

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС "ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО
СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ"
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ "КИЇВСЬКИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Порівняльний аналіз методів формування портфелю цінних паперів

Виконала:
студентка 4-го курсу
групи КА-21 ІПСА «КПІ»
Ольга Тупко

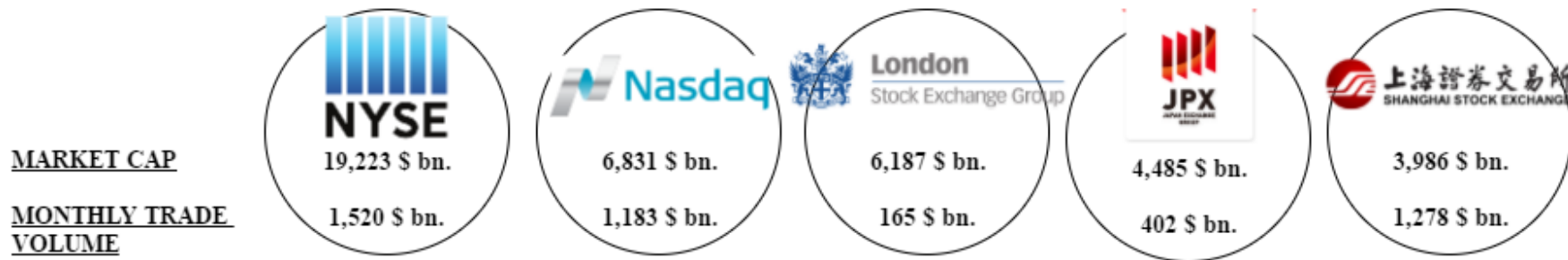
Керівник:
к. ф.-м. н., доцент Каніовська І. Ю.

Вступ

- ▶ **Об'єкт дослідження:** цінні папери (акції), портфель цінних паперів
- ▶ **Предмет дослідження:** застосування копул для побудови оптимального портфелю цінних паперів
- ▶ **Мета дослідження:** проаналізувати предмет дослідження та дослідити ефективність застосування копул у задачах оптимізації портфелю у порівнянні з класичними методами
- ▶ **Методи дослідження:** методи портфельного менеджменту, методи стохастичної та детерміністичної оптимізації.

Актуальність

- ▶ Виникнення першої фондової біржі датується 1602 р. (м. Амстердам)
- ▶ Станом на 2015 рік акції близько з **600 000** компаній обертаються на фондових ринках по всьому світу.
- ▶ Топ 5 найбільших фондових бірж (31 січня 2015 р.):



- ▶ Інвестиційний менеджмент



Огляд моделей

- ▶ З точки зору мінімізації фінансових ризиків доцільно працювати з диверсифікованим портфелем цінних паперів



- ▶ Задача інвестиційного менеджменту - *оптимізація портфелю цінних паперів*: мінімізація ризику за заданого рівня прибутковості
- ▶ *Класичний підхід до оптимізації портфелю* був запропонований Г. Марковіцем у 1952 році. Його активне застосування - кін.1990-х рр.
- ▶ Фінансова криза 2007-2008 років продемонструвала *неадекватність класичного підходу Марковіца* в умовах сучасної волатильної економіки.
- ▶ Тому виникає необхідність *дослідження альтернативних і більш коректних методів* оптимізації портфелю цінних паперів, зокрема *методу на базі копул*.

Постановка класичної задачі оптимізації портфелю

- ▶ Г. Марковіцем «Portfolio Selection» 1952 р.
- ▶ Припущення моделі:
 - ▶ Розгляд диверсифікованого портфелю цінних паперів
 - ▶ $(R^1 \ R^2 \ \dots \ R^d)^T \in N(\mu, \Sigma)$, де R^i – ВВ, дохідність i акції у портфелі, $i \in \overline{1, d}$;
 - ▶ $\omega^T R = \omega_1 R^1 + \omega_2 R^2 + \dots + \omega_d R^d \in N(\omega^T \mu, \omega^T \Sigma \omega)$ – ВВ, дохідність портфелю в цілому;
 - ▶ У якості міри ризику приймається дисперсія ВВ, рівня дохідності – математичне сподівання ВВ.
- ▶ Математична постановка задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \rightarrow \min_{\omega} \\ \sum_{i=1}^d \omega_i \mu_i \geq R \\ \sum_{i=1}^d \omega_i = 1 \\ \omega_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, d \end{array} \right.$$

Постановка задачі оптимізації портфелю на базі копул

- ▶ Відкидається припущення про нормальність розподілу дохідностей акцій
- ▶ Відновлюється розподіл дохідностей акцій
- ▶ У якості міри ризику приймається Value-at-Risk (VaR):

$$VaR_{\alpha} = \inf \{R \in \mathbb{R} \mid P(Returns \leq R) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{R \in \mathbb{R} \mid F_{Returns}(R) \leq 1 - \alpha\}$$

- ▶ Математична постановка задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} VaR_{\alpha}(\omega) \rightarrow \min_{\omega} \\ \sum_{i=1}^d \omega_i \mu_i \geq R \\ \sum_{i=1}^d \omega_i \\ \omega_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, d \end{array} \right.$$

Оптимізація портфелю на базі копул

Відновлення ЗР дохідностей
на базі копул



Оцінка VaR на основі ЗР
дохідностей



Розв'язок задачі
стохастичної оптимізації з
точки зору мінімального VaR

Відновлення розподілу на базі копул

- ▶ Копула - це функція, що дозволяє перейти від одновимірних розподілів ВВ і залежностей між ними до спільного розподілу.

