

# Використання моделі поєднаних марківських ланцюгів для оцінювання кредитних ризиків

Автор: студент 6-го курсу, групи КА-41м  
ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ»  
Вероцький Денис Сергійович  
Керівник: к.ф.-м.н., доцент  
Каніовська Ірина Юріївна

# Опис дослідження

Об'єкт дослідження:

Портфелі боргових зобов'язань.

Предмет дослідження:

Методи оцінювання ризиків кредитних портфелів за допомогою марківських поєднаних ланцюгів.

Цілі:

- Застосувати модель поєднаних марківських ланцюгів до українських економічних суб'єктів
- Розв'язати задачу оцінювання невідомих параметрів даної моделі
- Знайти оптимальний кредитний портфель

# Постановка задачі

На рівні підприємства повномірне застосування різноманітних боргових фінансових інструментів дозволяє без втрати контролю над підприємством залучити необхідні для розвитку позикові кошти.

Можна отримати та оцінити кредитний рейтинг окремих суб'єктів завдяки численним фінансовим агенствам, проте поведінка всього портфеля залежить від структури та взаємодії компонент портфеля, тому виникає потреба в моделі для спільної поведінки декількох економічних суб'єктів.

Для кредитних портфелів в Україні, що складаються з боргових зобов'язань суб'єктів з різних секторів економіки, ставиться задача знаходження оптимального портфеля за допомогою моделі поєднаних марківських ланцюгів.

# Основні припущення

Портфель складається з боргових зобов'язань економічних суб'єктів, що мають різні кредитні рейтинги та належать до різних секторів економіки.

- Кожне окреме переміщення суб'єкта між кредитними класами визначається спільною марківською матрицею переходів
- Всі переміщення є залежними, тобто суб'єкти з різних кредитних класів і секторів впливають один на одного.
- Суб'єкти, що належать до одного кредитного класу та сектора економіки не розрізняються.

# Математична модель

Розглядається диверсифікований кредитний портфель різних економічних суб'єктів.  $M$  – кількість кредитних класів ( $M+1$ -ий стан – банкрутство).

$P_{M \times M+1} = (p_{ij})$  – матриця перехідних ймовірностей.  $p_{ij}$  – ймовірність, що суб'єкт з  $i$ -им кредитним рейтингом перейде в  $j$ -ий кредитний рейтинг на кінець періоду.

Кредитний портфель для  $N$  суб'єктів моделюється наступним дискретним багатовимірним випадковим процесом  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ .

$X_i(t)$  – марківський ланцюг, що описується матрицею  $P$  з  $M+1$ -им поглинаючим станом.

# Кредитний рейтинг суб'єкта

На процес зміни кредитного рейтингу суб'єктів впливають індивідуальні та спільні для кожного кредитного класу чинники:

$$X_n = \delta_n \xi_n + (1 - \delta_n) \eta_{m(n)}$$

$\delta_n$  – незалежні бернулівські випадкові величини, такі що задаються параметрами  $q_{m(n),s(n)}$ .

$\xi_n$  – незалежні індивідуальні фактори.

$\eta_{m(n)}$  – незалежні від  $\xi_n$  загальні фактори.

# Необхідні вхідні дані для застосування моделі

Для застосування даної моделі потрібні наступні дані:

- Початковий стан портфеля.
- Ймовірність зміни кредитного рейтингу для кожного компонента портфеля окремо (матриця  $P$ ).
- $P_{\chi}(\vec{\chi} = \bar{\chi})$  – спільний розподіл вектора тенденцій  $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_M)$ .  $\chi_i(t)$  – бернулівські випадкові величини, задають покращення чи погіршення рейтингу для кредитного класу.
- $Q = (q_{si})$  – коефіцієнти, що виражають вагу між індивідуальними та загальними факторами для кожного кредитного класу та сектора.

