



# ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>
Спеціальність	<i>124 Системний аналіз</i>
Статус дисципліни (код)	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>Очна (денна)/дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>3 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>4 кредитів ЄКТС</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен</i>
Розклад занять	<i>Rozklad.kpi.ua</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович. yurychapovsky@gmail.com Практичні: к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович/ к.ф.-м.н., доцент Мальцев Антон Юрійович</i>
Розміщення курсу	<i>Googleclassroom</i>

### Програма навчальної дисципліни

#### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Навчальна дисципліна «Функціональний аналіз» є дисципліною природничо-наукової підготовки і присвячена формуванню у студентів здатності застосовувати основні поняття, означення, теореми та методи їх доведення.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі програмні компетентності та результати навчання за Стандартом вищої освіти:

#### Загальні компетентності

ЗК 1: Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 6: Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 11 Здатність приймати обґрунтовані рішення.

#### Фахові компетентності

ФК1: Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.

ФК2: Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ФК8: Здатність проведення досліджень на відповідному рівні.

## Програмні результати навчання

ПР 2: Використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об'єктів інформатизації.

### 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна передує і забезпечує наступні навчальні дисципліни у програмі підготовки фахівця: «Функціональний аналіз», «Рівняння математичної фізики», «Основи системного аналізу», «Теорія прийняття рішень», «Теорія випадкових процесів», «Стаціонарні випадкові процеси». Вивчення курсу ґрунтується на широкому використанні основних результатів дисциплін: «Алгебра та геометрія» та «Математичний аналіз».

### 3. Зміст навчальної дисципліни

#### Розділ 1. Лінійні нормовані простори.

Означення та приклади лінійних нормованих просторів. Еквівалентність норм. Відкриті та замкнені множини. Послідовності в ЛНП. Банахові простори. Неперервні відображення. Нерухома точка, теорема Банаха про стиск. Компактні підмножини. Щільні підмножини, теореми Вейерштрасса. Гільбертові простори та теорема про проєкцію. Ряди Фур'є в гільбертовому просторі.

#### Розділ 2. Лінійні обмежені оператори та функціонали.

##### Тема 2.1. Загальні положення.

Лінійні обмежені функціонали. Норма лінійного функціонала. Спряжений простір. Теорема Фреше-Рісса. Теорема Хана-Банаха. Обмежені оператори. Норма лінійного оператора. Простір лінійних операторів. Теорема Банаха про обернений оператор. Резольвента та спектр лінійного оператора. Компактні оператори.

##### Тема 2.2. Лінійні оператори в гільбертовому просторі.

Спряжений оператор: означення, приклади, існування, властивості. Певні типи операторів: нормальні, самоспряжені, додатні, проєктори, унітарні. Спектр самоспряженого оператора. Критерій Вейля. Спектральна теорема для компактного самоспряженого оператора.

### 4. Навчальні матеріали та ресурси

#### Базова:

1. Т.В. Боярищева, Т.В. Гудивок, О.О. Погоріляк. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика». – Ужгород, 2013. – 125 с.
2. С.А. Ус, Функціональний аналіз. Навчальний посібник. - Дніпропетровськ, 2013.
3. І.В. Федак, Курс лекцій х функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Частина 4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. -- Івано-Франківськ, 2020.

4. Практикум із курсу «Функціональний аналіз», Кафедра математичного моделювання ДНУ ім. Олесь Гончара, -- Дніпропетровськ, 2009.
5. Богданський Ю.В. Курс лекцій з функціонального аналізу. "Політехніка", Київ, 2003.
6. Богданський Ю.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Метричні простори. Інтеграл Лебега (електронний посібник) К., КПІ, 2018.
7. Богданський Ю.В. Інтеграл в курсі математичного аналізу (електронний посібник). – К., КПІ, 2013.

Додаткова:

8. L. Schwartz, *Topologie generale et analyse fonctionelle*. Hermann, -- Paris, 1993.
9. S. Banach. *Teorie des operations lineares*, -- Warsaw, 1932.
10. N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*. -- Cambridge, 1933.
11. L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, -- N.Y., Chicago, San-Francisco, 1953.

## Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни(освітнього компонента)

#### Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Лінійні простори та лінійні оператори, прямі суми, прямі добутки, фактор-простір. Нерівності Гелдера та Мінковського.
2	Півнорма, норма на лінійному просторі: означення, приклади, властивості. Лінійні нормовані простори $l_K^p, F_b(\Omega; K), L_K^p(\Omega, \mu)$ .
3	Еквівалентність норм. Відкриті та замкнені множини, послідовності в лінійному нормованому просторі.
4	Банахові простори: означення, приклади $(l_K^p, F_b(\Omega; K))$ . Ряди в банаховому просторі. Теорема Ріса-Фішера.
5	Неперервні відображення. Теорема Банаха про стиск. Компактні множини: означення, приклади.
6	Компактні множини: властивості. Критерій Фреше-Хаусдорфа.
7	Компактні підмножини $l_K^p, C(X)$ . Неперервні функції на компактах.
8	Щільні множини. Теорема Вейерштрасса. Щільні множини в $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ .
9	Гільбертові простори. Теорема про проєкцію. Ряд Фур'є.
10	Лінійні функціонали: означення, приклади. Характеризація обмежених лінійних функціоналів.
11	Норма лінійного функціоналу. Приклади. Спряжений простір. Простори $l_p^*$ .
12	Простори $(L_K^p(\Omega, \mu))^*$ . Теорема Фреше-Ріса. Теорема Хана-Банаха.
13	Обмежені оператори. Норма оператора. Лінійний простір $L(E_1, E_2)$ . Обернений оператор. Теорема Банаха про обернений оператор.
14	Спектр та резольвентна множина лінійного оператора.
15	Компактні оператори: означення, приклади. Лема Ріса про майже ортогональний вектор. Ідеал компактних операторів.
16	Спряжений оператор в гільбертовому просторі: означення, приклади. Норма спряженого оператора. Властивості спряження. Спектр та резольвента спряженого оператора.
17	Компактність спряженого оператора. Класи операторів. Спектральні властивості самоспряжених операторів.
18	Спектральні властивості компактних операторів. Спектральна теорема для компактних самоспряжених операторів.

## Практичні заняття

№	Назва теми занять
1	Лінійні простори. Приклади. Пряма сума, прямий добуток, факторпростори.
2	Півнорма, норма на лінійних просторах.
3	Еквівалентність норм. Відкриті та замкнені множини в лінійних нормованих просторах. Збіжність послідовностей.
4	Повнота лінійного нормованого простору.
5	Неперервні відображення. Теорема Банаха про стиск.
6	Компактні підмножини.
7	Неперервні функції на компактах.
8	Щільні підмножини.
9	Гільбертові простори. Проекція на підпростір.
10	Ряди Фур'є.
11	Лінійні функціонали. Норма лінійного функціоналу.
12	Спряжений простір.
13	Обмежені оператори. Норма оператора.
14	Спектр та резольвентна множина лінійного оператора.
15	Компактні оператори.
16	Спряжений оператор в гільбертовому просторі.
17	Спектральна теорема для компактних самоспряжених операторів.

## Політика та контроль

### 6. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Здобувачі вищої освіти не мають право пропускати лекційні та практичні заняття без поважних причин. На кожному практичному занятті студенти повинні активно залучатися до розв'язання задач. Усі надані завдання мають бути виконані з дотриманням академічної доброчесності.

### 7. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль: екзамен

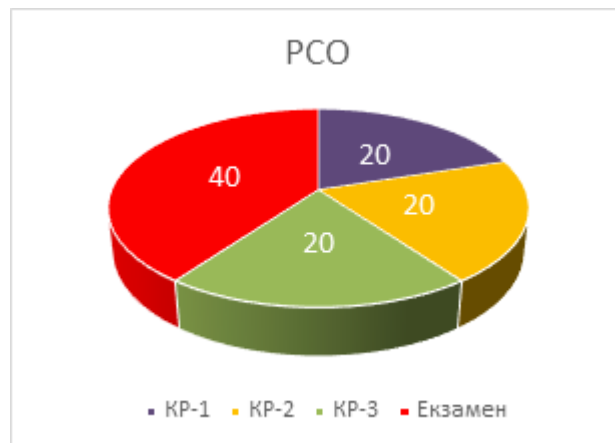
Рейтинг студента з дисципліни за семестр складається з балів, що він отримує за<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Кожна контрольна робота може бути замінена самостійною або розрахунковою роботою. Кількість можливих балів за контрольний захід при цьому не змінюється.

У разі неможливості проведення екзамену за наявності форс-мажорних обставин, бали за семестр R нараховуються за формулою  $R = 100 \cdot (G1 + G2)/2$ , де  $G1$ ,  $G2$  — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

КР-1 20 балів  
 КР-2 20 балів  
 КР-3 20 балів

Екзаменаційна робота / екзамен 40 балів



7.1. Семестровий рейтинг складається з рейтингових балів, і не перевищує  $R_{max} = 100$  балів. У семестрі здобувач може набрати 60 балів, на екзамені — 40 балів. Бали за семестр рахуються як сума набраних балів за всі контрольні заходи.