Теорема Шкляра. Нехай H – сумісна функція розподілу двох ВВ x і y , які мають функції розподілу F і G відповідно. Тоді

$$\exists C: H(x, y) = C[F(x); G(y)] \quad \forall x, y \in (-\infty; +\infty)$$

- ▶ Сімейства копул: еліпсообразні, **архімедові**, екстремальні.
- ▶ **Архімедові**
 - ▶ поділяються на копули Клейтона, Гумбеля, Франка тощо.
 - ▶ містять лише один параметр
 - ▶ прості для сприйняття
 - ▶ припускають однакову ступінь залежності між ВВ

Відновлення розподілу на базі копул

- Ієрархічна копула - ієрархія копул, на кожному рівні якої відбувається агрегація за допомогою копули копул або часткових функцій розподілу з попереднього рівня ієрархії

- Два види: *вкладена ієрархічна копула*

$$C(u_1, \dots, u_4) = C_{1,3}(C_{1,2}(C_{1,1}(u_1, u_2), u_3), u_4);$$

частково-вкладена ієрархічна копула

$$C(u_1, \dots, u_4) = C_{1,2}(C_{1,1}(u_1, u_2), C_{1,2}(u_3, u_4)).$$

- Для родин Клейтона, Франка і Гумбеля на кожному рівні ієрархії параметр копули повинен бути менше, ніж на попередньому, тобто $\theta_k \leq \theta_{k+1}$.
- У роботі була використана *ієрархічна архімедова копула Гумбеля*.

Оцінка VaR на базі копул

- ▶ За відновлений багатовимірним 3Р дохідностей акцій можна коректно оцінити міру ризику VaR

- ▶ Оцінка VaR відбувається у 3 етапи:

симуляція випадкової вибірки із відновленого закону розподілу розмахом $n = 1000$

обчислення дохідності портфелю для кожного з n векторів $\omega_1 R^1 + \omega_2 R^2 + \dots + \omega_d R^d$

обчислення VaR_α портфелю із заданим рівнем значущості $\alpha = 0.99$ на основі n симульованих значень дохідності портфелю

- ▶ Оскільки цільова функція VaR обчислюється за допомогою симуляцій, оптимізація портфелю переходить у задачу стохастичної оптимізації.

Опис вхідних даних

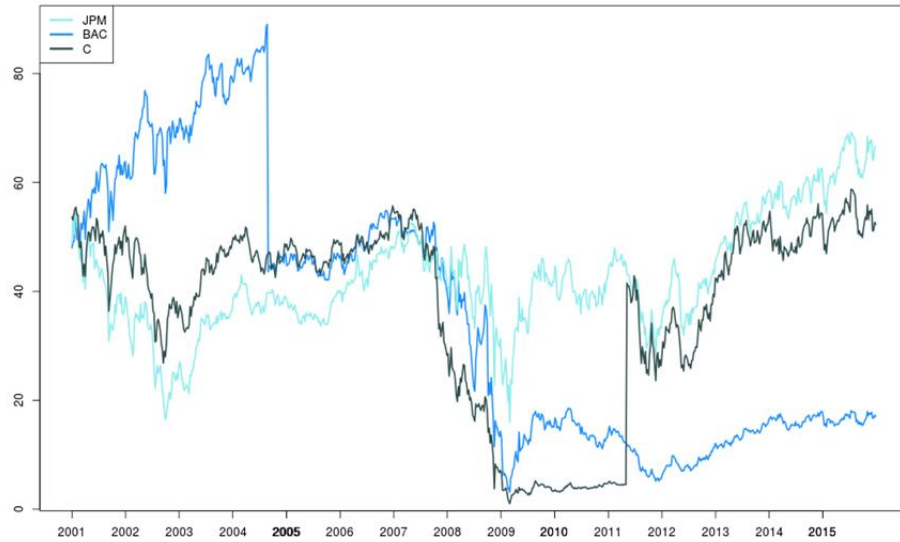
Щотижневі спостереженнями за ціною закриття торгів на NYSE звичайних акцій 10 компаній з 4 секторів економіки за період 2001-2015 роки:

- ▶ фінансовий сектор - JPMorgan Chase & Co. (JPM), Citigroup Inc (C), Bank of America Corp (BAC)
- ▶ хімічна галузь - E. I. Du Pont De Nemours & Co. (DD), Dow Chemical Company (DOW)
- ▶ нафтова галузь - Exxon Mobil Corporation (XOM), Chevron Corporation (CVX)
- ▶ електроенергетика - American Electric Power Company, Inc (AEP), Ppl Corporation (PPL), PG & E Company (PCG)

Динаміка цін акцій за 2001-2015 рр.

