

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”**

**Деякі підходи до побудови оптимальних
стратегій пригнічення корупції з
використанням математичного
моделювання та оптимізації**

Виконали студенти групи КА-31

Круть Валерія

Новиков Владислав

Науковий керівник;

к.ф.-м.н., доцент Яковлева А.П.

Актуальність роботи

- Одним з пріоритетів Стратегії сталого розвитку «Україна - 2020», яку презентував Президент України П.П. Порошенко 27 вересня 2014 р., є боротьба з корупцією, тобто серед ключових реформ глава держави називає антикорупційну реформу. Це є свідченням того, що проблема боротьби з корупцією є однією з найактуальніших соціальних проблем сучасності, вирішення якої є надзвичайно важливою справою.
- **Актуальність** теми зумовлюється загостренням проблеми поширення корупції в Україні, збільшення різноманітності форм її проявів на сучасному етапі в процесі становлення і розвитку як економічної, так і політичної системи України, її впливом на всі сфери життєдіяльності суспільства, а також необхідністю посилення боротьби з цим протиправним явищем та наслідками, які воно викликає.

Об'єкт, предмет і мета дослідження

- **Метою** даної дипломної роботи є детальний розгляд деяких підходів до боротьби з корупцією, побудова їх математичних моделей, аналіз та знаходження розв'язку поставлених оптимізаційних задач.
- **Об'єкт дослідження:** корупція, її сутність, причини виникнення та шляхи подолання.
- **Предмет дослідження:** методи математичного моделювання та оптимізації, які застосовуються в задачах боротьби з корупцією.
- **Методи дослідження:** для побудови математичних моделей використані математичний аналіз, теорія ігор та методи оптимізації.

Постановка задачі

- Аналіз предметної області, вибір методів математичного моделювання і розв'язання оптимізаційних задач;
- Застосування принципу максимуму Понтрягіна та теорії ігор до задачі пригнічення корупції;
- Математична формалізація поставленої задачі;
- Її розв'язання та аналіз отриманих результатів.

Пригнічення корупції з використанням оптимального керування.

Опис моделі:

$u(t)$ - фактичний рівень корупції чиновників

$x(t)$ - очікуваний рівень корупції

β - швидкість:

$$\dot{x} = \beta (u - x)$$

x_0 - початковий стан ($x_0 \in [0, 1]$)

$u(1-x)C, C > 0$ - шкідливість корупції (втрата репутації)

r - облікова ставка

$$\left\{ \begin{array}{l} \max J = \int_0^{\infty} e^{-rt} [U(u) - u(1-x)C] dt \\ \dot{x} = \beta (u - x) \\ x(0) = x_0 \in [0, 1] \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, \infty] \end{array} \right.$$

Функція корисності:

Розглядались функції, що підпорядковуються припущенню: $U(0) = 0, U'(u) > 0, U''(u) \leq 0$.

В ході дослідження були проаналізовані випадки з різними типами функцій корисності, а саме:

1. Лінійна функція $U(u) = \alpha u$ в загальному випадку.
2. Увігнута функція накопичення корупції:
 - а) $U(u) = \alpha \ln(1 + u)$
 - б) $U(u) = -\alpha e^{-u+1}$

Найважливіші результати дослідження:

Нехай функцій корисності $U(u)$ - лінійна. Якщо $\alpha \geq \frac{rC}{r+\beta}$, то оптимальна траєкторія збігається з корупційною рівновагою незважаючи на початкове значення x . Якщо $\alpha < \frac{rC}{r+\beta}$, то існує єдина точка $\hat{x} = 1 - \frac{(r+\beta)\alpha}{rC} > 0$ така, що для $x_0 \leq \hat{x}$ оптимальна траєкторія збігається з чесною рівновагою, в той час як для $x_0 > \hat{x}$ оптимальна траєкторія збігається з корупційною рівновагою.