7.2. Кожний контрольний захід оцінюється у частках від одиниці  $G$  ( $0 - 1$ ). Бали за кожну контрольну роботу нараховуються як  $R = 30 \cdot G$ , за екзамен як  $R = 40 \cdot G$ .

7.3. У разі, якщо здобувач отримав за роботу в семестрі оцінку не нижче ніж 60% від максимальної оцінки за його бажанням, висловленим в письмовій формі, його семестрова оцінка  $R$  може бути порахована за формулою  $R = \min\{74, 100 \cdot (G1 + G2)/2\}$ , де  $G1$ ,  $G2$  — оцінки (у частках одиниці) за відповідні контрольні заходи.

7.4. Здобувач допускається до екзамену або перескладання, якщо семестрова складова його балів становить не нижче, ніж 25 балів.

7.5. Рейтингова оцінка з кредитного модуля переводиться в оцінку ECTS згідно таблиці

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам ECTS:**

Бали: контрольні роботи + екзаменаційна робота	Оцінка
100...95	<b>A-Відмінно</b>
94...85	<b>B-Дуже добре</b>
84...75	<b>C-Добре</b>
74...65	<b>D-Задовільно</b>
64...60	<b>E-Достатньо</b>
Менше 60	<b>F-Незадовільно</b>
стартовий рейтинг менше 25 балів	<b>FX-Не допущено</b>

7.6. Для допуску до контрольного заходу у дистанційному режимі здобувач має надіслати, не пізніше ніж за 3 дні до дати проведення контрольного заходу, свою фотографію та фотографію написаних від руки наступних своїх даних: ПІБ, група, місце поточного знаходження (місто, район, країна), підпис. Ці дані надсилаються один раз на семестр з пошти, на яку здобувач згоден отримати завдання контрольного заходу (бажано в домені @III.kpi.ua). У разі зміни якихось з цих даних або поштової адреси, дані надсилаються знову.

7.7. Виконання і оцінювання **контрольної роботи** або **екзамену**, проведеному в **дистанційному режимі**.

7.7.1. Здобувач отримує завдання контрольного заходу на пошту, вказану в п. 7.6.

7.7.2. Розв'язок отриманого завдання здійснюється самостійно. Виконане завдання контрольного заходу надсилається як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить фотографії рукописного тексту, і розмір якого не перевищує 10 Mb. Текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісні.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.7.3. Виконання завдання має бути здійснено у зазначений в умовах час. Максимальний за роботу бал зменшується на 5% за кожну хвилину запізнення.

7.7.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант завдання, ПІБ та групу** виконавця роботи. Кожна сторінка має містити його **підпис**. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.7.5. Екзамен може бути також проведений у формі співбесіди за допомогою комп'ютерних засобів. При цьому відсутність працюючої камери, або мікрофону, або відсутність інтернету означає неявку студента на іспит.

7.8. Виконання і оцінювання **самостійної (розрахункової) роботи**, проведеної в **дистанційному режимі**.

7.8.1. Здобувач отримує завдання самостійної (розрахункової) роботи на пошту, вказану в п. 7.6, або на пошту групи.

7.8.2. Виконана самостійна (розрахункова) робота має бути надіслана як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі **pdf**, який містить саму роботу, набрану за допомогою будь-якого редактора, або фотографії рукописного тексту. У другому випадку текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісними. Розмір файлу не має перевищувати 10 Mb.

За невиконання будь-якої з цих вимог робота не перевіряється і буде оцінена в 0 балів.

7.8.3. Робота має бути надіслана не пізніше вказаної в умовах дати. Максимальний бал за роботу зменшується на 20% за кожний день запізнення.

7.8.4. Перша сторінка роботи має містити **варіант, ПІБ та групу** виконавця роботи. Також перша сторінка має містити **підпис** виконавця у разі фотографій рукописного тексту. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.

7.8.5. Будь-яка кількість робіт (розв'язаних завдань), що надішли вчасно і містять понад 90% однакових формул (викладок), буде оцінюватися як одна робота (завдання), тобто кожен (спів)автор отримує бали за одну роботу (завдання), поділені на кількість (спів)авторів. Роботи (завдання), що надішли із запізненням і містять понад 90% формул (викладок), які містяться в раніше надісланих роботах, оцінюються в 0 балів.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

Складено к.ф.-м.н., доцент, Чаповський Юрій Аркадійович.

Ухвалено кафедрою ММСА (протокол № 13 від 05.06.2024 р.)

Погоджено Методичною комісією ІПСА (протокол № 13 від 16.06.2024 р.)