12

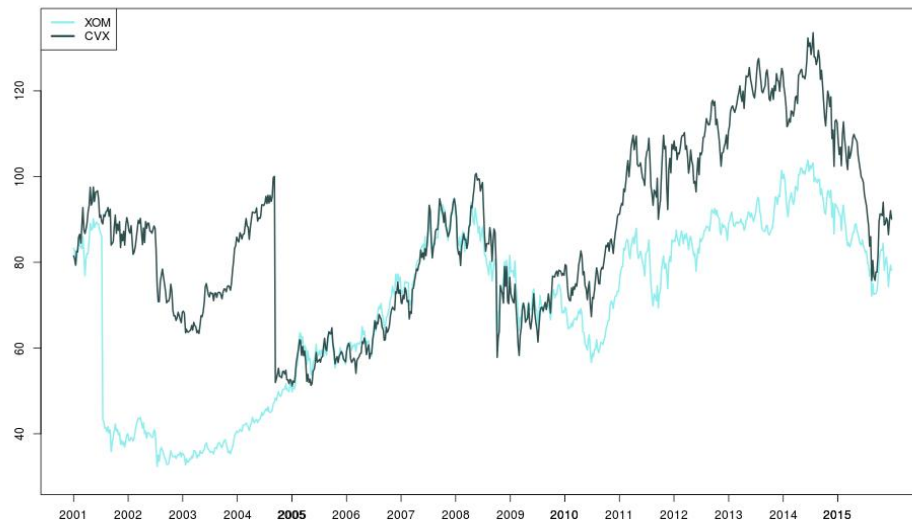
Financial sector



Chemical industry



Oil industry



Electroenergy



Аналіз графіків

- ▶ II пол. 2007 року різкий спад цін на акції
- ▶ 2009 рік досягнуто «дна» із мінімальними цінами
- ▶ поч. 2010 року зростання цін акції компаній, окрім Citigroup Inc (C).
- ▶ сер. 2011 року зростання цін акції C.

Економічне обґрунтування:

- ▶ 2007 рік іпотечна криза в США
- ▶ 2007-2008 рр. фінансова криза
- ▶ 2008-2009 рр. світова економічна криза

Тест однорідності Колмогорова-Смірнова

- ▶ $H_0 = \{\text{розподіл ВВ за 2001 – 2009 роки } F_1 = \text{розподілу ВВ за 2010 – 2015 рр. } F_2\}$
- ▶ $H_1 = \{\text{розподіл ВВ за 2001 – 2009 роки } F_1 \neq \text{розподілу ВВ за 2010 – 2015 рр. } F_2\}$
- ▶ $\alpha = 0.05$ рівень значущості або ймовірність помилки I роду
- ▶ F_{n_1}, F_{n_2} – емпіричні ФР, побудовані на вибірках за 2001 – 2009 рр. (розміром n_1) і за 2010 – 2015 рр. (розміром n_2).

Гіпотеза H_0 відхиляється на рівні значущості α , якщо

$$D = \max |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)| > c(\alpha) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}},$$

де $c(\alpha) \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} = 0.097$.

Результати тесту Колмогорова-Смірнова

Гіпотеза H_0 для акцій JPM, DD, PPL відхиляється на рівні значущості $\alpha = 0.05$.

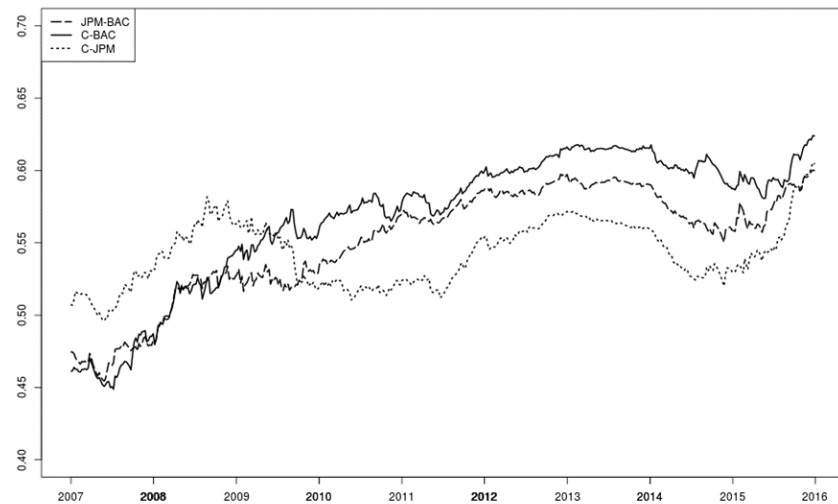
	D
JPM	0.0995
C	0.0764
BAC	0.0827
DD	0.1047
DOW	0.0633
XOM	0.0833
CVX	0.0491
AEP	0.0971
PPL	0.1133
PCG	0.0953

Тест Jarque-Bera на нормальність ЗР

	JB	P-value
JPM	20.187	0.0000
C	1205300	0.0000
BAC	44.648	0.0000
DD	65.154	0.0000
DOW	65.945	0.0000
XOM	13.235	0.0000
CVX	29.937	0.0000
AEP	2.4799	0.2894
PPL	199.49	0.0000
PCG	0.85323	0.6527