Найважливіші результати дослідження:

Нехай функція корисності має вигляд: $U(u) = \ln(1 + u)$ або $U(u) = -\alpha e^{-u+1}$. Для $\alpha \geq C$ будь яка оптимальна траєкторія збігається з корупційною рівновагою. Для $\alpha < C$ канонічна система має три рівноваги, де чесна і корупційна рівноваги - це сідлові точки і внутрішня рівновага, яка знаходиться між ними, є вироджений вузол. Будь яка з оптимальних траєкторій в кінці кінців наближається до однієї з двох рівноваг на границі.

Найважливіші результати дослідження:

- При $U(u) = \ln(1 + u)$ доведено, що очікуваний рівень корупції можна обрахувати за наступною формулою:

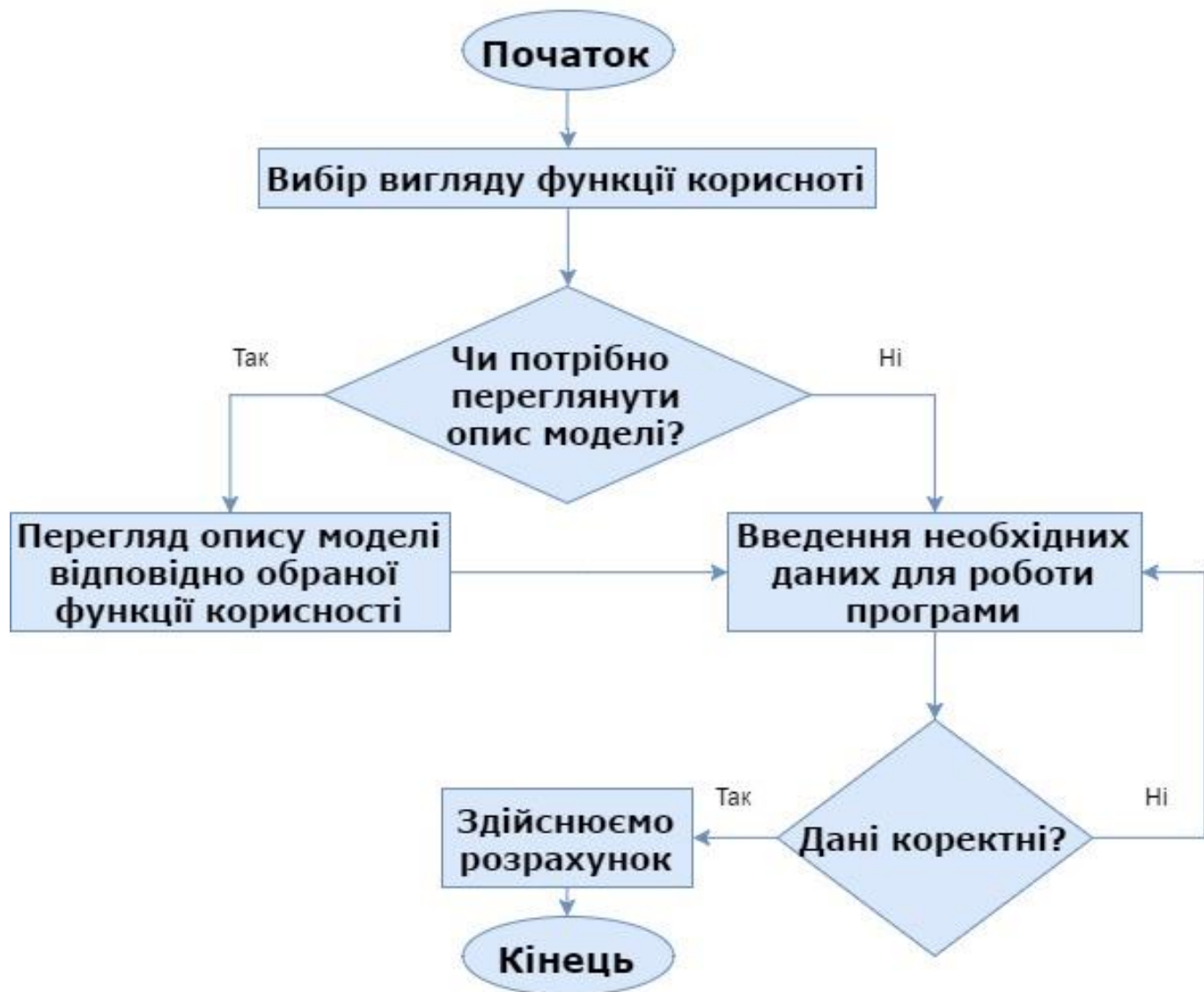
$$x^* = \frac{-C\beta + \sqrt{C^2\beta^2 - 4C(\alpha - C)(r + \beta)(r + 2\beta)}}{2C(r + 2\beta)}$$