# Метод оцінювання параметрів

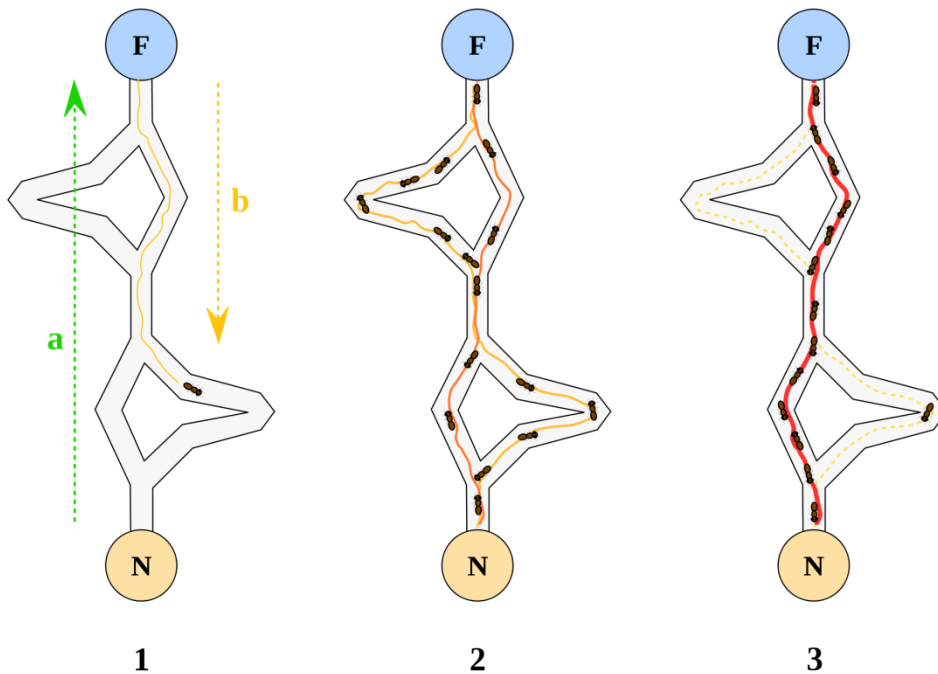
Для відомої історії змін кредитних рейтингів суб'єктів за  $T$  періодів часу (вибірка  $x = (x^0, \dots, x^T) \in \mathbb{R}^{N \times (T+1)}$ ) розглядається задача максимізації функції правдоподібності:

$$\max_{Q, P_\chi} L(x; Q, P_\chi)$$
$$L(x; Q, P_\chi) = \prod_{t=1}^T \mathbb{P}(X^t = x^t | X^{t-1} = x^{t-1})$$

З рейтингової історії знаходяться групи  $N^t(s, m_1, m_2)$  – число суб'єктів в секторі  $s$ , що перейшли з кредитного класу  $m_1$  до класу  $m_2$  за період часу  $t$ .



# Мурашиний алгоритм для неперервних областей



- $ACO_{\mathbb{R}}$  — розширення звичайно мурашиного алгоритму.
- Виконання алгоритма може бути адаптовано в залежності від потреби більшої надійності чи швидкості.
- Легко може бути узагальненим для дискретно-неперервної задачі оптимізації.

# Застосування моделі на прикладі українських суб'єктів

| Сектор        | Кредитний клас   |                 |                |                       | Загальна кількість |
|---------------|------------------|-----------------|----------------|-----------------------|--------------------|
|               | 1<br>uaAAA, uaAA | 2<br>uaA, uaBBB | 3<br>uaBB, uaB | 4<br>uaCCC, uaCC, uaC |                    |
| Корпоративний | 1                | 17              | 30             | 17                    | 65                 |
| Державний     | 2                | 11              | 1              | 1                     | 15                 |
| Фінансовий    | 4                | 31              | 7              | 1                     | 43                 |

Матриця переходів має вигляд:

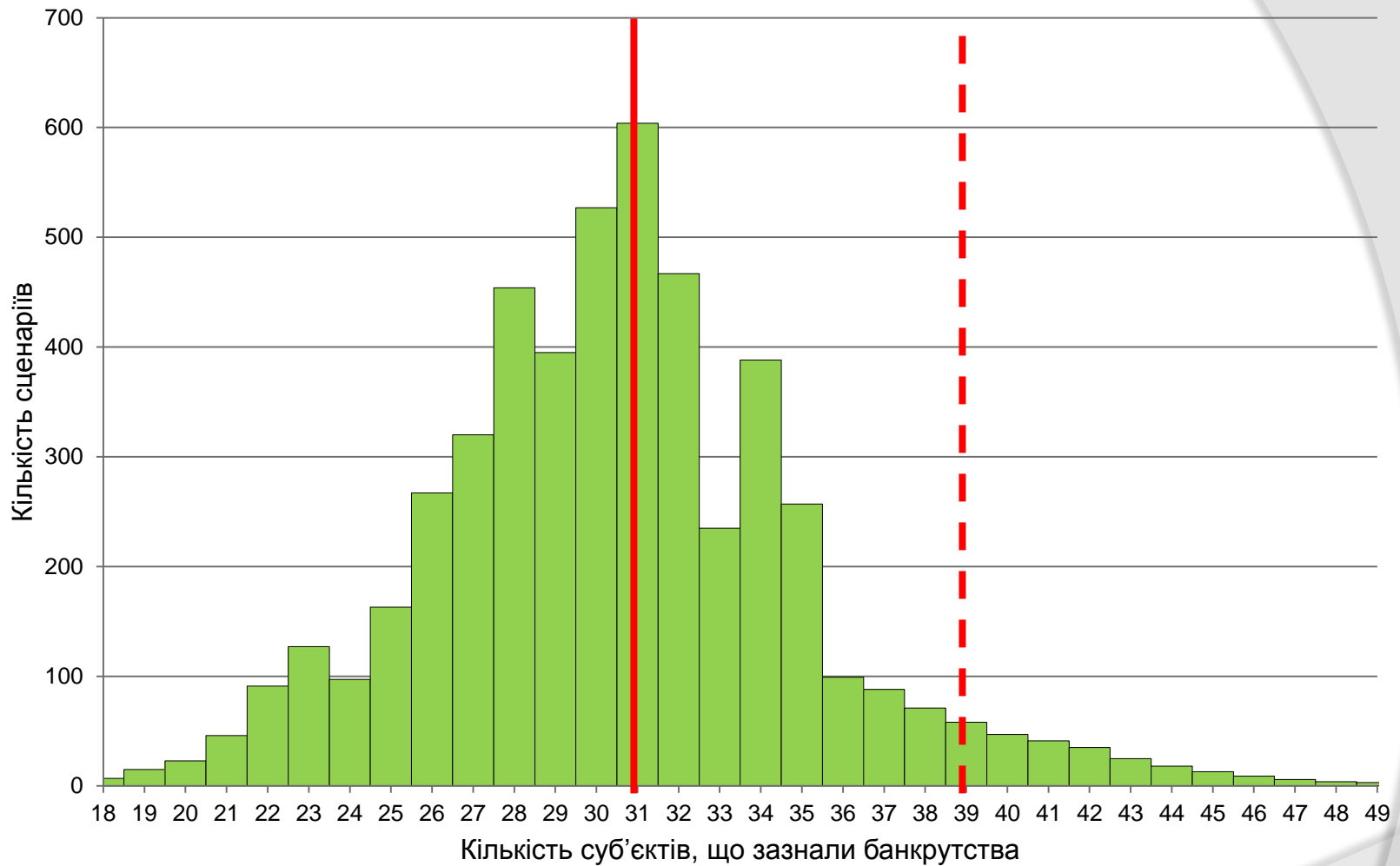
$$P = \begin{pmatrix} 0,8653 & 0,1165 & 0,0115 & 0,005 & 0,0045 \\ 0,0321 & 0,7923 & 0,1611 & 0,0132 & 0,0013 \\ 0,0125 & 0,0687 & 0,6822 & 0,1821 & 0,0545 \\ 0,0001 & 0,0043 & 0,1121 & 0,5652 & 0,3183 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \end{pmatrix}$$



# Кількість банкрутів

Кількість суб'єктів, що зазнають банкрутства через 6, 12 та 18 місяців відповідно згідно моделі поєднаних марківських ланцюгів.

| Сектор        | 2015 II<br>( $t = 0$ ) | 2016 I |           | 2016 II |           | 2017 I |           |
|---------------|------------------------|--------|-----------|---------|-----------|--------|-----------|
|               |                        | uaD    | 95% - кв. | uaD     | 95% - кв. | uaD    | 95% - кв. |
| Корпоративний | 65                     | 6      | 8         | 11      | 14        | 15     | 18        |
| Державний     | 15                     | 1      | 2         | 2       | 4         | 3      | 5         |
| Фінансовий    | 43                     | 5      | 7         | 9       | 12        | 13     | 16        |
| Загалом       | 123                    | 12     | 17        | 22      | 30        | 31     | 39        |



Кількість суб'єктів, що зазнали банкрутства через 18 місяців (вбірккове середнє та 95% квантиль) для 5000 сценаріїв.

# Оптимальний портфель

$$\begin{aligned} & \min_{\vec{\omega}, \vec{z}} \text{CVaR}_\alpha(\vec{\omega}^\top \vec{B}) \\ & \omega_i \in [a_i z_i, b_i z_i], \forall i: 1 \leq i \leq N \\ & \vec{\omega}^\top \mathbb{1} = 1 \\ & \mathbb{E}(\vec{\omega}^\top \vec{B}) \leq e \\ & z_i \in \{0, 1\}, \forall i: 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