τ -Кендала всередині секторів

Фінансовий сектор



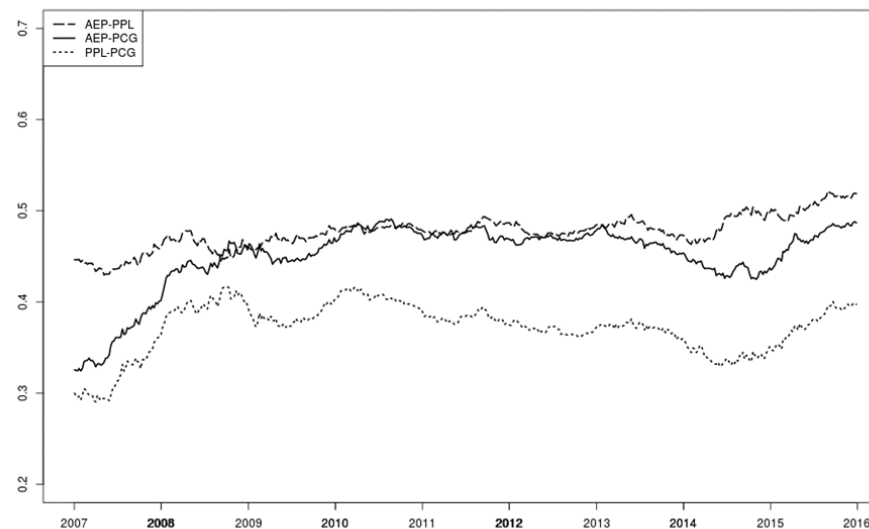
Хімічна промисловість



Нафтова промисловість

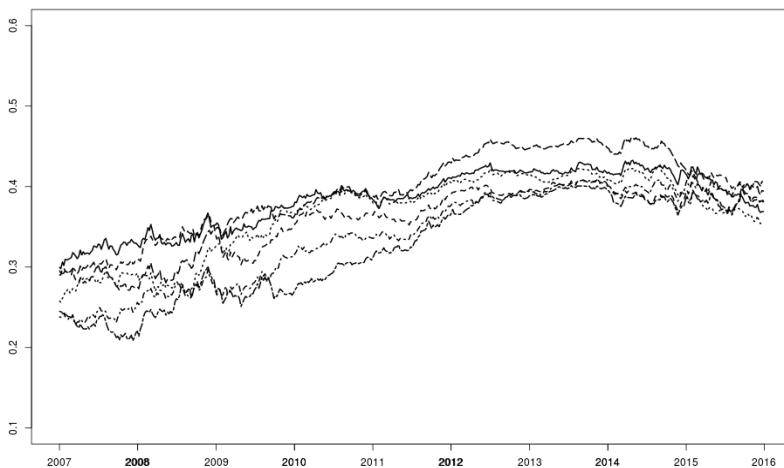


Електроенергетика

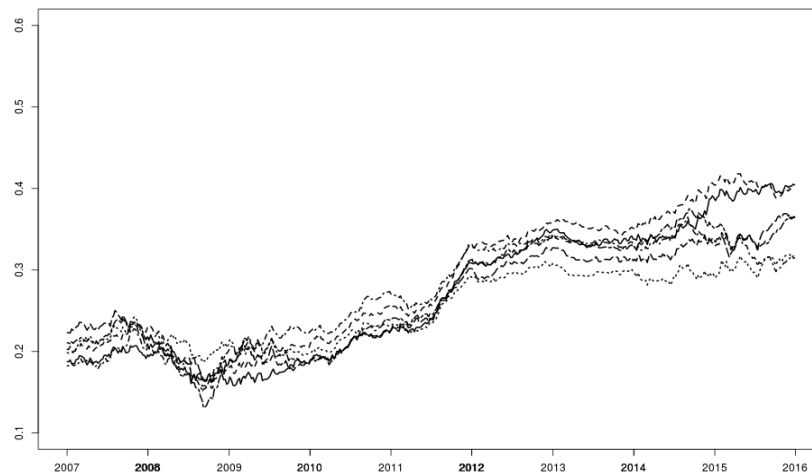


τ -Кендала між секторами

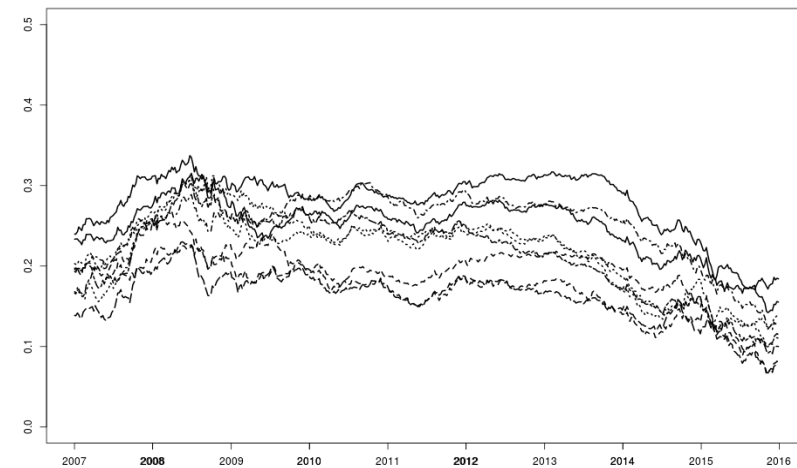
Finance - Chems



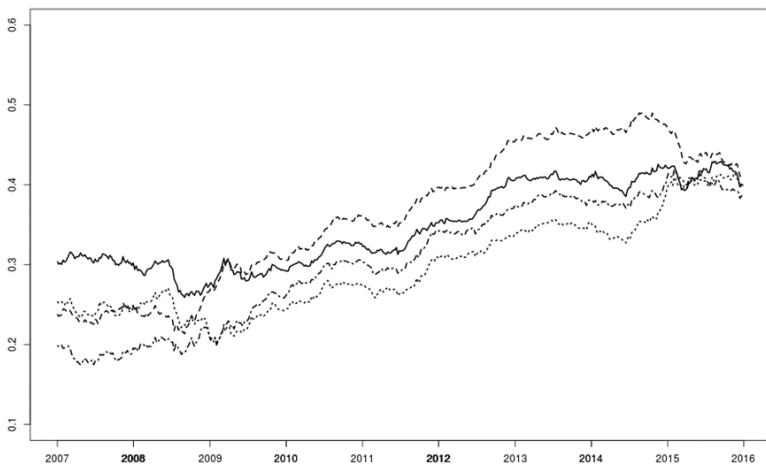
Finance - Oil



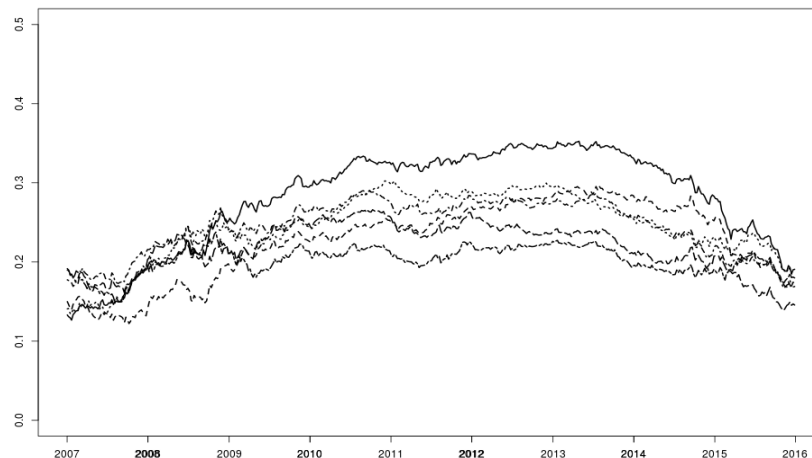
Finance - Electroenergy



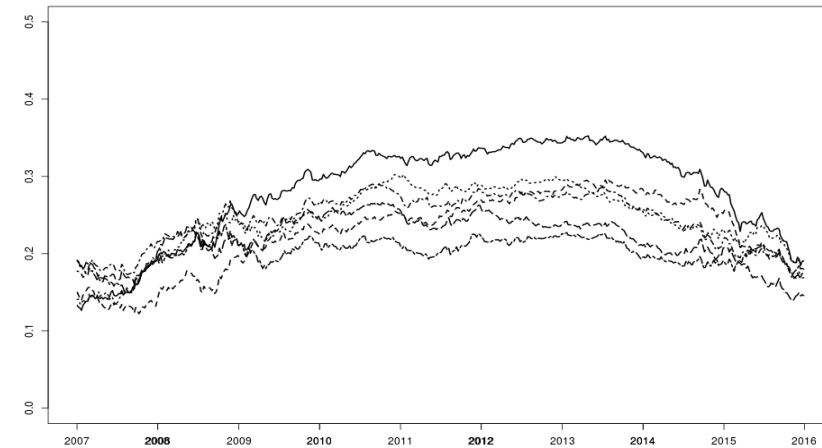
Chems - Oil



Chems - Electroenergy