А при $U(u) = -\alpha e^{-u+1}$ розв'язок канонічної системи в аналітичному вигляді знайти не вдалось, але показано, що він має задовольняє рівність:

$$\ln\left(\frac{C + \frac{r}{r + \beta}x}{\alpha}\right) = 1 - x,$$

що дозволяє легко знайти розв'язок програмним шляхом.

Блок-схема розробленої програми



Приклад роботи програми з лінійною функцією накопичення корупції. Введення необхідних даних

Принцип максимуму Понтрягіна у задачі пригнічення корупції

Лінійний випадок $U(u) = \alpha u$

Результат:

α :

β :

γ :

C :

x_0 :

Отримані результати:

Принцип максимуму Понтрягіна у задачі пригнічення корупції

Лінійний випадок $U(u) = \alpha u$

α :

1

β :

2

γ :

4

C :

3

x_0 :

0,4

Опис моделі

Обчислити

Результат:

Оптимальна траєкторія $x^* = 0,5$. В даному випадку оптимальна траєкторія збігається з чесною рівновагою. Це означає, що при подальшому зменшенні корупційного рівня в довгостроковій перспективі явище корупції повністю зникне в даному населенні.

Приклад роботи програми з увігнутою функцією накопичення корупції. Введення необхідних даних

Принцип максимуму Понтрягіна у задачі пригнічення корупції

Увігнутий при $U(u) = \alpha \ln(\mu + u)$ ▾

Результат:

α:

β:

γ:

С:

x0:

μ:

Отримані результати:

 Принцип максимуму Понтрягіна у задачі пригнічення корупції

Увігнутий при $U(u) = \alpha \ln(\mu + u)$ 

α :

β :

γ :

C :

x_0 :

μ :

Опис моделі

Обчислити

Результат:

Оскільки $\alpha = 5 \geq C = 4$, то оптимальна траєкторія збігається з корупційною рівновагою незважаючи на початкове значення x . В даному випадку α є великим, тобто є велика гранична корисність корупційної активності і населення адаптує свої переконання досить швидко до існуючих фактів, які означають, що шкідливість від втрати репутації буде швидко зменшуватись.

Пригнічення корупції з використанням теорії ігор.

Опис моделі:

θ - ім'я або номер підлеглого; $\theta \in \{1, \dots, N\}$

$z(\theta)$ - зроблений ним вибір, тобто частота прийняття хабаря або участі в зговорі;

$b(\theta)$ - корупційні можливості, які характеризують підлеглого θ ($b(\theta)$ вважається неспадною по θ та дискретною);

$G(\cdot)$ - функція розподілення агентів по корупційним можливостям;

$G(b)$ - доля тих θ , для яких: $b(\theta) < b$;

$F(\cdot)$ - функція розподілу агентів по їх вибору; апостеріорна характеристика (на відміну від $G(\cdot)$), яка відображає профіль вибраних всіма агентами рівнів порушення;

$F(z)$ - доля тих θ , для яких $z(\theta) \leq z$.

$q = \begin{pmatrix} z(1) \\ \dots \\ z(N) \end{pmatrix}$ - профіль порушень

Пригнічення корупції з використанням теорії ігор.

Опис моделі:

A - загальна кількість перевірок, яка відповідає вибраній стратегії Центру;

$A(\cdot)$ - кумулятивний розподіл перевірок по рівням порушень агентів у відповідності з вибраною стратегією Центру;

m - вартість однієї перевірки;

$\lambda(\cdot) = \lambda_q(\cdot) = \lambda_{F(\cdot)}(\cdot)$ - виникаючий в результаті вибору і об'явлення Центром вибраної стратегії, а також сформованого профілю виборів q , розподіл загального числа перевірок по спостережуваним виборам частот вступу у зговор z ;

D - питома величина штрафу;

$X(q) = \int_0^1 x(\theta)q(\theta)d\theta$ - цільовий функціонал, який максимізується Центром за допомогою вибору тієї чи іншої стратегії $A(\cdot)$.

