Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Дипломна робота

«Неперервна апроксимація критерія Келлі для формування інвестиційного портфелю»

Виконав: **Проскурін Олександр**, КА-21
Науковий керівник: к. ф.-м. н., доц. **Каніовська І.Ю.**

- **Предмет дослідження** : методи формування та оцінки параметрів інвестиційного портфелю

- **Об’єкт дослідження** : критерій Келлі, показник VaR, волатильність активу

- **Мета роботи**: ввести поняття неперервного критерія Келлі, розглянути різні оптимізаційні задачі в залежності від потреб інвестора, знайти два оптимальні за Келлі портфелі та знайти їх показники VaR та змоделювати волатильність активів, що входять до цих портфелей.

- **Практичне застосування**: використовуючи дані за 3 останні роки для 18 ETF, що копіюють поведінку інвестиційного фонду університету Йеля, знайти 2 оптимальні за Келлі портфелі (з використанням кредиту та без використання) та проаналізувати їх ризиковість та дохідність

Актуальність проблеми. Історія розвитку портфельної теорії

І етап. Припадає на 20—30-ті роки XX ст., є періодом зародження теорії фінансів як науки. Цей період представлений, насамперед, фундаментальними працями з теорії процентної ставки американського економіста і статистика Ірвінга Фішера (1867—1947)

ІІ етап. Сучасна портфельна теорія (скорочено MPT, англ. modern portfolio theory) була започаткована у 1952 р. революційною працею Г.Марковіца . Саме Марковіц першим побудував економіко-математичну модель задачі вибору оптимальної структури портфеля, включивши до неї чинник невизначеності та породженого ним ризику. Вченим було також запропоновано теоретико-ймовірнісну формалізацію понять «норма прибутку» та «ризик»

ІІІ етап. Із середини 60-х років починається наступний етап розвитку сучасної теорії інвестицій, пов’язаний з так званою моделлю оцінки капітальних активів (МОКА, англ. — САРМ). Головне питання : «Якими будуть ціни на ринку цінних паперів, якщо всі інвестори володітимуть однією й тією ж інформацією, однаково оцінюватимуть норми прибутку та ризик окремих активів, а також якщо усі вони сформують оптимальні, згідно з теорією Марковіца, портфелі акцій виходячи з індивідуальної схильності до ризику?»

Актуальність проблеми. Проблеми сучасної портфельної теорії

Основним недоліком теорії Марковіца є велика кількість обмежень, які на практиці дуже часто не виконуються :

1) Всі інвестори володіють однаковою інформацією
2) Ринок є ефективним
3) Розподіл дохідностей є нормальним

Криза 2008 року показала, що жодне з вищенаведенинх обмежень не виконувалося. Саме тому постає питання :

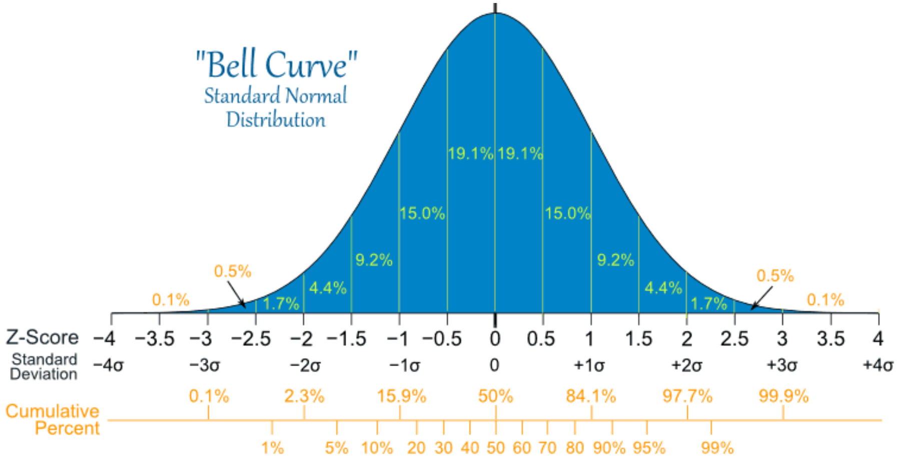
«Чи є альтернатива теорії Марковіца, яка не має таких сильних обмежень?»

Актуальність проблеми

Іноземні інвестори вже давно використовують інвестиційні портфелі цінних паперів в якості інструмента для збереження та примноження своїх коштів. Для великих українських інвесторів портфелі цінних паперів можуть бути гарною альтернативою загальновживаним банківським депозитам.

