



МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ-3

Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	12 Інформаційні технології
Спеціальність	124 Системний аналіз
Освітня програма	Системний аналіз і управління
Статус дисципліни (код)	Нормативна (ПО 02.1)
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна/змішана
Рік підготовки, семестр	2 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	5,5 кредитів ЄКТС
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен
Розклад занять	https://schedule.kpi.ua/
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович, Практичні: к.ф.-м.н., доц. Чаповський Юрій Аркадійович, к.ф.-м.н. Попова наталія Дмитрівна
Розміщення курсу	Googleclassroom

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Дана дисципліна є однією з фундаментальних в освітній програмі. Вона включає:

- інтеграли що залежать від параметра;
- кратні інтеграли;
- криволінійні та поверхневі інтеграли;
- функції комплексної змінної.

Вивчення навчальної дисципліни націлено на формування, розвиток та закріплення у здобувачів таких загальних та фахових **компетентностей**: ЗК 1 Здатність застосовувати знання в практичних ситуаціях. ЗК 2 Здатність планувати і управляти часом. ЗК 3 Здатність абстрактно мислити, застосовувати методи аналізу і синтезу. ЗК 9 Здатність до адаптації та дії в новій ситуації. ЗК 14 Здатність забезпечувати та оцінювати якість виконуваних робіт. ЗК 15 Здатність реалізовувати свої права та обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності громадянського (вільного демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні, дотримуватися академічної доброчесності.

ФК 2 Здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів. ФК 9 Здатність представляти математичні аргументи і висновки з них з якістю і точністю в таких формах, які підходять для занять в аудиторіях як усно, так і в письмовій формі.

Внаслідок вивчення курсу студент повинен **вміти**: знаходити інтеграли що залежать від параметру, досліджувати на рівномірну збіжність невластні інтеграли що залежать від параметру, застосовувати

Ейлерові інтегралі, обчислювати подвійні та потрійні інтегралі, вміти замінювати координати, рахувати криволінійні та поверхневі інтегралі, застосовувати формули Остроградського-Гаусса та формулу Стокса, досліджувати функцію від комплексної змінної на аналітичність, досліджувати нулі та особливі точки, рахувати лишки, застосовувати лишки до знаходження певних інтегралів.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна передувє і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Фізика» (ПО 4), «Диференціальні рівняння» (ПО 5), «Теорія ймовірностей» (ПО 6), «Функціональний аналіз» (ПО 8), «Чисельні методи» (ПО 7), «Основи системного аналізу» (ПО 17), «Математична статистика» (ПО 24), «Рівняння математичної фізики» (ПО 26), «Гармонічний аналіз, Операційне числення» (ПО 21), «Теорія стійкості, Варіаційне числення» (ПО 22), «Основи фінансової математики, Прикладна фінансова математика». Вивчення курсу ґрунтується на широкому використанні основних розділів дисциплін: ПО 2 «Алгебра та геометрія» та ПО 3 «Дискретна математика».

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Інтегралі що залежать від параметра

Означення власного інтегралу що залежить від параметру, його диференціювання, інтегрування. Невласні інтегралі що залежать від параметру, рівномірна збіжність. Ейлерові інтегралі.

Розділ 2. Кратні інтегралі.

Міра Жордана. Інтеграл Рімана та його властивості.. Теорема Фубіні. Заміна змінних в кратному інтегралі.

Розділ 3. Криволінійні та поверхневі інтегралі

Криволінійний інтеграл I роду. Властивості, обчислення. Криволінійний інтеграл II роду. Властивості, обчислення. Формула Гріна. Потенційне векторне поле. Гладка неособлива поверхня. Площа поверхні. Поверхневий інтеграл I роду. Означення, властивості, обчислення. Поверхневий інтеграл II роду. Формула Остроградського-Гаусса. Формула Стокса. Потенціальні векторні поля.

Розділ 4. Функції комплексної змінної.