Пригнічення корупції з використанням теорії ігор.

Опис моделі:

Нехай Центр вибрав і оголосив деяку стратегію S , яка характеризується набором:

$$(A_1, z_1; \dots; A_k, z_k)$$

де $A = \sum_i A_i$ і A_i перевірок додатково порівну розподіляються між агентами, які обрали $z > z_i$. Тоді, якщо профіль виборів порушень є q (а відповідний розподіл порушників по рівням порушень $z \in F(\cdot)$), то $\forall i$ частка агентів, які обрали частоту зговору вище z_i , дорівнює $1 - F(z_i)$, і саме між ними розподіляються додаткові перевірки A_i . Тому інтенсивність моніторингу порушника, який обрав z , визначається за формулою:

$$\lambda(z, F(\cdot)) = \sum_{\{i: z_i < z\}} \frac{A_i}{1 - F(z_i)}$$

Це і є закон, або правило, трансформації профілю виборів агентів в профіль розподілу перевірок, що відповідають даній стратегії Центру S .

Важливий результат дослідження:

У випадку однотипних агентів, розуміючи корупційні можливості агентів, Центр може знизити загальний рівень корупції до рівня $1 - DA/b$.

В процесі дослідження виявлений так званий ефект ланцюгової реакції, який полягає в тому, що агенти із все зростаючими корупційними можливостями послідовно відмовляються від участі в корупції по мірі того, як їх стає все менше і питомі затрати засобів по перевірці їх дій спонтанно зростають.

Приклад роботи програми Введення необхідних даних

Оцінка стратегій роботи центру

Максимальна кількість ресурсів	45
Поріг для додаткових перевірок	0,8
Кількість агентів	3
Розмір хабара b	150
Розмір штрафу	213

Розрахувати

Отримані результати:

 Оцінка стратегій роботи центру ×

Максимальна кількість ресурсів	45
Поріг для додаткових перевірок	0,8
Кількість агентів	3
Розмір хабара b	150
Розмір штрафу	213

Розрахувати

Очікуваний рівень корупції за даними значеннями: 0,46526867627785

Приклад роботи програми зі зменшенням кількості перевірок

 Оцінка стратегій роботи центру

Максимальна кількість ресурсів

25

Поріг для додаткових перевірок

0,8

Кількість агентів

3

Розмір хабара b

150

Розмір штрафу

213

Розрахувати

Очікуваний рівень корупції за даними значеннями: 0,63849765258216

Висновки

- Проаналізовано предметну область, здійснено огляд вітчизняної та зарубіжної літератури по даній темі;
- Побудовано математичну модель поставленої задачі з використанням принципу максимуму Понтрягіна та ігрового підходу;
- Спроектовано та реалізовано програмний продукт для оцінки методу боротьби з корупцією на основі побудованої моделі;
- Проаналізовано отримані результати.

Перспективи для подальших досліджень

- В майбутній дослідженнях запропонована модель з використанням принципу максимуму Понтрягіна може бути розширена в декількох напрямках. Найбільш природне розширення - це ввести репутацію чиновника, як другу змінну стану і відрегулювати модель в очевидний спосіб. Результати двох-змінної моделі повинні викликати більший спектр наслідків, ніж простіша модель, яка розглянута тут.
- Також корисно вивести принцип оптимального ділення клієнтів на групи в тому випадку, коли це ділення проводиться Центром, і отримати формулу для визначення сумарного збитку від корупції, за умови застосування Центром оптимальної стратегії верифікації.

Публікації результатів дослідження проведеного в даній роботі

Дослідження, яке проводились в рамках цієї роботи, а саме пригнічення корупції з використанням принципу максимуму Потрягіна, та його результати, були опубліковані в матеріалах міжнародної наукової конференції «Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту (ISDMCI'2017)»

Дякуємо за увагу!