Chems - Electroenergy

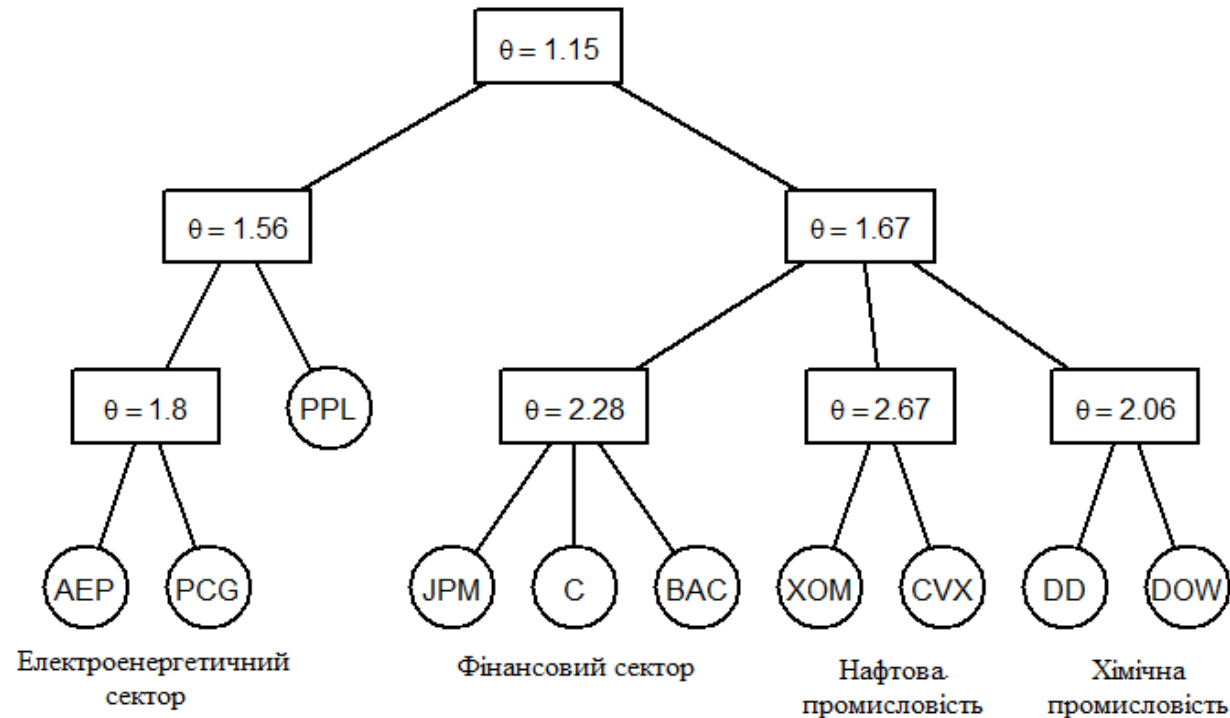


Зв'язок між ВВ

- ▶ Ступінь зв'язку всередині кожного сектора змінювався з часом (здебільшого посилювалася), і при цьому був відносно високим (від 0.40 до 0.64).
- ▶ Зв'язок між секторам також змінювався з часом, здебільшого τ -Кендала зростало за виключенням зв'язку між хімічним та електроенергетичним секторами і між нафтовим та електроенергетичний секторами. Але попри зростання зв'язку між секторами, **зв'язок всередині залишається суттєво вищим.**

