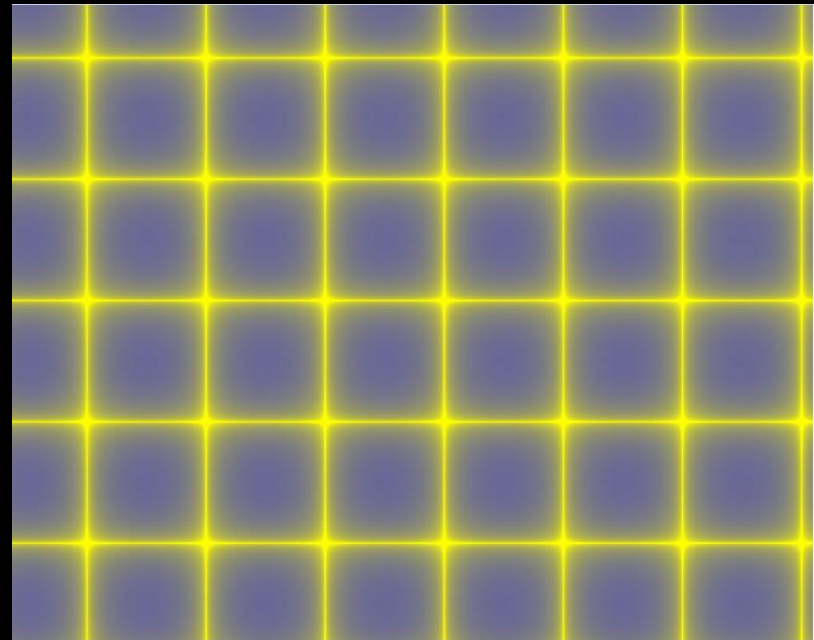
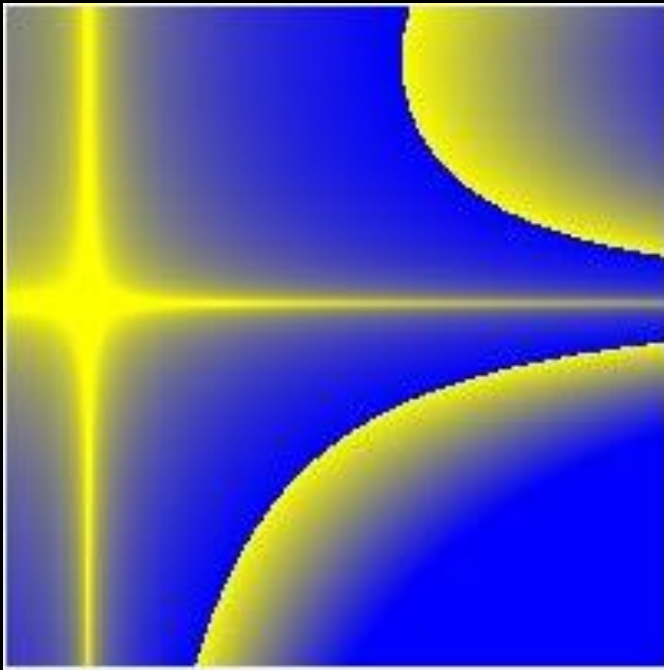
Графік залежності показника Ляпунова в залежності від вхідного параметру



Демонстрація хаотичності процесу

Результати побудови фракталів Ляпунова

Дані результати побудованих фракталів для
синусоїдальної послідовності та логісти для випадкових
параметрів