Теорія Марковіца

Дохідності мають бути розподілені нормально



Теорія Келлі

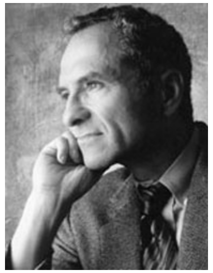
Немає жодних обмежень щодо розподілу дохідностей активів

Використовують такі інвестори, як

Уоррен Баффет

Нассім Талеб

Едвард Торп



Неперервний та дискретний критерій Келлі

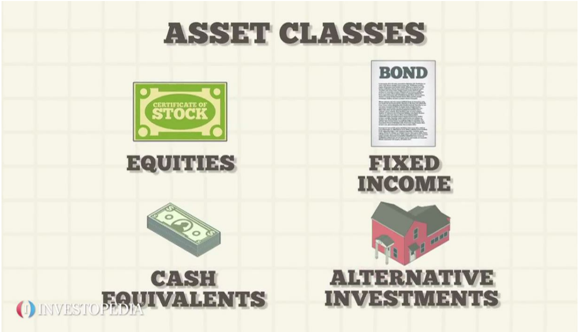
На відміну від критерію Марковіца, основною ціллю якого є диверсифікація портфелю, критерій Келлі спрямований не максимізацію експоненційної швидкості росту капіталу інвестора.

Дискретний випадок

Розглянемо гру у підкидання монетки. Нехай p – ймовірність виграшу (p = ½) , q – ймовірність програшу (q = 1 – p = ½).
Таким чином, згідно з дискретним критерієм Келлі, кількість коштів, яку треба ставити на кожному підкиданні можна отримати з наступної оптимізаційної задачі :

$$g(f) = \, pln(1+f) + qln(1-f) \rightarrow max$$

Неперервний випадок. Один актив



На відміну від дискретного випадку, де кілікість станів лише 2, в неперервному випадку кількість станів є нескінченною. Для одного активу, неперервна апроксимація має вигляд :

$$g_\infty(f) \coloneqq r + f(m-r) - \frac{s^2 f^2}{2} \rightarrow max$$

Де r – безризикова ставка
s^2 - дисперсія активу
m – очікувана дохідність

Неперервний критерій Келлі.Портфельна теорія

В роботі було представлено вигляд оптимізаційних задач для наступних випадків :

- Дозволені операції в шорт, ставка по операціям в «шорт» дорівнює безризиковій ставці/ставка по операціям в «шорт» відрізняється від безризикової
- Дозволено використання кредитних коштів, ставка по кредитним коштам дорівнює безризиковій/відрізняється від безризикової
- Не дозволено використання ані операцій в «шорт» ані кредитних коштів
- Дозволені операції як в «шорт» так і використання кредитних коштів

Для розв'язку практичної задачі було сформовано два портфелі :

1) З використанням кредитних коштів,без операцій в «шорт» (але без використання безризикового активу)
2) Без використання кредитних коштів, без операцій в «шорт»

Неперервний критерій Келлі.Портфельна теорія

Так як при розв'язку реальної задачі безризиковий актив не використовувався, тоді математичне сподівання портфелю, який складається з n активів має вигляд :

$$m_{\text{портфель}} = f_1 m_1 + \cdots + f_n m_n = {F_0}^T \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \ldots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Де ${F_0}^T = (f_1, \ldots, f_n) - \text{ваги кожного активу в портфелі}$

Дисперсія портфелю має вигляд :

$$D_{\text{портфель}} = {F_0}^T C_0 F_0$$

$$C_0 - \text{коваріаційна матриця активів}$$

З використанням кредиту(максимальне плече 1:2)

