

Прогнозування гетероскедастичних процесів та оцінювання ринкових фінансових ризиків

Виконав студент гр. КА-33
Таран Денис

Науковий керівник:
Бідюк Петро Іванович

Об'єкт, предмет, мета дослідження

- **Об'єкт дослідження** – гетероскедастичні фінансово-економічні процеси, ринковий ризик.
- **Предмет дослідження** – математичні моделі і методи гетероскедастичних процесів, а також моделі оцінювання ринкових ризиків.
- **Метою роботи** є побудова адекватних моделей гетероскедастичних процесів для прогнозування умовної дисперсії та оцінювання ринкових ризиків на їх основі.

Постановка задачі

- 1. Виконати аналіз сучасних методів моделювання та оцінювання ринкових ризиків.
- 2. Зібрати статистичні дані необхідні для виконання обчислювальних експериментів
- 3. Побудувати математичні моделі на основі статистичних даних, оцінити їх адекватність.
- 3. Провести порівняльний аналіз ефективності моделей умовної дисперсії на основі реальних даних, дослідити точність оцінок прогнозів моделей.
- 4. На основі прогнозів умовної дисперсії здійснити оцінювання обраних мір ризику, зокрема VaR та CVaR; порівняти отримані результати

Вибрані моделі для прогнозування умовної дисперсії

- АРУГ
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$
- УАРУГ
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$
- ЕУАРУГ
$$\log[h(k)] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{|\varepsilon(k-i)|}{\sqrt{h(k-i)}} + \sum_{i=1}^p \beta_i \frac{\varepsilon(k-i)}{\sqrt{h(k-i)}} + \sum_{i=1}^q \gamma_i \log[h(k-i)] + v(k)$$
$$h(k) = \frac{1}{w-1} \sum_{i=k-w}^k [y(i) - \bar{y}]^2$$
- Стохастична Волатильність

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = z_t \exp(0,5h_t)$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + v_t$$

Показники адекватності моделей і якості прогнозів

- Сума квадратів похибок моделей (SSE)

$$\sum_{k=1}^N [\hat{y}(k) - y(k)]^2$$

- Статистика Дарбіна-Уотсона (DW)

$$\frac{\sum_{k=2}^N [e(k) - e(k-1)]^2}{\sum_{k=1}^N e^2(k)}$$

- Середня абсолютна похибка (MAE)

$$\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{|\hat{y}_t - y_t|}{h}$$

- Середня абсолютна відсоткова похибка (MAPE)

$$100 \sum_{t=T+1}^{T+h} \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t h} \right|$$

- Коефіцієнт Тейла

$$\frac{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h}}}{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{\hat{y}_t^2}{h} + \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{y_t^2}{h}}}}$$

Алгоритм побудови моделей

- Утворення ряду логарифмованих прибутків від акцій
- Побудова моделі авторегресії 1 порядку
- Побудова ряду квадратів залишків від моделі
- Побудова ряду наближених значень умовної дисперсії як ковзне середнє ряду квадратів залишків

Для побудови моделі АРУГ:

- Оцінювання порядку авторегресії на основі ЧАКФ
- Оцінювання параметрів моделі за допомогою МНК

Розширення моделі до УАРУГ:

- Додання наближених значень умовної дисперсії з запізненням як регресорів

Для побудови моделі ЕУАРУГ:

- Утворення ряду логарифмованих наближених значень умовної дисперсії
- Побудова рядів значень залишків від АР(1) моделі нормованих на корінь з наближеного значення умовної дисперсії
- Оцінювання параметрів моделі за допомогою МНК

Фінансові дані, вибрані для аналізу умовної дисперсії та мір ризику

- Ціни акцій компанії Apple
- Ціни акцій компанії Microsoft
- Ціни акцій компанії Amazon
- Ціни акцій компанії Google
- Ціни акцій компанії Cisco

Оцінка адекватності моделей

	SSE					DW				
	MSFT	GOOG	AAPL	CSCO	AMZN	MSFT	GOOG	AAPL	CSCO	AMZN
ARCH	2,654	2,395	2,1234	2,234	1,976	2,14	2,11	1,97	1,985	1,96
GARCH	2,211	2,001	1,788	2,102	1,765	2,05	2,06	1,98	1,99	1,97
EGARCH	1,999	2,005	1,790	1,911	1,502	2,01	2,02	1,98	1,99	1,99
SV	2,100	1,900	1,890	2,340	1,601	2,02	2,03	1,99	1,99	2,01