Основні елементарні функції комплексної змінної: означення, властивості, формули Ейлера. Диференційованість, умови Коші-Рімана. Інтеграл вздовж кривої, теорема Коші. Первісна, інтеграл Коші, цілі функції, теорема Ліувілля, основна теорема алгебри. Теорема Морера. Функціональні ряди. Степеневі ряди: радіус збіжності. Ряд Тейлора голоморфної функції. Розвинення основних елементарних функцій. Нулі голоморфної функції. Теорема єдиності. Ряд Лорана, класифікація ізольованих особливих точок. Лишки: означення, обчислення. Теорема Коші про лишки і її застосування до обчислення інтегралів.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Частина 2: підручник. К: Либідь, 1993. 320 с

2. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. У 2-х частинах. Частина 2: підручник. Київ : Вища школа, 1992. - 595 с

3. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник / 2-ге вид., перероб. і доп. — К.: Либідь, 2003. -600 с.
4. Богданський Ю.В. Інтеграл в курсі математичного аналізу. (Електронний посібник) К., КПІ, 2013 — 180с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/3581>
5. Диференціальні рівняння. Конспект лекцій. Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 113 «прикладна математика» / В. Г. Бондаренко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022.–124 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52654>
6. Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський / – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 257 с. <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/all.pdf>
7. М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. / – К.: ВПЦ "Київський університет", 2012 — 276 с. https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/matan_fkz.pdf
8. Є.Д. Білокологос, Д.Д. Шека. Збірник задач з комплексного аналізу. К., 2004.-57 с.

Допоміжна

9. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. 2-е вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2006. – 460с
10. Математичний аналіз 2: Інтегральне числення, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс].навчальний. посібник для студентів. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Г.Бондаренко, А.Ю.Мальцев, Г.Б.Подколзін.– 2020.— 56с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/34406>

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Власні інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, формула Лейбніца, інтегрування.
2	Невласні інтеграли, що залежать від параметра. Рівномірна збіжність. Ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності. Властивості рівномірно збіжних невластних інтегралів: неперервність, диференціювання, інтегрування.
3	Гамма-функція: означення, властивості. Бета-функція: означення, властивості, зв'язок з гамма-функцією. Застосування.
4	Міра Жордана. Множини вимірні за Жорданом. Множини міри нуль. Критерій вимірності множини. Властивості вимірних множин і міри Жордана.
5	Інтеграл Рімана в \mathbf{R}^n : означення, приклади.
6	Обмеженість інтегрованої функції. Класи інтегрованих функцій. Властивості кратних інтегралів: лінійність, адитивність, монотонність. Властивість модуля. Нерівність Коші-Буняковського.
7	Теореми про середнє. Теорема Фубіні.

8	Формула заміни змінної. Заміни змінної в: полярних координатах, циліндричних координатах, сферичних координатах. Інтеграл Пуассона, наслідок: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
9	Довжина кривої в \mathbb{R}^n . Криволінійний інтеграл першого роду: означення, незалежність від пераметризації та орієнтації кривої. Властивості криволінійного інтегралу першого роду: лінійність, адитивність, невід'ємність.
10	Криволінійні інтеграли II роду: означення, формула для підрахунку, приклади. Властивості інтегралу II роду: незалежність інтегралу від пераметризації, залежність від орієнтації, лінійність, адитивність.
11	Формула Гріна. Потенціальні векторні поля в \mathbb{R}^2 .
12	Гладка неособлива поверхня в \mathbb{R}^3 . Дотична площина до поверхні в неособливій точці. Ортогональність градієнта до поверхні. Площа поверхні: означення, вираз для параметрично заданої поверхні, вираз для графіка функції
13	Поверхневий інтеграл I роду: означення, незалежність від пераметризації, вираз для поверхні як графіка функції. Властивості поверхневого інтегралу I роду: лінійність, адитивність.
14	Орієнтовані поверхні. Поверхневі інтеграли II роду: означення, приклади. Властивості поверхневих інтегралів II роду: лінійність, залежність від орієнтації. Обчислення методом проєкцій.
15	Формула Остроградського-Гаусса. Дивергенція векторного поля.
16	Формула Стокса. Потенціальні векторні поля в \mathbb{R}^3 .
17	Функції комплексної змінної та їх властивості: поліном, експонента, тригонометричні функції, формула Ейлера, логарифм.
18	Границя функції від комплексного аргументу: означення, властивості. Неперервність функції: означення, властивості. Похідна і диференційованість. Умови Коші-Рімана. Приклади. Арифметичні властивості похідної. Похідна композиції.
19	Інтеграл від функції комплексного аргументу вздовж гладкої кривої. Приклади обчислення. Властивості. Теорема Коші. Умови незалежності інтегралу від шляху.
20	Побудова первісної голоморфної функції. Інтеграл Коші. Формула для похідної порядку n . Цілі функції. Теорема Ліувілля. Основна теорема алгебри. Теорема Морера.
21	Функціональні ряди: збіжність, абсолютна збіжність, збіжність за нормою, рівномірна збіжність. Властивості рядів, що збігаються за нормою: неперервність, заміна порядку інтегрування. Теорема Вейерштрасса.
22	Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності. Аналітичні функції. Еквівалентність аналітичності та голоморфності. Ряд Тейлора голоморфної функції: означення, розвинення основних елементарних функцій.
23	Нулі аналітичної функції: кратність, ізолюваність. Єдиність аналітичної функції. Наслідок: збереження відомих тотожностей.
24	Ряд Лорана.
25	Класифікація ізолюваних особливих точок. Лишок функції в точці. Формули для обчислення лишків.
26	Теорема Коші про лишки. Інтеграли вигляду $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$ з полюсами всередині області.
27	Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$ з полюсами в \mathbb{R} . Лема Жордана. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin \lambda x dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos \lambda x dx$.

Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	Власні інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, формула Лейбніца, інтегрування.
2	Невласні інтеграли, що залежать від параметра. Рівномірна збіжність.
3	Ейлерові інтеграли.
4	Подвійний інтеграл.
5	Формула заміни змінних в подвійному інтегралі.
6	Потрійний інтеграл. Циліндричні, сферичні координати. Застосування кратних інтегралів.
7	Довжина кривої в \mathbf{R}^n . Криволінійні інтеграли I роду.
8	Криволінійні інтеграли II роду. Формула Гріна. Незалежність інтегралу від шляху інтегрування.
9	Гладка неособлива поверхня в \mathbf{R}^3 . Площа поверхні для параметрично заданої поверхні, для графіка функції. Поверхневий інтеграл I роду.
10	Поверхневий інтеграл II роду.
11	Формула Остроградського-Гаусса. Формула Стокса. Потенціал.
12	Функції комплексної змінної: поліном, експонента, тригонометричні функції, формула Ейлера, логарифм.
13	Інтеграл від функції комплексного аргументу. Теорема Коші. Первісної голоморфної функції. Інтеграл Коші.
14	Первісної голоморфної функції. Інтеграл Коші.
15	Радіус збіжності степеневого ряду. Ряд Тейлора голоморфної функції: розвинення основних елементарних функцій. Нулі аналітичної функції: кратність, ізолюваність.
16	Класифікація ізолюваних особливих точок. Ряд Лорана.
17	Лишок функції в точці. Формули для обчислення лишків. Інтеграл вигляду $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt.$
18	Інтеграл вигляду $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz, \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin \lambda x dx, \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos \lambda x dx.$

6. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Усі роботи мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, етична поведінка студентів визначені у Кодексі честі <https://kpi.ua/code>.

7. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

семестровий контроль: **екзамен**

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за:

Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за¹:

¹Кожна контрольна робота може бути замінена (за наявності форс-мажорних обставин) самостійною або розрахунковою роботою. Кількість можливих балів за контрольний захід при цьому не змінюється. У разі неможливості проведення екзамену за наявності форс-мажорних обставин, бали за семестр R нараховуються за формулою $R = 100 \cdot (G1 + G2 + G3)/3$, де $G1, G2, G3$ — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

КР-1 КР-2 КР-3	20 балів 20 балів 20 балів
Екзаменаційна робота / екзамен	40 балів



7.1. Семестровий рейтинг складається з рейтингових балів, і не перевищує $R_{max} = 100$ балів. У семестрі здобувач може набрати 60 балів, на екзамені — 40 балів. Бали за семестр рахуються як сума набраних балів за всі контрольні заходи.