$$g_\infty(f) = m_{\text{портфель}} - \frac{D_{\text{портфель}}}{2} \to max$$

$$f_1 + \cdots + f_n \leq 3$$

$$f_1 + \cdots + f_n \geq 1$$

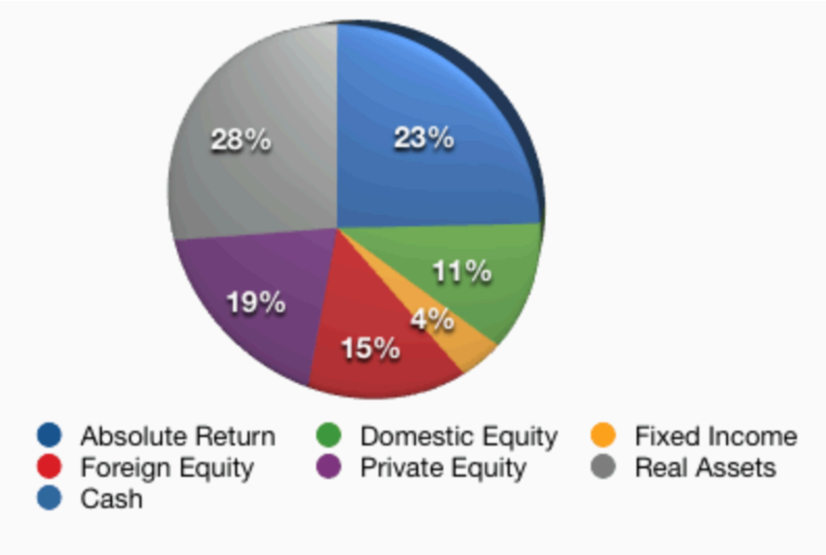
Без використання кредиту

$$g_\infty(f) = m_{\text{портфель}} - \frac{D_{\text{портфель}}}{2} \to max$$

$$f_1 + \cdots + f_n = 1$$

Практична реалізація

Для практичної реалізації складемо портфель інвестиційного фонду університету Йеля (Yale Endownment). Дуже важливу частину доходів університетів так званої Ліги Плюща (вісім найстарших університетів США) складають благодійні внески випускників. Таким чином, адміністрація університетів створила університетські інвестиційні фонди, які інвестують благодійні кошти задля їх збільшення. Одним з найвідоміших й найуспішніших фондів є саме фонд університету Йеля. На даний момент фонд має наступну структуру :



Однак, індивідуальні інвестори не мають можливості придбати активи, які може придбати інвестиційний фонд Йеля. Тому Олександром Вальтсевим було створено список з 18 ETF, які відтворюють всі класи активів портфелю інвестиційного фонду Йеля .

Практична реалізація

Візьмемо місячні дані з 19 вересня 2013 року по 19 вересня 2016 року та побудуємо два оптимальні за Келлі портфелі : з використанням кредитних коштів та з використанням лише власних коштів.Нехай початковий капітал становить 500 000 $. Отримаємо наступні дані :

З використанням кредиту :

357100 $ в RRF
3150$ в JNK
424100$ в XOP
357350$ в BX
358300$ в EVR

Очікувана річна дохідність – 23%

Без використання кредиту:

10205$ в RRF
468550$ в XOP
21100$ в EVR

Очікувана річна дохідність – 13%

Value at Risk(VaR)

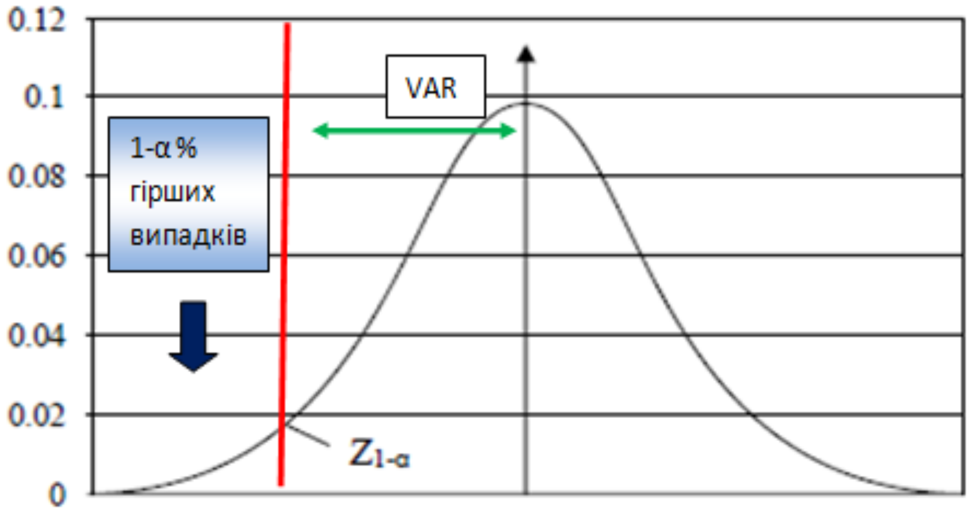
Для аналізу ризиковості створених портфелей використаємо метрику VaR. Для знаходження цієї метрики потрібно вказати 2 параметри – довірча ймовірність(α) та кількість днів(N). Суть VaR можна описати одним реченням :