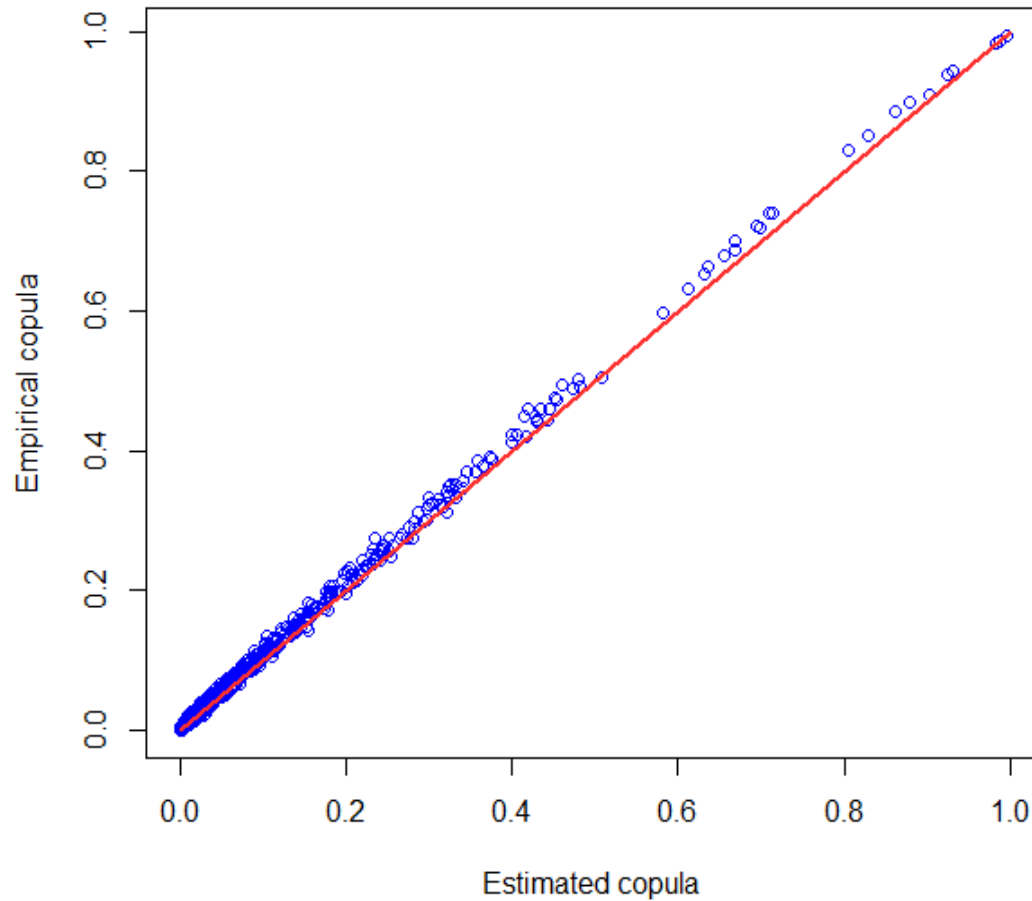
Побудова копули

- Розділимо вибірку за 2010-2015 рр. на дві підвибірки: тренувальну (2010-2014 рр.) і тестувальну (2015 р.).
- Побудова ієрархічної копули, яка об'єднує архімедові копули Гумбеля.
- Тіснота взаємозв'язку на кожному рівні ієрархії менше, ніж на попередньому $\theta_k \leq \theta_{k+1}$.
- Пакет *HAC* (R)



Точність оцінки

- Визначимо, на скільки близько знаходяться значення побудованої копули і емпіричної копули.



Вибірка	Емпірична копула	Оцінена копула
...	...	...
$x_i, i \in \overline{1,1000}$	$C_{emp}(x_i)$	$C_{estim}(x_i)$
...	...	...