Зведена інформація про методи прогнозування

	MAE	MAPE	Theil
ARCH IN	0,000792	38271,054000	0,823200
GARCH IN	0,000113	30,568000	0,235400
EGARCH IN	0,475020	5,746000	0,041000
SV IN	0,696000	8,212000	0,051000
ARCH OFF	0,000632	974,674000	0,768400
GARCH OFF	0,000203	31,804000	0,186800
EGARCH OFF	0,526340	7,018000	0,044200
SV OFF	0,648000	9,142000	0,050200

Методика VaR оцінювання ризику

Нехай L -втрати портфелю акцій, тоді $VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in R: P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$

Переваги VaR:

- Просте для розуміння і інтерпретації з фінансової точки зору, таким чином забезпечуючи ефективний інструмент для управлінських цілей
- Фокусується лише на хвості розподілу, таким чином реагуючи на появу великих рідкісних втрат

Недоліки VaR:

- Не забезпечує інформацію про найбільші втрати які будуть понесені при певній низькій частоті, ігноруючи подальші точки хвоста розподілу.
- Можна навести приклади коли VaR портфелю інвестицій є більшим ніж сума VaR кожного інструменту окремо, що суперечить загальноприйнятим уявленням про роль диверсифікації у зменшенні рівня ризику

Методика CVaR оцінювання ризику

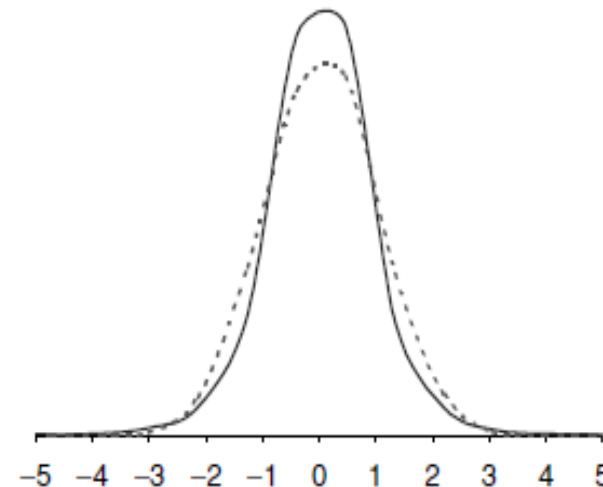
Нехай X -втрати портфелю акцій, тоді

$$CVaR_\alpha = -\frac{1}{\alpha} (E[X_{1\{X \leq x_\alpha\}}] + x_\alpha(\alpha - P[X \leq x_\alpha]))$$
$$x_\alpha = \inf\{x \in R: P[X \leq x] \geq \alpha\},$$
$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in A \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

- CVaR – математичне сподівання втрат, що перевищують VaR
- CVaR містить інформацію про залишок хвоста розподілу за межами VaR
- CVaR є опуклою функцією відносно фінансових інструментів, тобто сума CVaR двох інструментів не перевищує CVaR об'єднаного портфелю. Таким чином CVaR більш реалістично відображає явище диверсифікації ніж VaR.

Використання розподілів з широкими крайніми частинами

- Найчастіше при реалізації параметричних методів VaR є використовують гаусівський розподіл. Проте численні факти суперечать такому припущенню.
- На рисунку показано як відрізняється гаусівська крива (пунктиром) від кривої прибутків від індексу S&P100 з січня 1965 до липня 2003
- Для кращої відповідності моделі реальним даним використовують розподіли з важкими хвостами • В даній роботі взятий експоненційний розподіл для порівняння з результатами нормального розподілу



Алгоритм побудови моделі ризику

Для моделей УАРУГ та ЕУАРУГ:

- Побудова гетероскедастичної моделі і отримання прогнозу умовної дисперсії на десять днів вперед
- На основі отриманої умовної дисперсії будується функція розподілу прибутків від фінансового інструменту
- На основі отриманої функції розподілу визначається VaR як таке значення, що з імовірністю 95% прибутки від фінансового інструменту будуть його перевищувати.