“Я на α відсотків впевнений в тому, що не буде втрат портфелю більших ніж V долларів наступні N днів”

$$Загальна\ формула\ для\ знаходженя\ VaR\ має\ вигляд$$

$$P\{\xi \leq -VaR_r\} = 1 - \alpha$$

$$\text{де } \xi - \text{ВВ, що відповідає доходності портфелю}$$



Історичний VaR

Для знаходження N – денного історичного VaR шукають 1-денний VaR, а потім використовують наступну формулу :

$$N - \text{денний } VaR = 1 - \text{денний } VaR * \sqrt{N}$$

Суть методу полягає у визначенні всіх параметрів, що впливають на портфель. Для кожного із параметрів будуються можливі сценарії на наступний день. Маючи множину сценаріїв можиливо визначити розподіл. Результати роботи для історичного VaR :

	5-денний	Піврічний	Річний
З кредитом	-89507	-540760	-764750
Без кредиту	-54240	-327000	-462430

Метод Монте-Карло

Суть методу Монте-Карло є використання стохастичних моделей, які можуть описувати поведінку активів, що входять до портфелю. Після чого симулюється величезна кількість (зазвичай >>10000) можливий шляхів цін на активи. Таким чином отримують розподіл вартостей портфелю.

Геометричний броунівський рух(ГБР)

Ціна акції S описується моделлю :

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

де $\mu - \text{річна середня доходність}$

$\sigma - \text{річна волатильність}$

$\varepsilon \sim N(0,1)$

Процеси Орнштейна-Уеленбека

Ціна акції X_t описується моделлю :

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dL_t$$

Якщо розглянути представлення процесу Орнштейна-Уеленбека з точки зору моделі Васіцека(Vasicek), тоді процес є розв’язком наступного стохастичного диференційного рівняння:

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t)dt + \sigma d W_t$$

Метод Монте-Карло. Результати

99% VaR для 100 000 симуляцій :

Процес ОУ

	5-денний	Піврічний	Річний
З кредитом	-67278	-302850	-317310
Без кредиту	-41617	-183680	-196650

Процес ГБР

	5-денний	Піврічний	Річний
З кредитом	-48951	-264920	-333000
Без кредиту	-38862	-182890	-221420

99% VaR для 1 000 000 симуляцій :

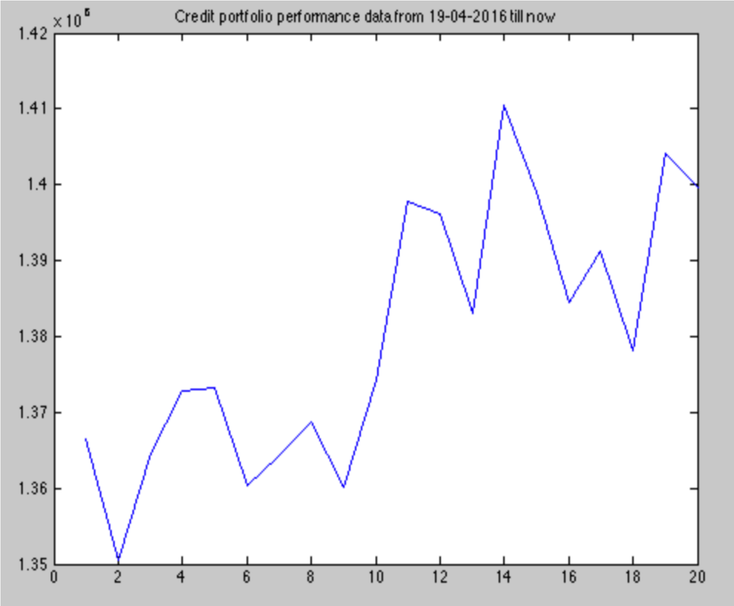
Процес ОУ

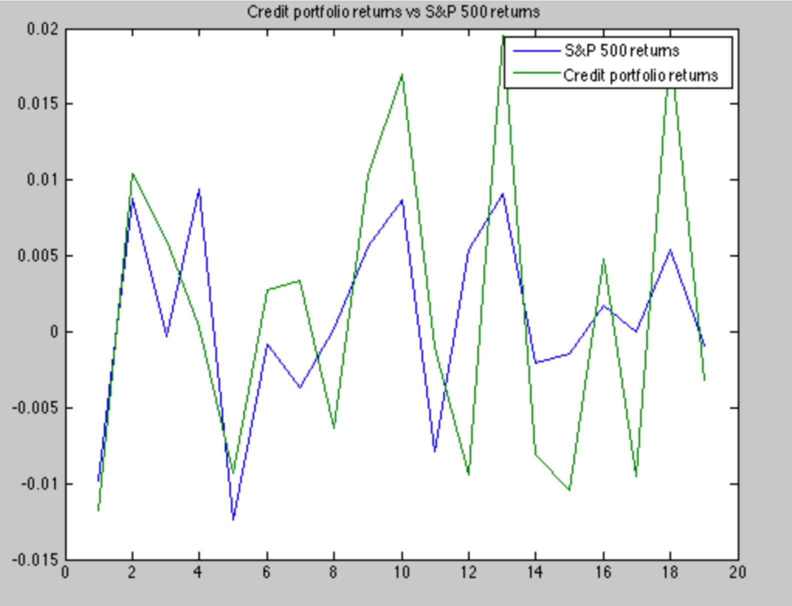
	5-денний	Піврічний	Річний
З кредитом	-67687	-302460	-316760
Без кредиту	-41204	-187719	-195130