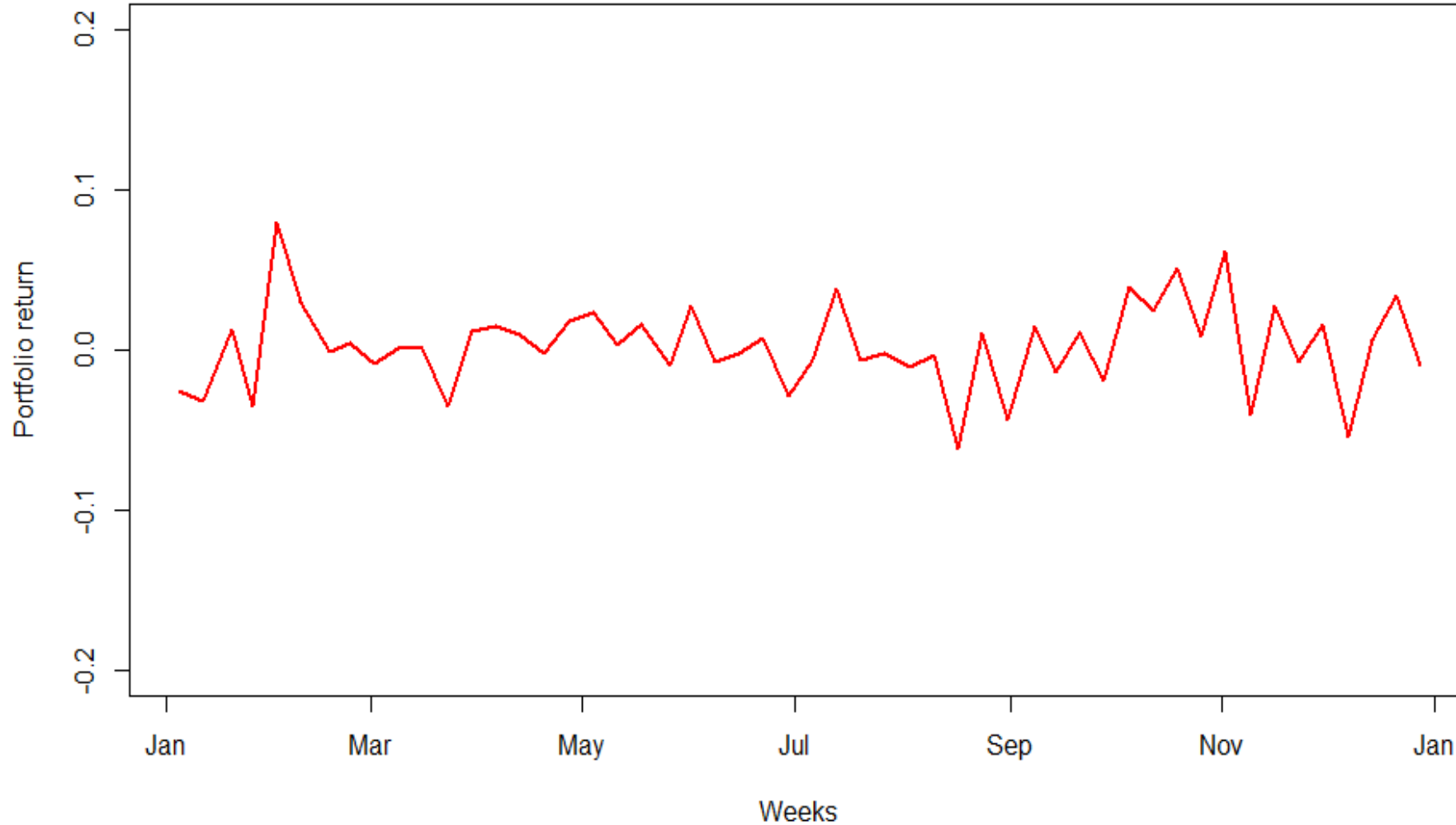
Оцінка VaR на базі копули

Оцінка VaR портфелю проводиться у три етапи,

- ▶ відновлення багатовимірного закону розподілу дохідностей акцій $(R^1 R^2 \dots R^d)^T$ на базі копул
- ▶ симуляція випадкової вибірки із відновленого закону розподілу розмахом n (у роботі було використано $n = 1000$) і обчислення дохідності портфелю для кожного з n векторів $\omega_1 R^1 + \omega_2 R^2 + \dots + \omega_d R^d$
- ▶ обчислення VaR_α портфелю із заданим рівнем значущості α (у даній роботі $\alpha = 0.99$) на основі n симульованих значень дохідності портфелю (функція *quantile* програмне забезпечення R)