Для моделі стохастичної волатильності:

- Здійснюється симуляція марківського процесу по параметрах моделі поки не досягається стаціонарність
- Для кожної точки після досягнення стаціонарності здійснюється вибірка 100 значень з отриманого розподілу
- Значення сортуються по зростанню, VaR визначається як 5те значення з вибірки 100
- Значення VaR нормується щоб відображати втрати на 10 днів

Прориви VaR та Cvar на прикладі акцій GOOG

Garch		Exponential		egarch		Exponential	
var	Cvar	var	Cvar	var	cvar	var	Cvar
6	2	0	0	11	9	4	0
3	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	7	4	0	0
0	0	0	0	5	4	0	0
2	0	0	0	16	13	7	2
0	0	0	0	11	5	0	0
13	1	0	0	10	7	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
25	21	14	8	10	5	6	4
1	0	0	0	3	1	0	0
1	0	0	0	3	1	0	0
7	3	17	17	1	0	5	3
0	0	0	0	3	2	0	0
0,04558	0,01911	0,02279	0,01838	0,06397	0,03823	0,00808	0,00141

Надлишкові резерви на прикладі акцій GOOG

Garch				egarch			
normal		Exponential		normal		Exponential	
var	Cvar	var	cvar	var	Cvar	var	Cvar
10148	11932	17119	22481	8944	9039	10760	13848
7673	9445	13735	18136	7061	8749	12720	16793
11317	14047	20409	26934	7753	8733	12402	16340
16007	19522	27667	36021	14182	15725	20635	26717
7138	9224	14252	19408	7227	7044	7922	9947
11804	15080	22673	30460	8045	8588	11923	16237
7668	8609	12660	16837	7174	7757	10767	14334
11848	14001	18991	24108	9186	10680	14142	17693
17846	21741	30767	40023	13909	16455	22964	29701
9650	11315	15446	19728	9772	11649	15997	20457
18216	22844	33569	44567	10962	13794	20357	27087
25627	32439	48929	65840	17355	20874	32044	43500
11582	13730	18745	23889	9144	10495	13937	17526
4863	5663	18630	26324	5901	7060	9857	12725
21315	19773	19630	22158	11443	12425	18690	26171
9950	12673	18981	25451	7540	9158	13690	18450
12723,1	15198,2	22045,4	28901,8	9647,52	11051,76	15389,35	20210,71

Узагальнене значення статистики неефективного використання капіталу при використанні АРУГ і УАРУГ

	garch				egarch			
	normal		exponential		normal		Exponential	
	var	Cvar	var	cvar	var	Cvar	var	cvar
Microsoft	10675	12973	20185	26791	8600,4	10011	14115	18592
Google	12723	15198	22045	28902	9647,5	11052	15389	20211
Apple	15810	19360	33273	44594	11665	13650	19428	25658
Cisco	13314	15897	23791	31493	10742	12033	15875	20352
Amazon	13633	15753	22988	30450	10453	11499	15998	21243
Average	13231	15836	24456	32445	10221	11649	16160	21211

Порівняння результатів моделі стохастичної волатильності з результатами АРУГ і УАРУГ на прикладі акцій GOOG

Garch	Egarch	SV	Garch	Egarch	SV
var breaks	var breaks	var breaks	Cost	Cost	cost
0	4	0	17119	10760	13600
0	0	2	13735	12720	12800
0	0	3	20409	12402	13243
0	0	2	27667	20635	14536
0	7	2	14252	7922	10316
0	0	5	22673	11923	12459
0	0	2	12660	10767	11555
0	0	0	18991	14142	13439
0	0	2	30767	22964	15207
0	0	0	15446	15997	15649
0	0	7	33569	20357	15449
14	6	6	48929	32044	16358
0	0	4	18745	13937	14930
0	0	7	18630	9857	12208
17	5	7	19630	18690	14321
0	0	5	18981	13690	13610
0,02297	0,00808	0,04188	22045,4	15389,35	13741,71

Висновки

- Розглянуто загальну методологію моделювання і прогнозування гетероскедастичних фінансово-економічних процесів з використанням статистичних даних руху акцій та оцінювання ризикової вартості з їх допомогою.
- На основі статистичних даних руху акцій побудовані математичні моделі умовної дисперсії вибраних фінансових біржових процесів.
- Для оцінювання моделей процесів оцінок прогнозів використані множини статистичних критеріїв адекватності моделей та якості оцінок прогнозів.
- За допомогою оцінок прогнозів умовної дисперсії виконано обчислення обсягів можливих фінансових втрат при виконанні торгівельних операцій на біржі за допомогою методології VaR та CVaR.
- Отримані результати моделювання, прогнозування та оцінювання ризику свідчать про високу ефективність використаного підходу до аналізу гетероскедастичних процесів.