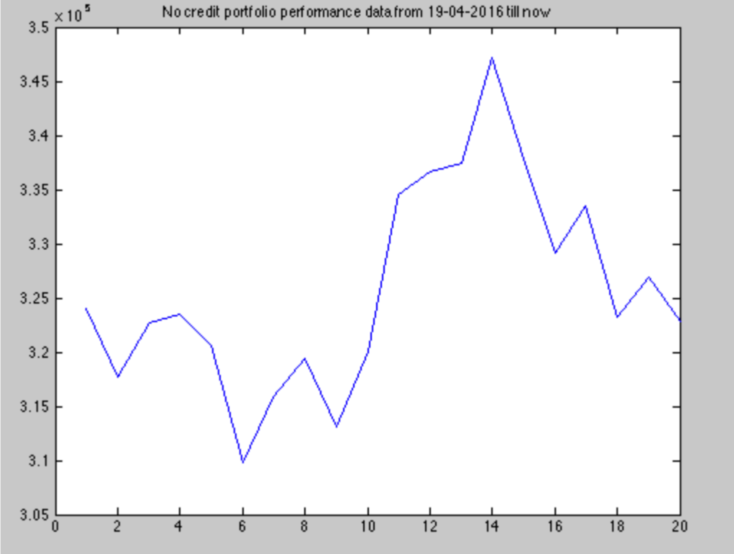
Процес ГБР

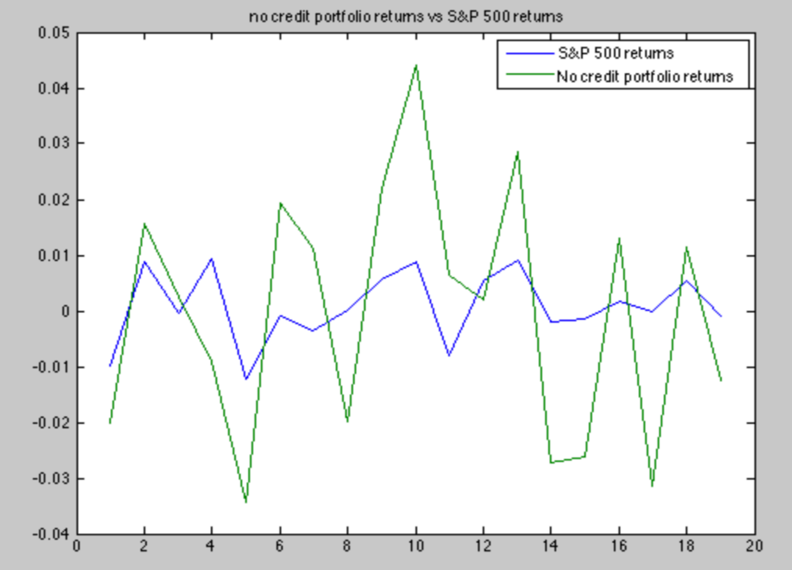
	5-денний	Піврічний	Річний
З кредитом	-47651	-279425	-321300
Без кредиту	-37256	-190210	-245400

Вартість портфелю на сьогодні









Висновки

- Розроблено вигляд оптимізаційних задач Келлі для різних портфелей(з кредитом, без кредиту, з операціями в «шорт», тощо)
- Було складено два портфелі з активів, які копіюють поведінку портфелю інвестиційного фонду Йеля
- Для кожного з портфелей було розраховано VaR 3 шляхами : історичний, Монте-Карло (з використанням процесу ГБР та ОУ)

Перспективи щодо подальших досліджень

Основним для подальшого розвитку роботи є страхування портфелю від надвеликих втрат методом дельта-хеджування портфелю опціонними контрактами

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