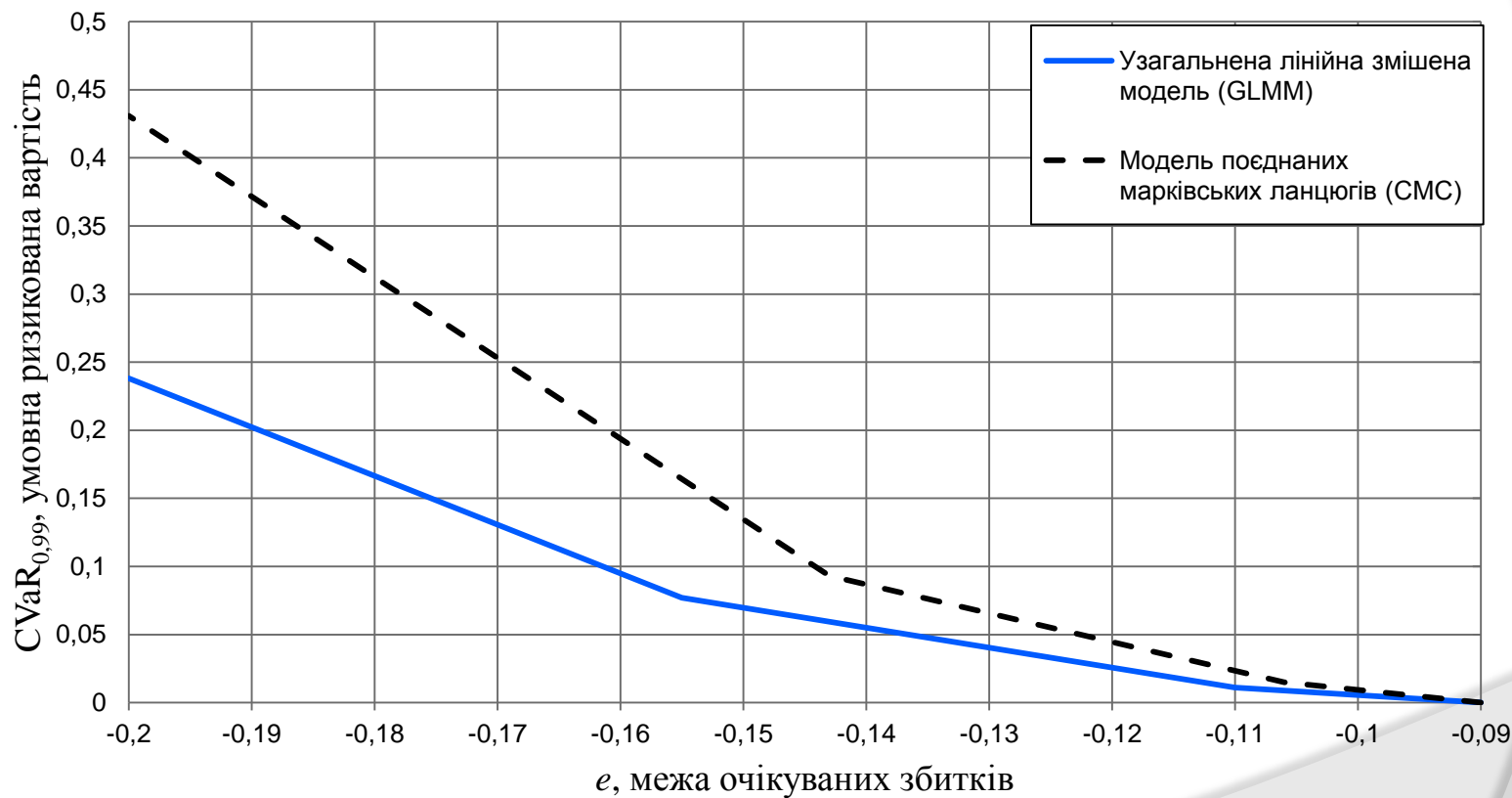
CVaR – умовна вартісна міра ризику.

$\vec{B}$  – вектор очікуваних збитків компонент портфеля.

$e$  – безризикова ставка на відповідний проміжок часу.

$\omega_i$  – невідомі ваги компонент портфеля.

# Порівняння моделей СМС та GLMM



# Знаходження оптимального портфеля

Порівняння оптимального портфеля, отриманого за допомогою моделі поєднаних марківських ланцюгів та узагальненої лінійної змішаної моделі (у дужках).

| Сектор        | Кредитний клас   |                 |                |                       |
|---------------|------------------|-----------------|----------------|-----------------------|
|               | 1<br>uaAAA, uaAA | 2<br>uaA, uaBBB | 3<br>uaBB, uaB | 4<br>uaCCC, uaCC, uaC |
| Корпоративний | 0.25 (0.25)      | 0.25 (0.17)     | 0 (0)          | 0 (0)                 |
| Муніципальний | 0.25 (0.25)      | 0.16 (0.08)     | 0 (0)          | 0 (0)                 |
| Фінансовий    | 0.09 (0.25)      | 0 (0)           | 0 (0)          | 0 (0)                 |



# Висновки

- Застосовано модель поєднаних марківських ланцюгів до задачі оцінювання ризиків кредитних портфелів, що складаються з боргових зобов'язань українських економічних суб'єктів.
- Розв'язано задачу оцінювання невідомих параметрів даної моделі за допомогою метода максимальної правдоподібності і мурашиного алгоритму для неперервних областей.
- Для проміжку часу з 2016 по середину 2017 року було знайдено оптимальний кредитний портфель, що виявився більш компромісний у порівнянні з узагальненою лінійною змішаною моделлю.

Дякую за увагу