7.2. Кожний контрольний захід оцінюється у частках від одиниці G (0 – 1). Бали за кожну контрольну роботу нараховуються як $R = 20 \cdot G$, за екзамен як $R = 40 \cdot G$.

7.3. У разі, якщо здобувач отримав за роботу в семестрі оцінку не нижче ніж 60% від максимальної оцінки за його бажанням, висловленим в письмовій формі, його семестрова оцінка R може бути порашована за формулою $R = \min\{74, 100 \cdot (G_1 + G_2 + G_3)/3\}$, де G_1, G_2, G_3 — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

7.4. Здобувач допускається до екзамену або перескладання, якщо семестрова складова його балів становить не нижче, ніж 25 балів.

7.5. Рейтингова оцінка з кредитного модуля переводиться в оцінку ECTS згідно таблиці

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам ECTS:

Бали: контрольні роботи + екзаменаційна робота	Оцінка
100...95	A-Відмінно
94...85	B-Дуже добре
84...75	C-Добре
74...65	D-Задовільно
64...60	E-Достатньо
Менше 60	F-Незадовільно
стартовий рейтинг менше 25 балів	FX-Не допущено

7.6. Для допуску до контрольного заходу у дистанційному режимі здобувач має надіслати, не пізніше ніж за 3 дні до дати проведення контрольного заходу, свою фотографію та фотографію написаних від руки

наступних своїх даних: ПІБ, група, місце поточного знаходження (місто, район, країна), підпис. Ці дані надсилаються один раз на семестр з пошти, на яку здобувач згоден отримати завдання контрольного

заходу (бажано в домені @lll.kpi.ua). У разі зміни якихось з цих даних або поштової адреси, дані надсилаються знову.

7.7. Виконання і оцінювання контрольної роботи або екзамену, проведеному в дистанційному режимі.

7.7.1. Здобувач отримує завдання контрольного заходу на пошту, вказану в п. 7.6.

7.7.2. Розв'язок отриманого завдання здійснюється самостійно. Виконане завдання контрольного заходу надсилається як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить фотографії рукописного тексту, і розмір якого не перевищує 10 Mb. Текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісні.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.7.3. Виконання завдання має бути здійснено у зазначений в умовах час. Максимальний за роботу бал зменшується на 5% за кожну хвилину запізнення.

7.7.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант завдання, ПІБ та групу** виконавця роботи. Кожна сторінка має містити його **підпис**. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.7.5. Екзамен може бути також проведений у формі співбесіди за допомогою комп'ютерних засобів. При цьому відсутність працюючої камери, або мікрофону, або відсутність інтернету означає неявку студента на іспит.

7.8. Виконання і оцінювання самостійної (розрахункової) роботи, проведеної в дистанційному режимі.

7.8.1. Здобувач отримує завдання самостійної (розрахункової) роботи на пошту, вказану в п. 7.6, або на пошту групи.

7.8.2. Виконана самостійна (розрахункова) робота має бути надіслана як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить саму роботу, набрану за допомогою будь-якого редактора, або фотографії рукописного тексту. У другому випадку текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісними. Розмір файлу не має перевищувати 10 Mb.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.8.3. Робота має бути надіслана не пізніше вказаної в умовах дати. Максимальний бал за роботу зменшується на 20% за кожний день запізнення.

7.8.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант, ПІБ та групу** виконавця роботи. Також перша сторінка має містити **підпис** виконавця у разі фотографій рукописного тексту. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.8.5. Будь-яка кількість робіт (розв'язаних завдань), що надішли вчасно і містять понад 90% однакових формул (викладок), буде оцінюватися як одна робота (завдання), тобто кожен (спів)автор отримує бали за одну роботу (завдання), поділені на кількість (спів)авторів. Роботи (завдання), що надішли із запізненням і містять понад 90% формул (викладок), які містяться в раніше надісланих роботах, оцінюються в 0 балів.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено к.ф.-м.н., доцентом, Чаповським Юрієм Аркадійовичем

Ухвалено кафедрою ММСА (*протокол №13 від 05.06.2024*)

Погоджено Методичною комісією ІПСА (*протокол № 13 від 06.06.2024*)