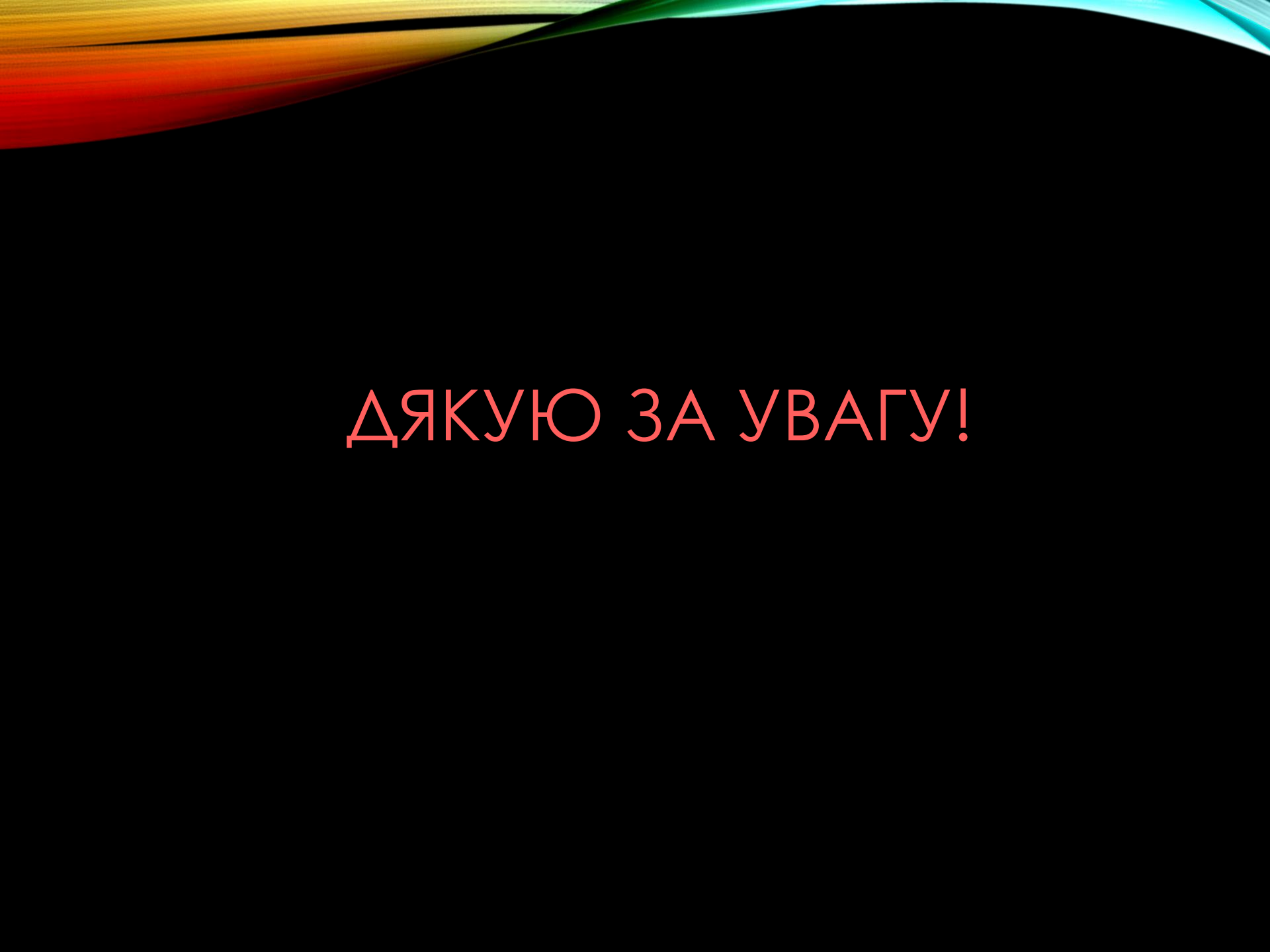


Подальші дослідження

- Розробка
- Швидший метод для знаходження показників
Ляпунова з великою точністю
- Використання складних моделей як вхідних
параметрів програмного продукту
- Дослідження можливості точного прогнозування
хаотичних послідовностей

Висновки

- Було розроблено програмний продукт, що знаходить показник Ляпунова, демонструє хаос на прикладі дискретних систем, будує фрактали Ляпунова.
- Побудовано алгоритми для знаходження найбільшої еспоненти Ляпунова для набору даних
- Розроблено алгоритм визначення, чи є набір даних стохастичним, чи хаотичним
- Розроблено алгоритм побудови фракталів Ляпунова

The background of the slide is primarily black. At the top, there is a decorative horizontal band with a wavy, fluid appearance. This band features a color gradient from left to right: it starts with warm tones of orange and red on the left, transitions through yellow and green in the middle, and ends with cool tones of cyan and blue on the right. The text is centered in the black area below this band.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!