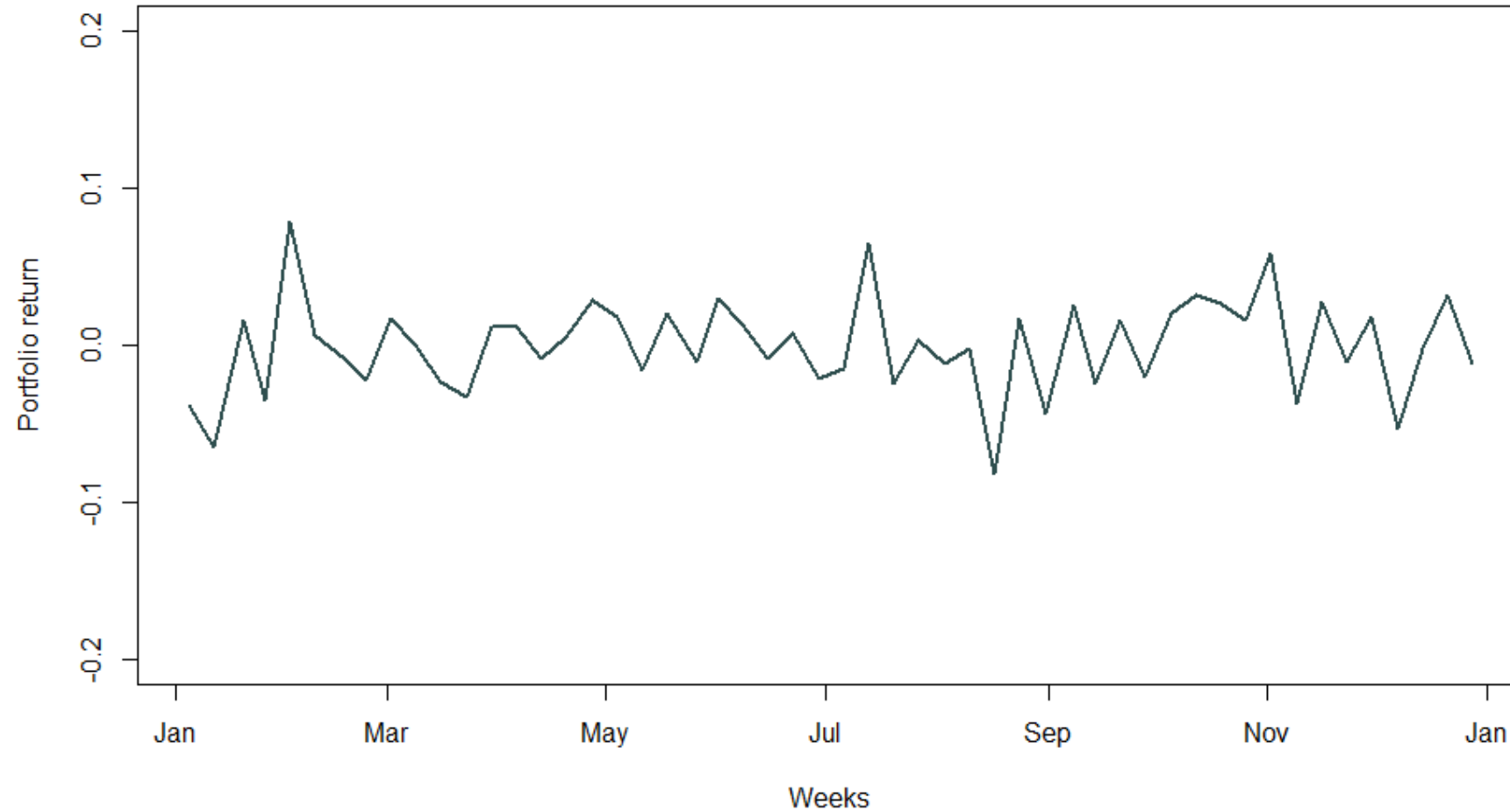
Оптимізація портфелю на базі копули

Пакет *neldermead* (програмне забезпечення R)

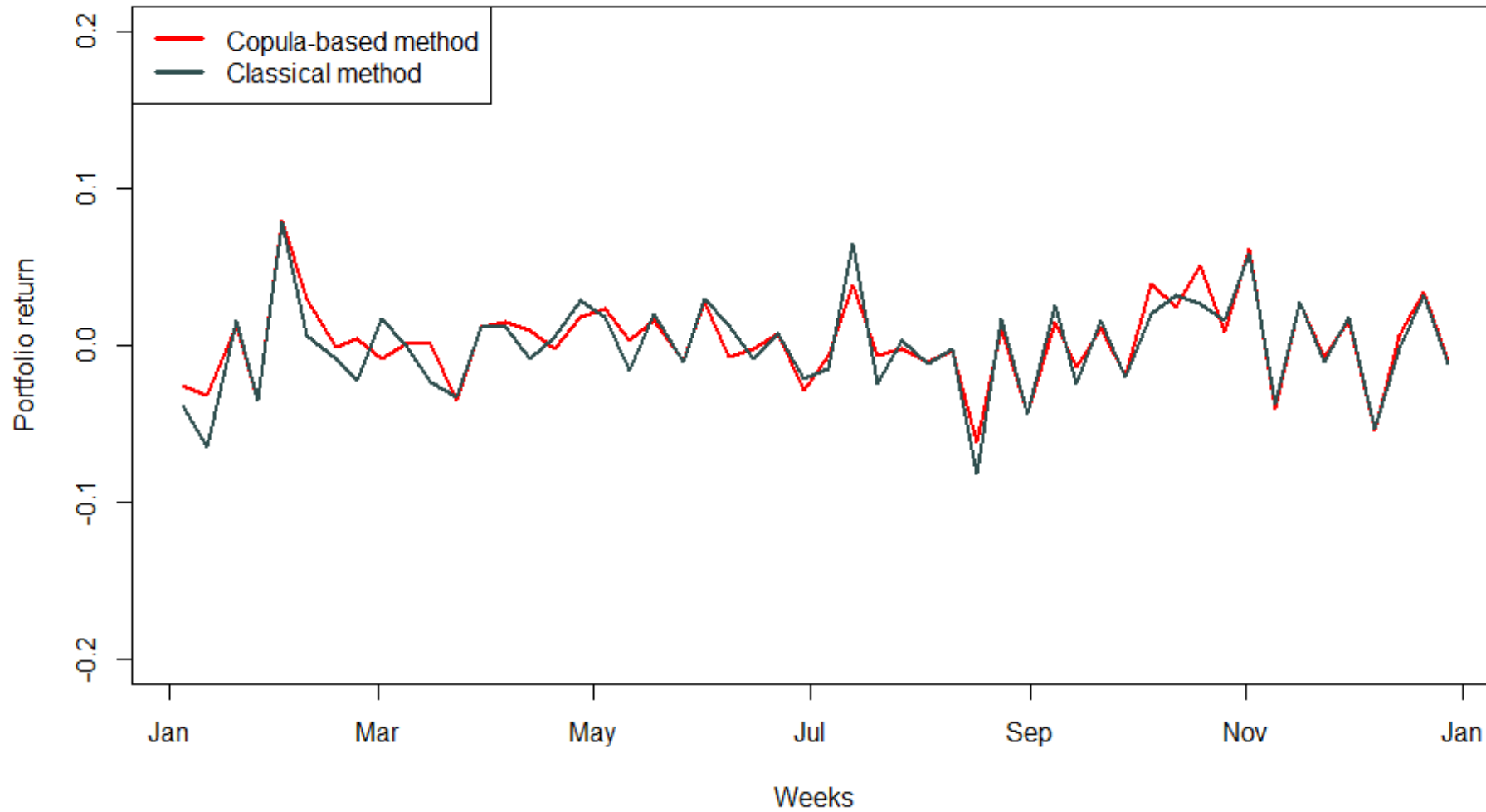


Класична оптимізація портфелю

Пакет *quadprog* (програмне забезпечення R)



Порівняння результатів



Порівняння результатів

Порівняємо дохідності портфельів за 2015 рік.

Дохідність портфелю, сформованого методом на базі копул, склала **12.1%** від початково вкладеної суми.

У той час як портфель, сформований класичним методом, продемонстрував збитковість у **4.1%** від початково вкладеної суми.

Дякую за увагу!